OE-Vorlesung 2004

Heiko Rölke

roelke@informatik.uni-hamburg.de

Theoretische Grundlagen der Informatik (TGI)

Übersicht

- Gliederung der Informatik
- Theoretische Informatik
  - Motivation
  - Petrinetze
  - Eigenschaften
- Ausblick

Informatik

- Theorie – Abstraktion – Design
  nach Denning et al.: *Computing as a discipline*
  Comm. ACM 32, 9-23 (1989)

- Theorie
  - Isolation und **Definition** zu untersuchender Objekte
  - Postulation von Beziehungen der Objekte untereinander (**Theorem, Satz**)
  - Verifikation der Postulate (**Beweis**)

Informatik

- Abstraktion / Modellierung
  - Bildung einer **Modellhypothese**
  - **Konstruktion** eines Modells des zu erwartenden Verhaltens
  - **Experimentieren** und Beobachten
  - **Analyse** der Ergebnisse

Informatik

- Design
  - Formulierung der **Anforderungen**
  - Entwurf / **Implementation** des Systems
  - **Test** des Systems

Informatik

- Design
  - Formulierung der **Anforderungen**
  - Entwurf / **Implementation** des Systems
  - **Test** des Systems

Die drei Methoden durchziehen alle Bereiche der Informatik!

Motivation

Wozu theoretische Informatik?

Motivation

Wozu theoretische Informatik?

50% der 10 Aufgaben müssen mit mehr als 2 und weniger als 6 Punkten bewertet werden.

Motivation

Wozu theoretische Informatik?

50% der 10 Aufgaben müssen mit mehr als 2 und weniger als 6 Punkten bewertet werden.

... mögliche Interpretationen:

- mindestens 5 Aufgaben mit 3-5 Punkten
- genau 5 Aufgaben mit 3-5 Punkten

Motivation

50%, also genau 5
der 10 Aufgaben
müssen mit mehr
als 2 und weniger
als 6 Punkten
bewertet werden.

Motivation

50%, also genau 5 der 10 Aufgaben müssen mit mehr als 2 und weniger als 6 Punkten bewertet werden.

... immer noch mögliche Interpretationen:

- mindestens 5 Aufgaben mit 3-5 Punkten
- genau 5 Aufgaben mit 3-5 Punkten

Motivation

Genau 50% der 10 Aufgaben müssen mit mehr als 2 und weniger als 6 Punkten bewertet werden.

... einzig verbleibende Interpretation:

- genau 5 Aufgaben mit 3-5 Punkten

Motivation

Genau 50% der 10 Aufgaben müssen mit mehr als 2 und weniger als 6 Punkten bewertet werden.

... einzig verbleibende Interpretation:

- genau 5 Aufgaben mit 3-5 Punkten

... und was lernt man daraus?

Motivation

Benötigt werden Formalismen:

- präzise Modellierung
  - eindeutig
  - mathematisch wohlfundiert
  - praktisch einsetzbar

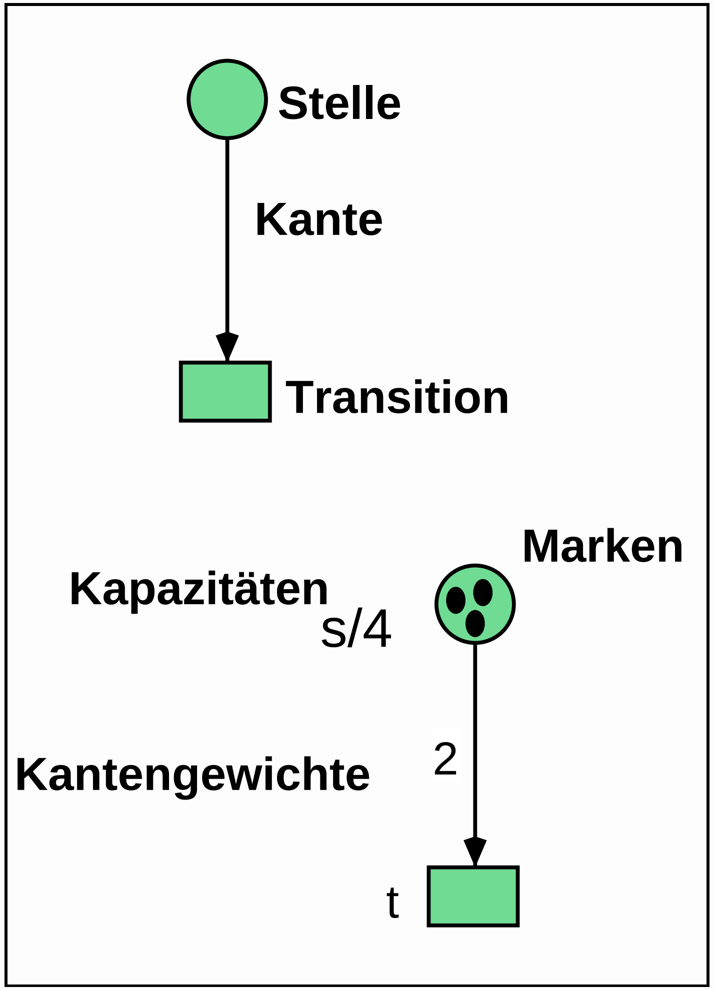
Motivation

Benötigt werden Formalismen:

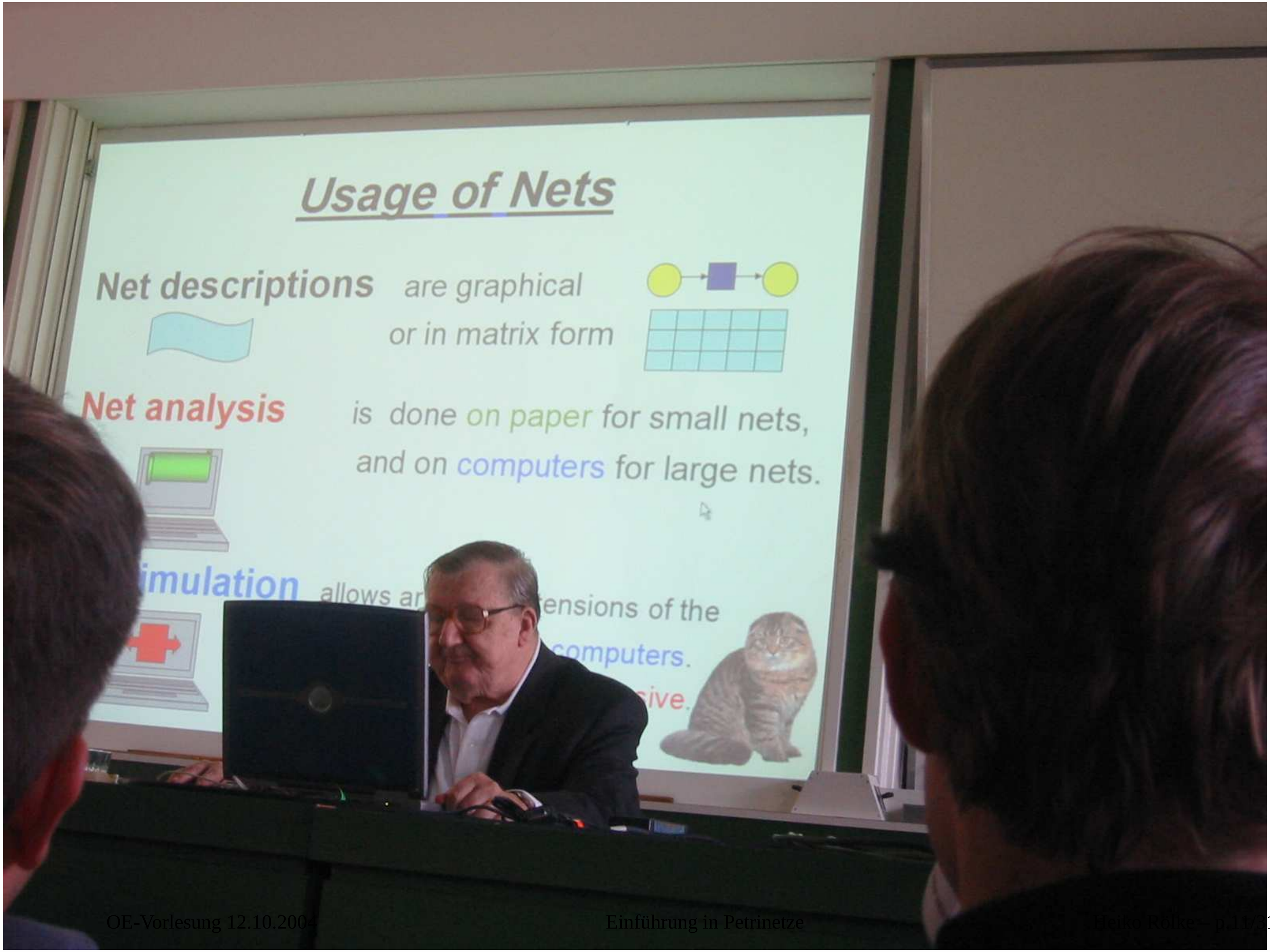
- präzise Modellierung
  - eindeutig
  - mathematisch wohlfundiert
  - praktisch einsetzbar
- anschauliche Modellierung
  - intuitiv
  - graphisch
  - leicht verständlich

Petrinetze

- **Stellen** als passive Komponenten
- **Transitionen** als aktive Komponenten
- gerichtete **Kanten** zwischen Stellen und Transitionen



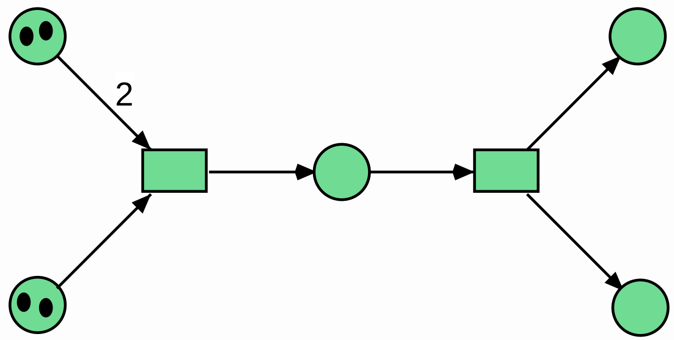
Petrinetze


Usage of Nets
Net descriptions are graphical
or in matrix form
Net analysis is done on paper for small nets,
and on computers for large nets.
imulation allows ar
ensions of the
computers.
sive.

Petrinetze

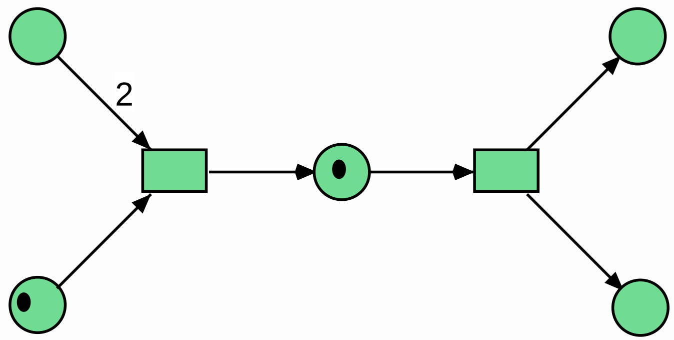
Petrinetze: Dynamik

Marken auf den Stellen ermöglichen den Transitionen zu **schalten**:



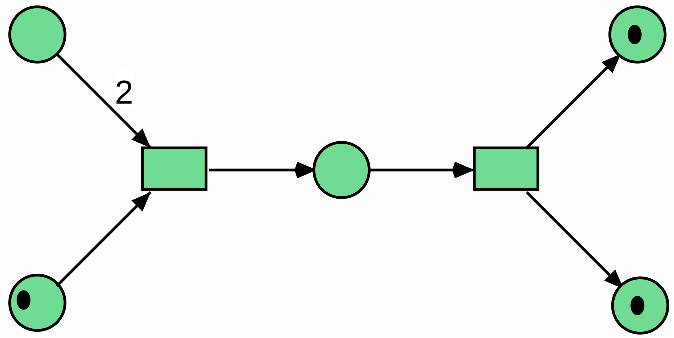
Petrinetze: Dynamik

Marken auf den Stellen ermöglichen den Transitionen zu **schalten**:



Petrinetze: Dynamik

Marken auf den Stellen ermöglichen den Transitionen zu **schalten**:



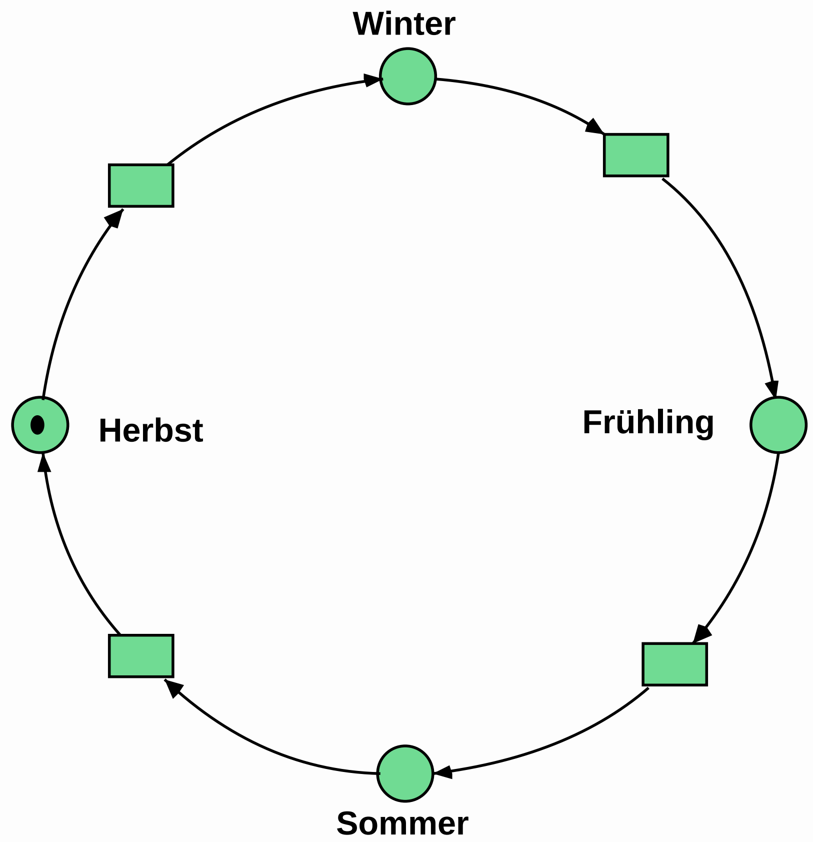
Petrinetze: Dynamik

Schaltregel: Eine Transition ist **aktiviert**
(d.h. kann schalten)
gdw. alle Eingangsstellen ausreichend Marken beinhalten
(und die Kapazität der Ausgangsstellen ausreicht, um entsprechend viele zusätzliche Marken aufzunehmen).

Petrinetze: Beispiel

Einfaches Modell der vier Jahreszeiten:

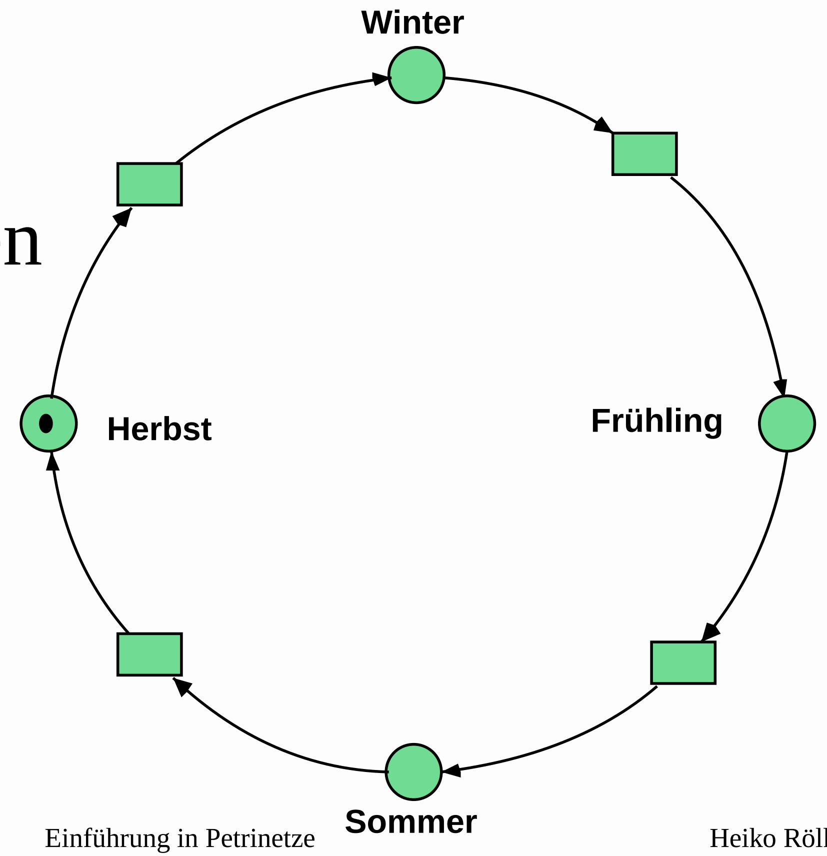
- Modellierung eines dynamischen Systems als S/T-Netz
- Marke als Zustandsmarker



Petrinetze: Beispiel

Besonderheiten dieses einfachen Systems:

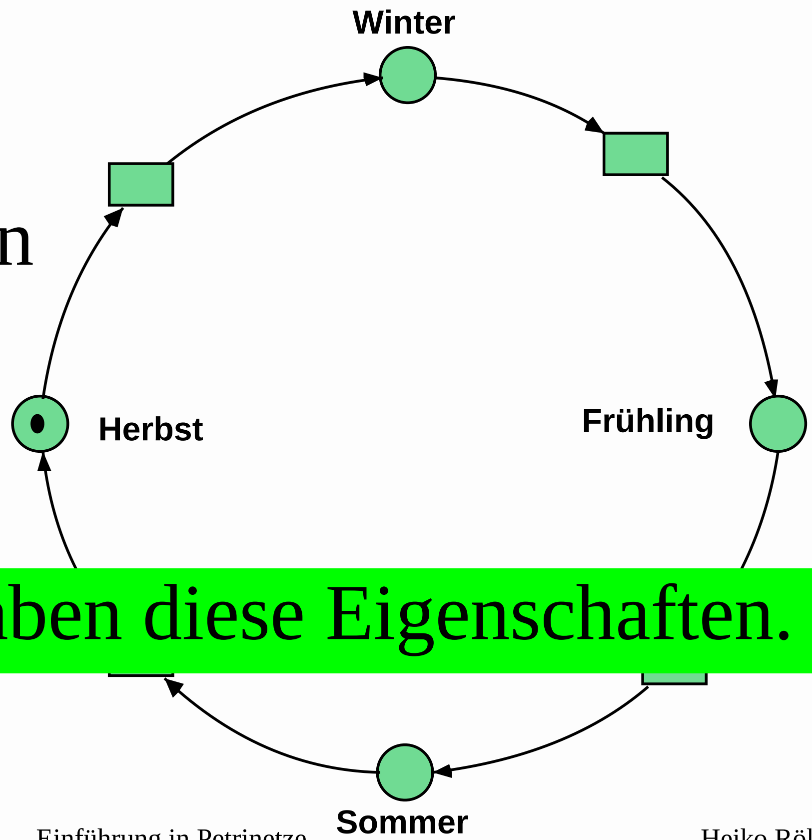
- Genau eine Marke im Netz **Invariante**
- Netz stellt **Kausalitäten** dar
- Transitionen schalten **sequentiell**



Petrinetze: Beispiel

Besonderheiten dieses einfachen Systems:

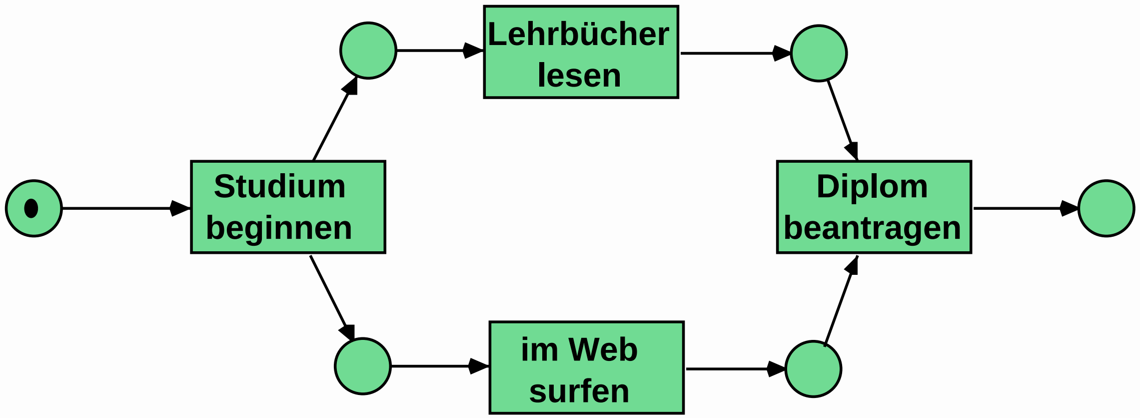
- Genau eine Marke im Netz **Invariante**
- Netz stellt **Kausalitäten** dar
- Transitionen schalten **sequentiell**



Nicht alle "Systeme" haben diese Eigenschaften.

Nebenläufigkeit

... Unabhängigkeit, potentielle Parallelität:
Lesen und *Surfen* können unabhängig voneinander geschehen.



S/T-Netz: Definition

Ein *S/T-Netz* ist ein Tupel $N = (S, T, F, W, m_0)$ mit:

- Einer endlichen Menge S von **Stellen** $\bigcirc$
- Einer endlichen Menge T von **Transitionen** $\square$ mit $T \neq \emptyset$ sowie $T \cap S = \emptyset$
- Einer **Flussrelation** $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$
- Einer **Kantenbewertung** $W : (S \times T) \cup (T \times S) \rightarrow \mathbb{N}$ mit $W(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \notin F$
- Einer **Anfangsmarkierung** $m_0 : S \rightarrow \mathbb{N}$

S/T-Netz: Kapazitäten

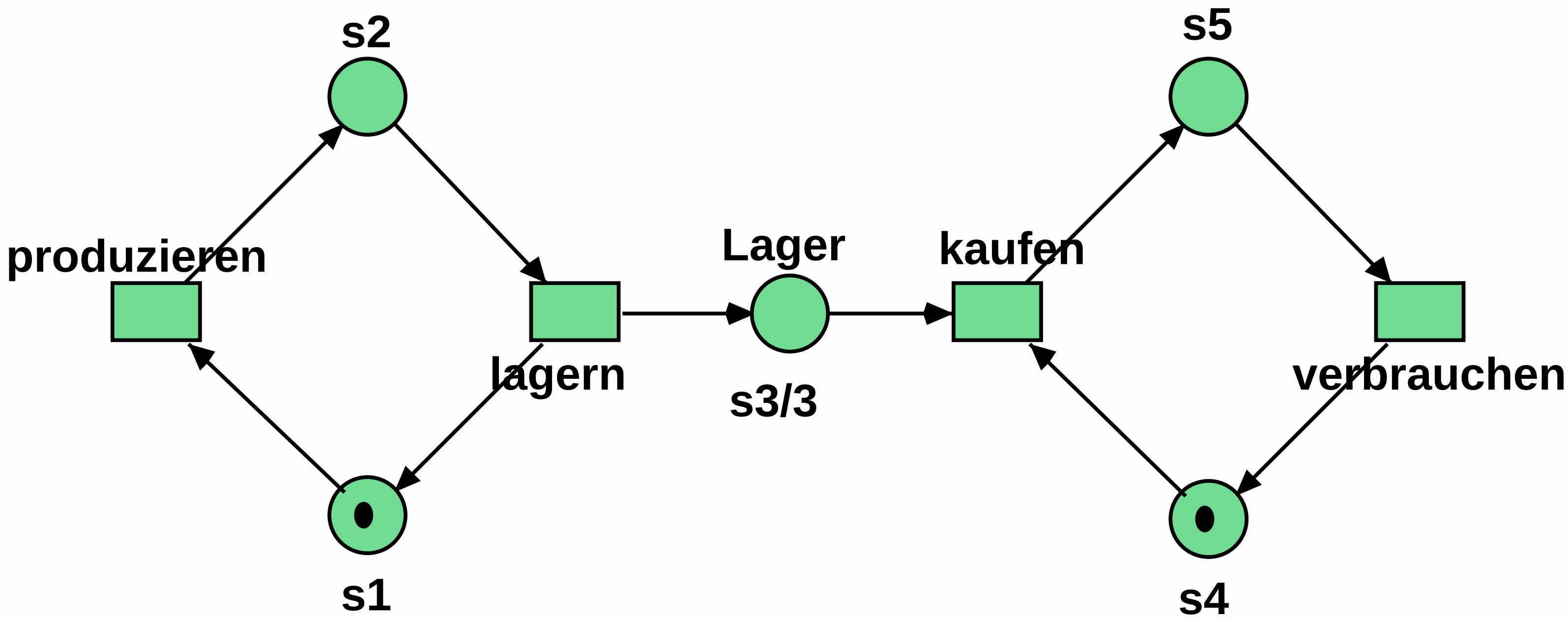
Erweiterung um Kapazitäten:
$N = (S, T, F, K, W, m_0)$

- Mit **Kapazitätsfunktion** $K : S \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}$

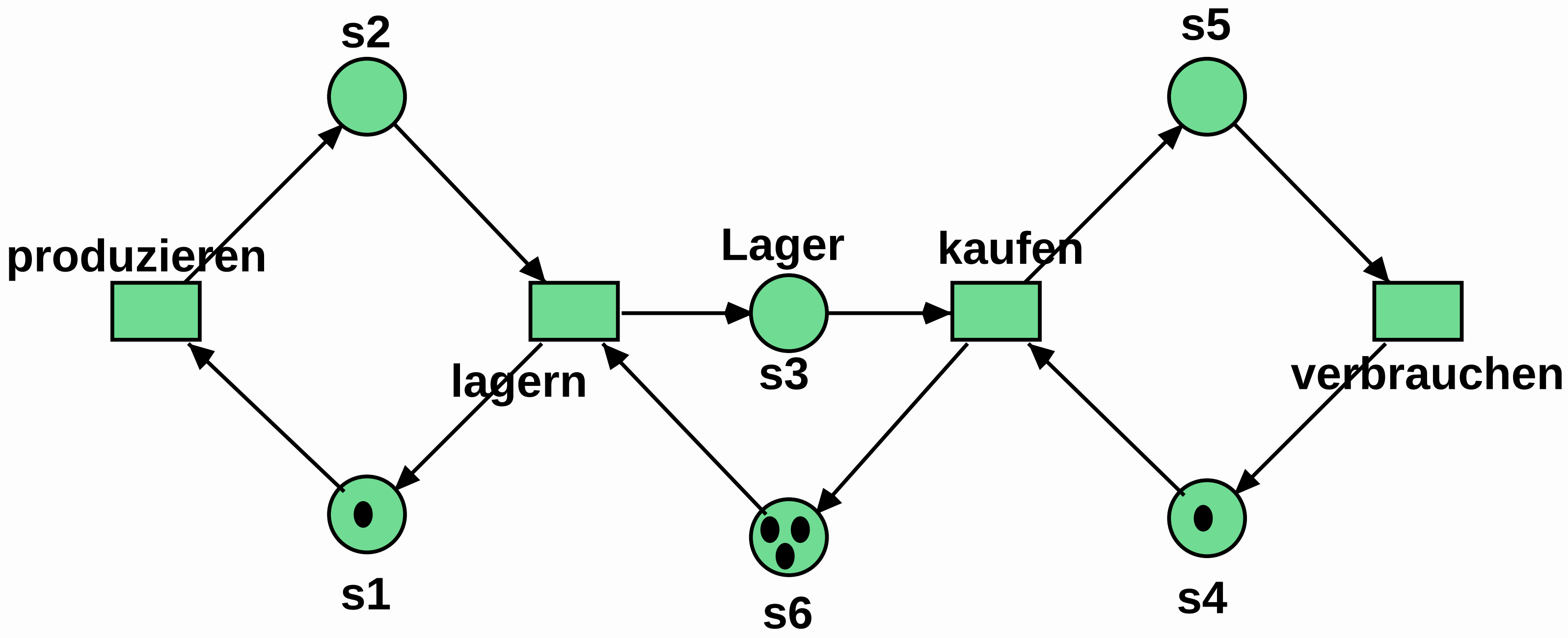
Mit unendlicher Kapazität: $K(s) = \omega$
d.h. es gibt keine Beschränkung der Markenzahl auf Stelle s.

Angepasste Definition der Anfangsmarkierung:
$m_0 : S \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $m_0(s) \leq K(s)$ für alle $s \in S$.

Simulation von Kapazitäten



Simulation von Kapazitäten



S/T-Netze mit und ohne Kapazitäten sind äquivalent!

Definition: Aktivierung

Gegeben:

- ein S/T-Netz $N_1 = (S, T, F, W, m_0)$,
- eine Transition $t \in T$ und
- eine Markierung m_1.

Definition: Aktivierung

Gegeben:

- ein S/T-Netz $N_1 = (S, T, F, W, m_0)$,
- eine Transition $t \in T$ und
- eine Markierung m_1.

Transition t ist **aktiviert** in m_1
(Notation: $m_1 \xrightarrow{t}$),
falls $m_1(s) \geq W(s, t)$ für alle $s \in S$ gilt.

Definition: Aktivierung

Gegeben:

- ein S/T-Netz $N_1 = (S, T, F, W, m_0)$,
- eine Transition $t \in T$ und
- eine Markierung m_1.

Transition t ist **aktiviert** in m_1
(Notation: $m_1 \xrightarrow{t}$),
falls $m_1(s) \geq W(s,t)$ für alle $s \in S$ gilt.

(Bei Kapazitäten zusätzlich:
$m_1(s) - W(s,t) + W(t,s) \leq K(s)$)

Definition: Schalten

Gegeben:

- ein S/T-Netz $N_1 = (S, T, F, W, m_0)$,
- eine Transition $t \in T$ und
- Markierungen m_1 und m_2.

Definition: Schalten

Gegeben:

- ein S/T-Netz $N_1 = (S, T, F, W, m_0)$,
- eine Transition $t \in T$ und
- Markierungen m_1 und m_2.

Transition t **schaltet** m_1 zu m_2
(Notation: $m_1 \xrightarrow{t} m_2$),
falls t in m_1 aktiviert ist
und $\forall s \in S : m_2(s) = m_1(s) - W(s,t) + W(t,s)$
gilt.

Markierung m_2 heißt auch **Folgemarkierung**.

Definition: Aktivierbarkeit

Frage:
Kann eine Transition t überhaupt schalten?

(Ist t **aktivierbar**?)

Definition: Aktivierbarkeit

Frage:
Kann eine Transition t überhaupt schalten?

(Ist t **aktivierbar**?)

Transition t heißt **aktivierbar**, falls es eine erreichbare Markierung m gibt, so dass gilt:
$m \xrightarrow{t}$.

Dann existiert eine **Schaltfolge** von der augenblicklichen Markierung zur Markierung m.

Definition: Schaltfolge

Eine **Schaltfolge** ist ein endliches Wort

$$w = w_1 w_2 w_3 \dots w_n$$

mit $w_i \in T$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definition: Schaltfolge

Eine **Schaltfolge** ist ein endliches Wort

$$w = w_1 w_2 w_3 \ldots w_n$$

mit $w_i \in T$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Schaltfolge w schaltet m zu m',
falls entweder $w = \lambda$ (leeres Wort) und $m = m'$
oder $w = w_1 w_2 w_3 \ldots w_n$ und
$m \xrightarrow{w_1} m_1 \xrightarrow{w_2} m_2 \cdots \xrightarrow{w_n} m_n = m'$
für Markierungen $m_1, m_2, \ldots m_n$.

Definition: Schaltfolge

Eine **Schaltfolge** ist ein endliches Wort

$$w = w_1 w_2 w_3 \ldots w_n$$

mit $w_i \in T$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Schaltfolge w schaltet m zu m',
falls entweder $w = \lambda$ (leeres Wort) und $m = m'$
oder $w = w_1 w_2 w_3 \ldots w_n$ und
$m \xrightarrow{w_1} m_1 \xrightarrow{w_2} m_2 \cdots \xrightarrow{w_n} m_n = m'$
für Markierungen $m_1, m_2, \ldots m_n$.

Ist nur die Existenz der Schaltfolge wichtig, so notiert man auch: $m \xrightarrow{*} m'$

Definition: Erreichbarkeit

Eine Markierung m heißt **erreichbar**, falls es eine Schaltfolge w gibt, so dass

$$m_0 \xrightarrow{w} m$$

Definition: Erreichbarkeit

Eine Markierung m heißt **erreichbar**, falls es eine Schaltfolge w gibt, so dass

$$m_0 \xrightarrow{w} m$$

$R(N)$ bezeichnet die Menge aller erreichbaren Markierungen eines Netzes N.

Definition: Erreichbarkeit

Eine Markierung m heißt **erreichbar**, falls es eine Schaltfolge w gibt, so dass

$$m_0 \xrightarrow{w} m$$

$R(N)$ bezeichnet die Menge aller erreichbaren Markierungen eines Netzes N.

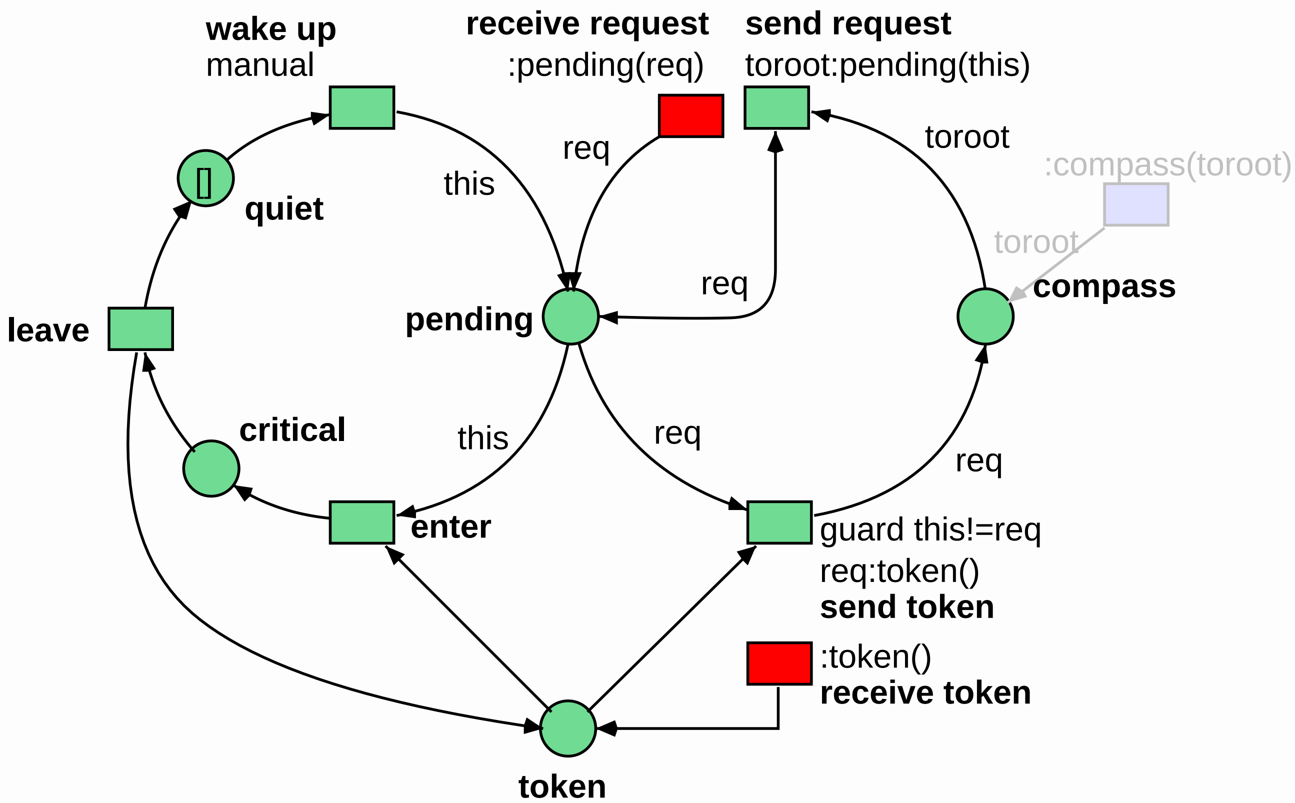
Eine Transition t heißt **tot**, falls sie durch keine erreichbare Markierung aktiviert wird.

Vorlesungsstile

- . . .
- kopierte Folien
- handschriftliche Folien
- u.v.m.

Werkzeuge

Petrinetze werden handhabbar durch Werkzeugunterstützung.



Beispiel: Renew www.renew.de

Zusammenfassung

Petrinetze sind

- anschaulich
- mathematisch formal

Zusammenfassung

Petrinetze sind

- anschaulich
- mathematisch formal

Sie sind somit geeignet zur

- Modellierung (Spezifikation)
- Analyse (Verifikation)
- Ausführung

von (verteilten) Algorithmen.

Ausblick: Petrinetze

Petrinetzformalismen:

- Höhere (gefärbte) Petrinetze
- Objektnetze

Anwendungen:

- Systemspezifikation
- Implementation (Softwareentwicklung)
- Model Checking, Analyse
- Workflows

Ausblick

Weitere Gebiete der theoretischen Informatik:

- Automatentheorie
- Formale Sprachen
- Berechenbarkeit
- Komplexitätstheorie
- Verifikation

TGI