Korrekturen zum F2-Skript
(Sommersemester 2002)

Berndt Farwer

2. Juli 2002

S.17/18, Definition 2.13: Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt

1. **Quasiordnung** (*quasi order*) oder auch Vorordnung bzw. Präordnung (*preorder*) genau dann, wenn sie *reflexiv* und *transitiv* ist.[1]

   Sei K eine Teilmenge von A, d.h. $K \subseteq A$. Ein Element $u \in A$ heißt **untere Schranke** von K genau dann, wenn $\forall x \in K : (u, x) \in R$ gilt. Die Menge aller unteren Schranken von K bzgl. R bezeichnen wir als $\mathrm{MI}_R(K)$.

   Ein Element $o \in A$ wird **obere Schranke** genannt, wenn $\forall x \in K : (x, o) \in R$ gilt. Die Menge aller oberen Schranken von K bzgl. R bezeichnen wir als $\mathrm{MA}_R(K)$.

2. **partielle Ordnung** (*partial order*) genau dann, wenn sie *antisymmetrisch, reflexiv* und *transitiv* ist, d.h. wenn sie eine antisymmetrische Quasiordnung ist. Die Bezeichnung **Halbordnung** wird synonym hierzu verwendet.[2] Die Menge A heißt dann partiell geordnet bzgl. R und wird kurz ***poset*** (***p**artially **o**rdered **set***) genannt.

   Sei R eine partielle Ordnung. Dann definieren wir:

   (a) $a \in A$ heißt **minimal** (*least*) (bzw. **maximal**(*maximal*)) bzgl. R genau dann, wenn es **kein** $b \in A$ gibt mit $a \neq b$ und $(b, a) \in R$ (bzw. $(a, b) \in R$).

   (b) Ein Element $a \in A$ heißt **Minimum** (bzw. **Maximum**) wenn $\forall b \in A \setminus \{a\} : (a, b) \in R$ (bzw. $\forall b \in A \setminus \{a\} : (b, a) \in R$) gilt.

---

[1] In der Literatur findet man machmal auch den Begriff der irreflexiven Quasiordnung, für die neben der Transitivität nur Irreflexivität gelten muss. In diesem Fall würde die hier definierte Quasiordnung zur Unterscheidung als reflexive Quasiordnung bezeichnet. Wir bezeichnen irreflexive Quasiordnungen als *Striktordnung.* Zum Beispiel in [Gries&Schneider] wird jedoch der Begriff *quasi order* gerade für solch transitive und irreflexive Relationen verwendet!

[2] Analog zur vorigen Fußnote zu Quasiordnungen, wird auch manchmal zwischen reflexiven und irreflexiven **Halbordnungen** unterschieden. Eine partielle Ordnung in unseren Sinne ist dann eine reflexive Halbordnung. Zum Beispiel in [Floyd&Beigel]) wird für eine partielle Ordnung jedoch die Reflexivität *nicht* gefordert und nur Transitivität und Antisymmetrie vorausgesetzt.

(c) Sei $K \subseteq A$. Als **Infimum**, auch größte untere Schranke (***g**reatest **l**ower **b**ound*) oder untere Grenze, bezeichnet man eine untere Schranke $u \in \mathrm{MI}_R(K)$, wenn $\forall x \in \mathrm{MI}_R(K) : (x \neq u \rightarrow (x,u) \in R)$ gilt. Ein Infimum ist also das Maximum der Menge der unteren Schranken von K bzgl. R. Falls ein Infimum existiert, so ist es eindeutig und wird mit $\inf(K)$ (oft auch $\bigwedge K$) bezeichnet.

(d) Als **Supremum**, auch kleinste obere Schranke (***l**east **u**pper **b**ound*) oder obere Grenze, bezeichnet man eine obere Schranke $o \in \mathrm{MA}_R(K)$, wenn $\forall x \in \mathrm{MA}_R(K) : (x \neq o \rightarrow (o,x) \in R)$ gilt. Ein Supremum ist also das Minimum der Menge der oberen Schranken von K bzgl. R. Falls ein Supremum existiert, so ist es eindeutig und wird mit $\sup(K)$ (oft auch mit $\bigvee K$) bezeichnet.

3. **Striktordnung** (Abk. **spo** für ***s**trict **p**artial **o**rder*)[3], falls sie *asymmetrisch* und *transitiv ist.* Jede irreflexive und transitive Relation ist asymmetrisch, so dass eine Striktordnung auch als transitive, irreflexive Relation definiert werden könnte. Der **strikte** Teil einer partiellen Ordnung $R \subseteq A \times A$ ist $R \setminus Id_A$, wobei $Id_A := \{(a,a) \mid a \in A\}$ die **Identitätsrelation** auf A bezeichnet.
4. **lineare** (oder **totale**) **Ordnung** genau dann, wenn sie *partielle Ordnung* ist und zusätzlich für alle $a, b \in A$ mit $a \neq b$ entweder $(a,b) \in R$ oder $(b,a) \in R$ gilt, d.h. R ist konnex. Man sagt, dass die Menge A total geordnet ist.
5. **wohl-fundiert** (*well founded*), wenn jede nicht leere Teilmenge von A ein minimales Element besitzt.
6. **Wohlordnung** (*well ordering*), wenn sie eine wohl-fundierte lineare Ordnung ist.

S.28, Abbildung 2.2 In der Zeile für $i = 0$ muß der Eintrag in der Spalte $g(i)$ natürlich statt $g(1)$ korrekt $g(0)$ lauten.

S.55, Definition 3.12, erste Zeile Ein NFA $A := (Z, \Sigma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}})$ heißt

S.60, Definition 3.22 In 2. muss es statt „$\ldots$, mit $x_i \in X, \ldots$“ korrekt heißen „$\ldots$, mit $x_i \in \Sigma, \ldots$“.

S.61, Beweis zu Theorem 3.25 Ersetze „$mbox(inA)$“ durch „(in A)“.

S.63, Beweis zu Theorem 3.24 Ersetze $B := (2^Z, X, \delta, z_0, Z'_{\text{end}})$ durch $B := (2^Z, \Sigma, \delta, z_0, Z'_{\text{end}})$.

S.64, Beispiel 3.27 Ersetze den zweiten Absatz durch: Nach Konstruktion sind die Bestandteile von $B := (Z', \Sigma, \delta, z_0, Z'_{\text{end}})$ gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
Z' &:= 2^Z = \Big\{\emptyset, \{z_0\}, \{z_1\}, \{z_2\}, \{z_0, z_1\}, \{z_0, z_2\}, \{z_1, z_2\}, \{z_0, z_1, z_2\}\Big\}, \\
\Sigma &:= \{a, b\},
\end{aligned}
$$

[3] auch *asymmetrische (irreflexive) Halbordnung* genannt

$$Z'_{\text{end}} := \Big\{\{z_2\},\{z_0,z_2\},\{z_1,z_2\},\{z_0,z_1,z_2\}\Big\}$$

Die graphische Darstellung des Potenzautomaten B und δ sind dem (nicht zusammenhängenden) Zustandsgraphen aus Abbildung 3.10 zu entnehmen.

S.65, Algorithmus 3.28 Ersetze in der letzten Zeile vDFA durch DFA.

S.66, Definition 3.30 Ersetze in der ersten Zeile beide Vorkommen von X durch Σ.

S.68, Beweis zu Theorem 3.31 Ersetze im NFA $C_{A\cup B}$ die Komponente $z_{3,0}$ durch $Z_{3,\text{start}}$, also: $C_{A\cup B} := (Z_3, \Sigma_3, K_3, Z_{3,\text{start}}, Z_{3,\text{end}})$.

S.69, Theorem 3.32 Soll lauten: Mit $L_1 \in \mathcal{A}kz(\Sigma_1)$ und $L_2 \in \mathcal{A}kz(\Sigma_2)$ ist auch $L_1 \cdot L_2 \in \mathcal{A}kz(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$.

S.69, Beweis zu Theorem 3.33 Soll lauten: Sei $A := (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{\text{end}})$ ein vDFA mit $L = L(A)$, so wird ein buchstabierender NFA C_{A^*} definiert durch $C_{A^*} := (Z \uplus \{p\}, \Sigma, K, \{p\}, \{p\})$ mit $K := K_1 \cup K_2 \cup K_3$, wobei $K_1 := \{(z, x, \delta(z,x)) \mid x \in \Sigma, z \in Z\}$ die zum vDFA A gehörende Kantenmenge, sowie $K_2 := \{(p, x, \delta(z_0, x)) \mid x \in X\}$ und $K_3 := \{(z, x, p) \mid x \in \Sigma, \delta(z,x) \in Z_{\text{end}}\}$ die neuen Nicht-λ-Kanten als Verbindungen mit dem neuen Zustand sind. Der neue Zustand ist notwendig, damit das leere Wort akzeptiert werden kann!

S.70, Theorem 3.34 Soll lauten: Für jedes Alphabet Σ gilt $\mathcal{A}kz(\Sigma) = \mathcal{R}at(\Sigma)$ und folglich $\mathcal{R}eg = \mathcal{R}at$.

S.70, Beweis zu Theorem 3.34 In der 9. Zeile des Beweises muss es heissen: Folglich ist

$$R^0_{i,j} = \{x \in \Sigma \cup \{\lambda\} \mid \delta(z_i, x) = z_j \text{ oder } (x = \lambda) \wedge (i = j)\}.$$

S.87, Definition 3.61 Soll lauten: Eine **Substitution** ist ein Homomorphismus $s : \Sigma^* \longrightarrow 2^{\Gamma^*}$, wobei Σ und Γ Alphabete sind und s folgende Eigenschaften besitzt:

1. Für jedes $a \in \Sigma$ ist $s(a) \subseteq \Gamma^*$ definiert.
2. $s(\lambda) := \{\lambda\}$.
3. $\forall u, v \in \Sigma^* : s(uv) = s(u) \cdot s(v)$

Ist $s(a)$ regulär (bzw. endlich) für jedes $a \in \sigma$, dann heißt s eine **reguläre** bzw. eine **endliche** Substitution.

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ werde s kanonisch (in natürlicher Weise) erweitert durch:

$$s(L) := \bigcup_{w \in L} s(w)$$

S.87/88, Definition 3.64 Soll lauten: Seien Σ und Γ endliche Alphabete sowie $h : \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$ ein Homomorphismus. Die zu h inverse Relation, genannt **inverser Homorphismus**, kann auch als totale Funktion $h^{-1} : \Gamma^* \longrightarrow 2^{\Sigma^*}$. Hierbei definiert h^{-1} für jedes $w \in \Gamma^*$ die Menge aller möglichen Urbilder von w durch:

$$h^{-1}(w) := \{v \in \Sigma^* \mid \exists w \in \Gamma^* : h(v) = w\}.$$

Diese Menge kann daher auch leer sein. Wie auch bei Homomorphismen und Substitutionen wird der inverse Homomorphismus kanonisch auf formale Sprachen erweitert:

$$h^{-1}(L) := \bigcup_{w \in L} h^{-1}(w)$$

S.88, Theorem 3.66 und dessen Beweis Soll lauten: Sei $L \in \mathcal{A}kz(\Gamma)$ und $h : \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$ ein Homomorphismus, dann ist $h^{-1}(L) \in \mathcal{A}kz(\Sigma)$.

Beweis: Sei $L = L(A)$ für einen vDFA $A = (Z, \Gamma, \delta_1, z_0, Z_{\text{end}})$. Wir konstruieren einen DFA $B = (Z, \Sigma, \delta_2, z_0, Z_{\text{end}})$, der bei Eingabe eines Symbols x aus Σ den vDFA A auf der Eingabe $h(x)$ simuliert. Dazu wird δ_2 definiert durch: $\forall (z, x) \in Z \times \Sigma : \delta_2(z, x) := (z)^{h(x)}$, wobei in B der mit $h(x)$ in A erreichte Zustand $(z)^{h(x)}$ eingenommen wird. Wenn also in A ein Wort $v \in (h(\Sigma))^*$ akzeptiert wird, so wird jedes $u \in \Sigma^*$ mit $h(u) \in (h(\Sigma))^*$ auch von B akzeptiert. Die Umkehrung ist ebenso einfach. □

S.91, Algorithmus 3.75 Ersetze in Schritt **1.** den Kommentar durch „(Beachte $k \leq |Z|$)“.

S.92, Definition 3.76 Ersetze die Eingabe durch: Zwei DFAs $A = (Z_A, \Sigma_A, \delta_A, z_{A,0}, Z_{A,\text{end}})$ und $B = (Z_B, \Sigma_B, \delta_B, z_{B,0}, Z_{B,\text{end}})$.

S.92, Theorem 3.77 und dessen Beweis Das Äquivalenzproblem für DFAs ist in Zeit $|\Sigma_A \cap \Sigma_B| \cdot |Z_A| \cdot |Z_B|$ entscheidbar.

Beweis: Für $L_1 := L(A)$ und $L_2 := L(B)$ gilt doch $L_1 = L_2$ genau dann, wenn sowohl $L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset$ als auch $L_2 \cap \overline{L_1} = \emptyset$ ist. Ein vervollständigter DFA kann sofort in einen DFA umgewandelt werden, der das Komplement des ersten akzeptiert. Dazu müssen nur alle ehemaligen Endzustände zu gewöhnlichen Zuständen modifiziert und umgekehrt alle Zustände, die keine Endzustände waren, nun in Endzustände gewandelt werden. Dies geschieht mit linearem Aufwand. Den Durchschnittsautomaten $C_{A \cap B} := (Z_A \times Z_B, \Sigma_C = \Sigma_A \cap \Sigma_B, \delta_C, (z_{A,0}, z_{B,0}), Z_{C,\text{end}})$ hatten wir schon im Beweis zu Theorem 3.59 kennengelernt. Seine Konstruktion verlangt die Bestimmung aller Einträge der Übergangsfunktion δ_C mit $|\Sigma_C| \cdot |Z_A| \cdot |Z_B|$ vielen Argumenten in entsprechend vielen Schritten. □

S.93, Beispiel 4.1 Ersetze Σ durch X und Γ durch Y.

S.94, Definition 4.2 Für die Menge der Produktionen muss es korrekt heißen: $P \subseteq V^* \setminus V_T^* \times V^*$.

S.97, Theorem 4.11 Soll lauten: Zu jeder CFG G mit $L(G) \neq \emptyset$ kann effektiv eine äquivalente reduzierte CFG G' konstruiert werden.

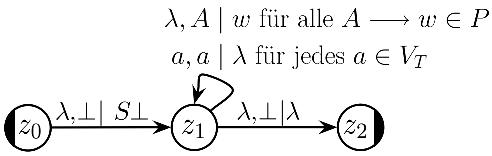
S.102, Beweis zu Theorem 4.16 Es wird ein NFA konstruiert, dessen Bestandteile sind:

$$\begin{array}{rcl} Z & := & \{z_A \mid A \in V_N\} \cup \{z_\lambda\} \\ \Sigma & := & V_T \\ Z_{\text{start}} & := & \{z_S\} \\ Z_{\text{end}} & := & \{z_\lambda\} \\ K & := & \{(z_Q, u, z_R) \mid Q, R \in V_N \wedge u \in V_T^* \wedge Q \longrightarrow uR \in P\} \cup \\ & & \{(z_Q, u, z_\lambda) \mid Q \in V_N \wedge u \in V_T^* \wedge Q \longrightarrow u \in P\} \end{array}$$

S.111, Beweis zu Theorem 4.33 Ersetze „...ein weiters Nonterminal ...“ durch „...ein weiters Terminal ...“.

S.121, Beispiel 5.8 Korrigiere: $L(A) = \{a^n b^m \mid n, m \in I\!N \wedge n \geq 1 \wedge n \geq m\}$

S.123, Abbildung 5.3



S.123, Beweis zu Lemma 5.13 Ersetze die Definition von K_1 durch $K_1 := \{(z_{\text{begin}}, \lambda, \perp, \perp\$, z) \mid z \in Z_{\text{start}}\}$.

S.125, Beispiel 5.15 Ersetze ab der Angabe der Menge der Produktionen auf der Mitte der Seite durch:

$$\begin{array}{l} \{\ S \longrightarrow [z, \perp, z],\ S \longrightarrow [z, \perp, z'], \\ \quad [z, b, z] \longrightarrow b,\ [z, b, z'] \longrightarrow b, \\ \quad [z, \$, z] \longrightarrow \lambda,\ [z', \$, z'] \longrightarrow \lambda\} \cup \\ \{\ [z, \$, z_3] \longrightarrow a[z, \$, z_1][z_1, b, z_2][z_2, \$, z_3] \mid z_1, z_2, z_3 \in \{z, z'\}\ \} \cup \\ \{\ [z, \perp, z_3] \longrightarrow a[z, \$, z_1][z_1, b, z_2][z_2, \$, z_3] \mid z_1, z_2, z_3 \in \{z, z'\}\ \}. \end{array}$$

Diese CFG ist offensichtlich nicht reduziert, denn die Nonterminale $[z', b, z']$, $[z', b, z]$ und $[z', \$, z]$ sind nicht produktiv, können aber erreicht werden. Wenn alle Produktionen, die diese Hilfszeichen enthalten gestrichen werden, erhalten wir eine kleinere Grammatik mit folgenden Produktionen:

$$S \longrightarrow [z, \$, z],\ S \longrightarrow [z, \$, z'],$$

$$[z,b,z] \longrightarrow b,\ \ [z,b,z'] \longrightarrow b,$$
$$[z,\bot,z] \longrightarrow a[z,\$,z][z,b,z][z,\$,z']$$
$$[z,\bot,z] \longrightarrow a[z,\$,z][z,b,z'][z',\$,z']$$
$$[z',\$,z'] \longrightarrow \lambda,\ \ [z,\$,z] \longrightarrow \lambda,$$
$$[z,\$,z] \longrightarrow a[z,\$,z][z,b,z][z,\$,z]$$
$$[z,\$,z'] \longrightarrow a[z,\$,z][z,b,z][z,\$,z']$$
$$[z,\$,z'] \longrightarrow a[z,\$,z][z,b,z'][z',\$,z']$$

Weitere Umformungen dieser CFG ergeben die äquivalenten Grammatiken:

$S \longrightarrow A$, $A \longrightarrow aAbA$, $A \longrightarrow ab$, oder kürzer: $S \longrightarrow aSbS \mid ab$.

Das Verfahren der Tripelkonstruktion konnte zwar an diesem Beispiel illustriert werden, der im Beweis verwendete Automat aus dem vorangegangenen Lemma muss aber noch weiterreichende Bedingungen erfüllen!

Literatur

[Floyd&Beigel] R. Floyd & R. Beigel:
"Die Sprache der Maschinen",
Internat. Thomson Publ., Bonn, Albany (1996)

[Gries&Schneider] D. Gries & F.B. Schneider:
"A Logical Approach to Discrete Math".
Springer-Verlag, Heidelberg (1993)