F2 — Automaten und formale Sprachen

Berndt Farwer

Fachbereich Informatik
AB „Theoretische Grundlagen der Informatik“ (TGI)
Universität Hamburg
farwer@informatik.uni-hamburg.de

Abschlusseigenschaften (2)

- Die Familie der kontextfreien Sprachen ist **nicht** abgeschlossen gegenüber folgenden Operatoren:

Abschlusseigenschaften (2)

- Die Familie der kontextfreien Sprachen ist **nicht** abgeschlossen gegenüber folgenden Operatoren:
  1. Durchschnittsbildung

Abschlusseigenschaften (2)

- Die Familie der kontextfreien Sprachen ist **nicht** abgeschlossen gegenüber folgenden Operatoren:
  1. Durchschnittsbildung
  2. Komplementbildung

Abschlusseigenschaften (2)

- Die Familie der kontextfreien Sprachen ist **nicht** abgeschlossen gegenüber folgenden Operatoren:
  1. Durchschnittsbildung
  2. Komplementbildung
  3. Bildung einer Mengendifferenz

Abschlusseigenschaften (2)

- Die Familie der kontextfreien Sprachen ist **nicht** abgeschlossen gegenüber folgenden Operatoren:
  1. Durchschnittsbildung
  2. Komplementbildung
  3. Bildung einer Mengendifferenz
- Den **Beweis** führen wir indirekt:

Abschlusseigenschaften (2)

- Die Familie der kontextfreien Sprachen ist **nicht** abgeschlossen gegenüber folgenden Operatoren:
  1. Durchschnittsbildung
  2. Komplementbildung
  3. Bildung einer Mengendifferenz
- Den **Beweis** führen wir indirekt:
  - $L_1 := \{a^n b^n \mid n \in I\!N\}$ wie auch $L_2 := \{b^m c^m \mid m \in I\!N\}$ sind kontextfreie Sprachen.

Abschlusseigenschaften (2)

- Die Familie der kontextfreien Sprachen ist **nicht** abgeschlossen gegenüber folgenden Operatoren:
  1. Durchschnittsbildung
  2. Komplementbildung
  3. Bildung einer Mengendifferenz
- Den **Beweis** führen wir indirekt:
  - $L_1 := \{a^n b^n \mid n \in I\!N\}$ wie auch $L_2 := \{b^m c^m \mid m \in I\!N\}$ sind kontextfreie Sprachen.
  - $L_3 := L_1 \cdot \{c\}^*$ und $L_4 := \{a\}^* \cdot L_2$ ist kontextfrei.

Abschlusseigenschaften (2)

- Die Familie der kontextfreien Sprachen ist **nicht** abgeschlossen gegenüber folgenden Operatoren:
  1. Durchschnittsbildung
  2. Komplementbildung
  3. Bildung einer Mengendifferenz
- Den **Beweis** führen wir indirekt:
  - $L_1 := \{a^n b^n \mid n \in I\!N\}$ wie auch $L_2 := \{b^m c^m \mid m \in I\!N\}$ sind kontextfreie Sprachen.
  - $L_3 := L_1 \cdot \{c\}^*$ und $L_4 := \{a\}^* \cdot L_2$ ist kontextfrei.
  - $L_5 := L_3 \cap L_4 = \{a^n b^n c^n \mid n \in I\!N\} \in \mathcal{C}f$. L_5 ist aber nicht kontextfrei!

Abschlusseigenschaften (2)

- Die Familie der kontextfreien Sprachen ist **nicht** abgeschlossen gegenüber folgenden Operatoren:
  1. Durchschnittsbildung
  2. Komplementbildung
  3. Bildung einer Mengendifferenz
- Den **Beweis** führen wir indirekt:
  - $L_1 := \{a^n b^n \mid n \in I\!N\}$ wie auch $L_2 := \{b^m c^m \mid m \in I\!N\}$ sind kontextfreie Sprachen.
  - $L_3 := L_1 \cdot \{c\}^*$ und $L_4 := \{a\}^* \cdot L_2$ ist kontextfrei.
  - $L_5 := L_3 \cap L_4 = \{a^n b^n c^n \mid n \in I\!N\} \in \mathcal{C}f$. L_5 ist aber nicht kontextfrei!
- 2. und 3. folgen somit direkt!

Schnitt mit regulären Mengen

- Obwohl $\mathcal{C}f$ nicht allgemein gegen Durchschnittsbildung abgeschlossen ist, so doch für einen speziellen Fall:

Schnitt mit regulären Mengen

- Obwohl $\mathcal{C}f$ nicht allgemein gegen Durchschnittsbildung abgeschlossen ist, so doch für einen speziellen Fall:
- **Theorem:** Für $L \in \mathcal{C}f$ und $R \in \mathcal{R}eg$ gilt $L \cap R \in \mathcal{C}f$, kurz $\mathcal{C}f \wedge \mathcal{R}eg \subseteq \mathcal{C}f$.

Schnitt mit regulären Mengen

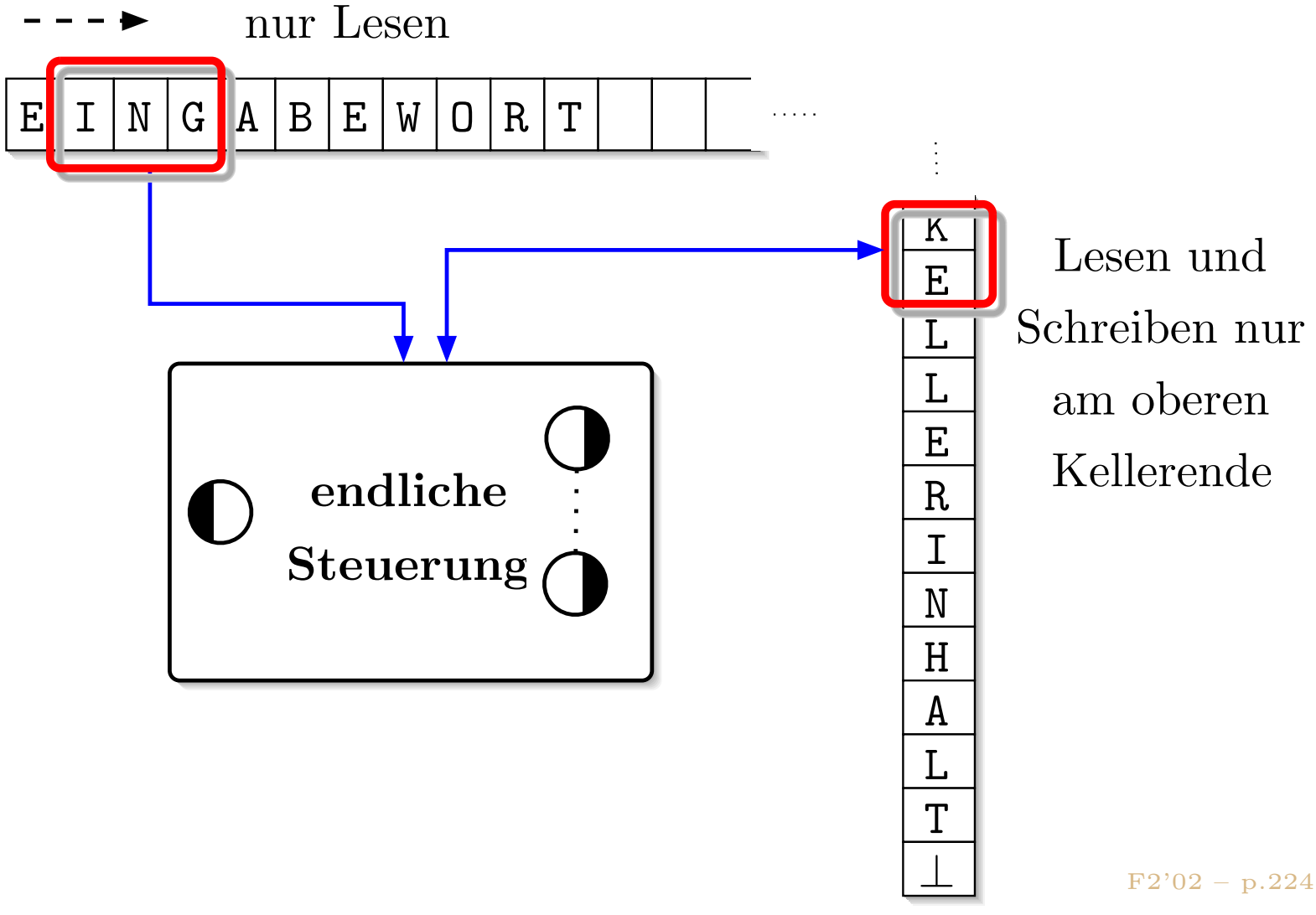
- Obwohl $\mathcal{C}f$ nicht allgemein gegen Durchschnittsbildung abgeschlossen ist, so doch für einen speziellen Fall:
- **Theorem:** Für $L \in \mathcal{C}f$ und $R \in \mathcal{R}eg$ gilt $L \cap R \in \mathcal{C}f$, kurz $\mathcal{C}f \wedge \mathcal{R}eg \subseteq \mathcal{C}f$.
- **Beweisidee:** Bildung eines Produktautomaten aus dem NFA für R und der endlichen Steuerung des Kellerautomaten für L ... aber was ist eigentlich ein Kellerautomat?

Schnitt mit regulären Mengen

- Obwohl $\mathcal{C}f$ nicht allgemein gegen Durchschnittsbildung abgeschlossen ist, so doch für einen speziellen Fall:
- **Theorem:** Für $L \in \mathcal{C}f$ und $R \in \mathcal{R}eg$ gilt $L \cap R \in \mathcal{C}f$, kurz $\mathcal{C}f \wedge \mathcal{R}eg \subseteq \mathcal{C}f$.
- **Beweisidee:** Bildung eines Produktautomaten aus dem NFA für R und der endlichen Steuerung des Kellerautomaten für L ... aber was ist eigentlich ein Kellerautomat?
- Im Skript ist dies auch direkt mit Grammatiken bewiesen!

Kellerautomaten

- Eine Kellerautomat ist ein endlicher Automat mit Kellerspeicher:



Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\mathsf{start}}, Z_{\mathsf{end}}, \perp)$, wobei gilt:

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.
  - Γ ist endliches **Kelleralphabet**.

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.
  - Γ ist endliches **Kelleralphabet**.
  - $K \subseteq Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Z$ ist die endliche **Zustandsüberführungsrelation**.

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.
  - Γ ist endliches **Kelleralphabet**.
  - $K \subseteq Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Z$ ist die endliche **Zustandsüberführungsrelation**.
  - $Z_{\text{start}} \subseteq Z$ ist die Menge der **Startzustände**.

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.
  - Γ ist endliches **Kelleralphabet**.
  - $K \subseteq Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Z$ ist die endliche **Zustandsüberführungsrelation**.
  - $Z_{\text{start}} \subseteq Z$ ist die Menge der **Startzustände**.
  - $Z_{\text{end}} \subseteq Z$ ist die Menge der **Endzustände**.

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.
  - Γ ist endliches **Kelleralphabet**.
  - $K \subseteq Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Z$ ist die endliche **Zustandsüberführungsrelation**.
  - $Z_{\text{start}} \subseteq Z$ ist die Menge der **Startzustände**.
  - $Z_{\text{end}} \subseteq Z$ ist die Menge der **Endzustände**.
  - $\perp \in \Gamma$ ist das **Kellerbodenzeichen** oder **Kellerbodensymbol**.

Einige Notationen

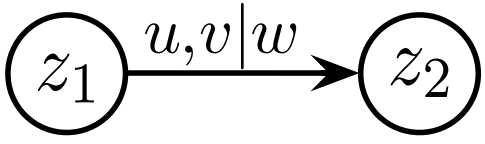
- **Wichtige Notation:** Der Kellerinhalt wird durch ein Wort $v \in \Gamma^*$ so beschrieben, dass das oberste Zeichen des Kellerinhaltes in v ganz am Anfang, d.h. links, steht.

Einige Notationen

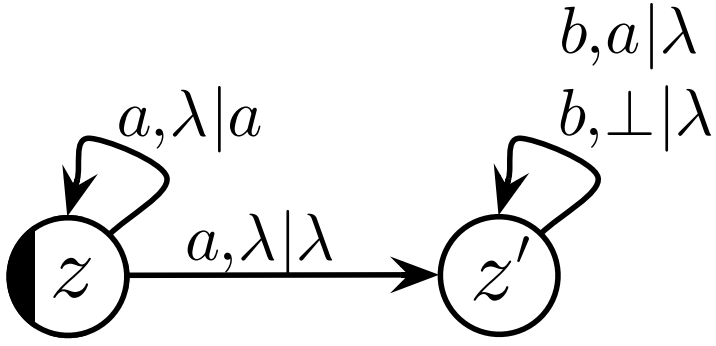
- **Wichtige Notation:** Der Kellerinhalt wird durch ein Wort $v \in \Gamma^*$ so beschrieben, dass das oberste Zeichen des Kellerinhaltes in v ganz am Anfang, d.h. links, steht.
- **Beispiel:** $abab\bot$ bedeutet, dass a das oberste und $\bot$ das unterste Zeichen im Keller ist.

Einige Notationen

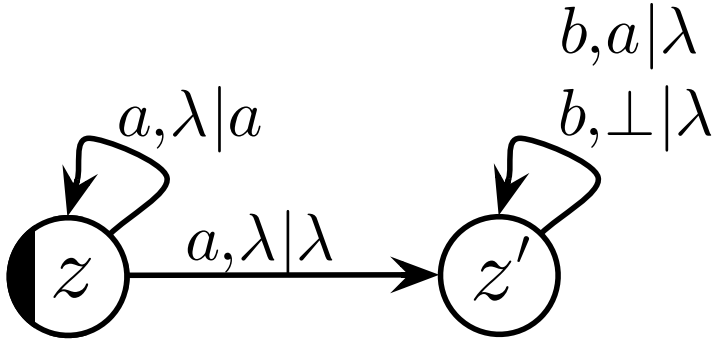
- **Wichtige Notation:** Der Kellerinhalt wird durch ein Wort $v \in \Gamma^*$ so beschrieben, dass das oberste Zeichen des Kellerinhaltes in v ganz am Anfang, d.h. links, steht.
- **Beispiel:** $abab\bot$ bedeutet, dass a das oberste und $\bot$ das unterste Zeichen im Keller ist.
- Zunächst eine weitere **Notation:** Zustandsüberführungen werden als beschriftete Kanten gezeichnet. Für $(z_1, u, v, w, z_2) \in K$:



Beispiel

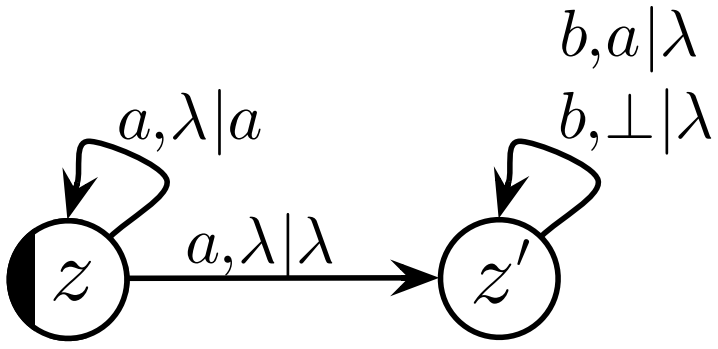


Beispiel



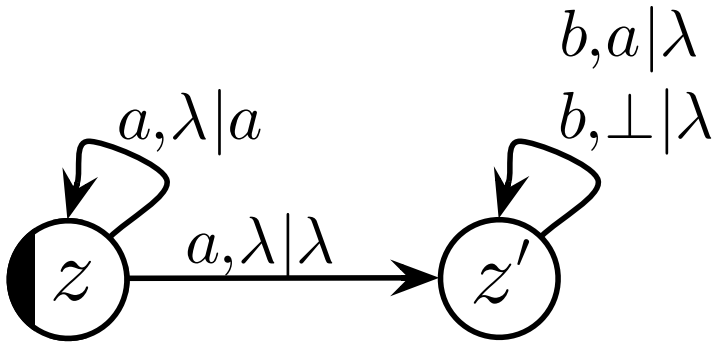
- **Offensichtliche Frage:**

Beispiel



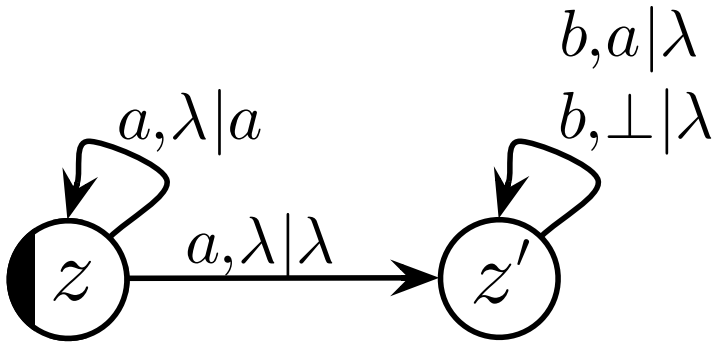
- **Offensichtliche Frage:**
  - Was ist die akzeptierte Sprache eines PDA?

Beispiel



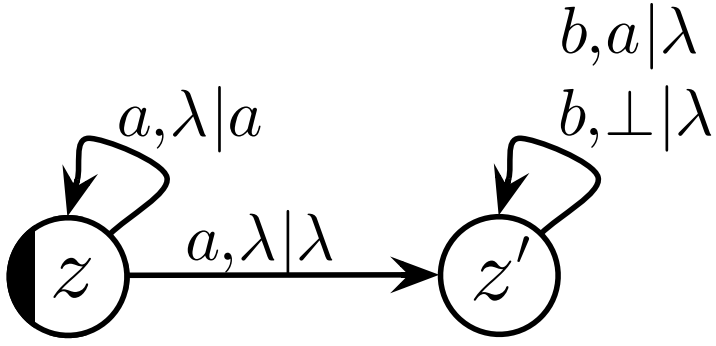
- **Offensichtliche Frage:**
  - Was ist die akzeptierte Sprache eines PDA?
  - . . . dazu benötigen wir folgende Begriffe:

Beispiel



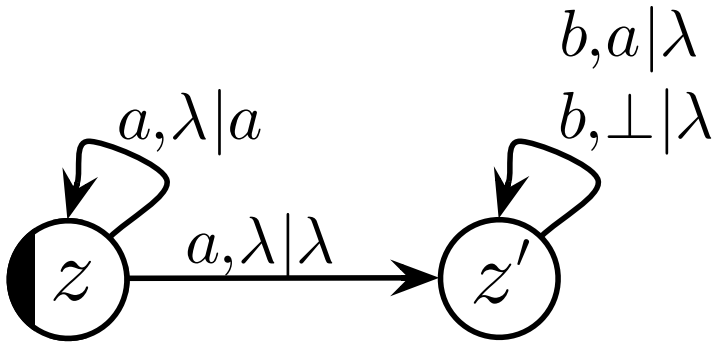
- **Offensichtliche Frage:**
  - Was ist die akzeptierte Sprache eines PDA?
  - . . . dazu benötigen wir folgende Begriffe:
    - Rechnung/Erfolgsrechnung eines PDA

Beispiel



- **Offensichtliche Frage:**
  - Was ist die akzeptierte Sprache eines PDA?
  - ...dazu benötigen wir folgende Begriffe:
    - Rechnung/Erfolgsrechnung eines PDA
    - Konfiguration eines PDA

Beispiel



- **Offensichtliche Frage:**
  - Was ist die akzeptierte Sprache eines PDA?
  - ...dazu benötigen wir folgende Begriffe:
    - Rechnung/Erfolgsrechnung eines PDA
    - Konfiguration eines PDA
    - Überführungs- oder Transitionsrelation eines PDA

Konfiguration

- Als **Konfiguration** wird im Allgemeinen eine vollständige Beschreibung eines bestimmten Systems bezeichnet.

Konfiguration

- Als **Konfiguration** wird im Allgemeinen eine vollständige Beschreibung eines bestimmten Systems bezeichnet.
- Dabei zu beachten: Konfigurationen

Konfiguration

- Als **Konfiguration** wird im Allgemeinen eine vollständige Beschreibung eines bestimmten Systems bezeichnet.
- Dabei zu beachten: Konfigurationen
  - sind **relativ** zu einer festen Struktur.

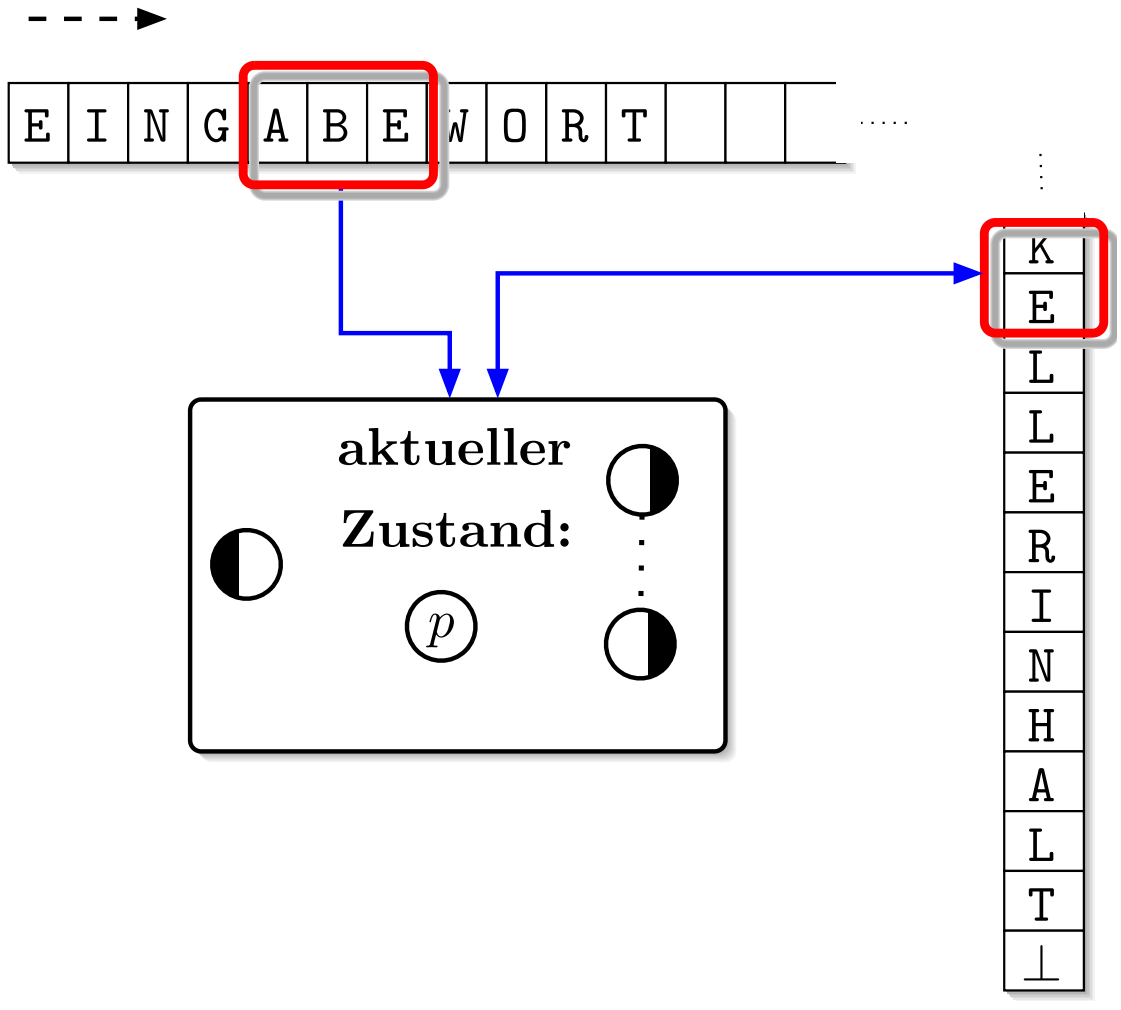
Konfiguration

- Als **Konfiguration** wird im Allgemeinen eine vollständige Beschreibung eines bestimmten Systems bezeichnet.
- Dabei zu beachten: Konfigurationen
  - sind **relativ** zu einer festen Struktur.
  - beinhalten eine Beschreibung des **Speicherinhaltes** und des **Systemzustands**

Konfiguration

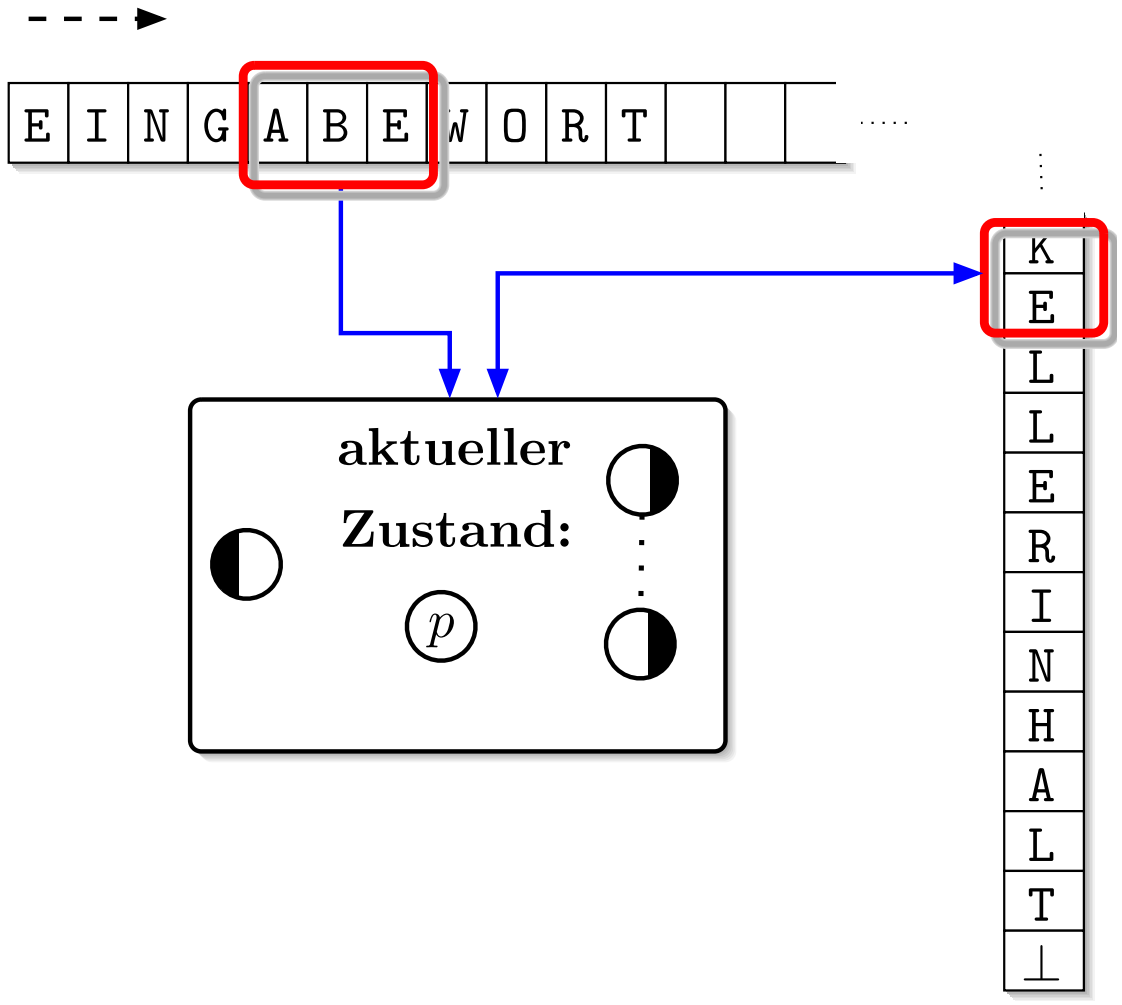
- Als **Konfiguration** wird im Allgemeinen eine vollständige Beschreibung eines bestimmten Systems bezeichnet.
- Dabei zu beachten: Konfigurationen
  - sind **relativ** zu einer festen Struktur.
  - beinhalten eine Beschreibung des **Speicherinhaltes** und des **Systemzustands**
- **Definition:**
  Eine **Konfiguration** (*instantaneous description, ID*) des PDA $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\mathsf{start}}, Z_{\mathsf{end}}, \perp)$ wird notiert als Element $k \in \Gamma^* \times Z \times \Sigma^*$.

Beispiel: Konfigurationen



- Ein PDA ...

Beispiel: Konfigurationen



- Ein PDA ...
- ...und seine aktuelle Konfiguration: KELLERINHALT$\perp p$ABEWORT

Überführungsrelation

- **Definition:** Seien $u, u', v \in \Gamma^*$, $w, w' \in \Sigma^*$ und $z, z' \in Z$.
  Zwischen Konfigurationen eines Kellerautomaten A wird die **Überführungsrelation** (Rechenschritt-, Transitionsrelation) $\vdash \subseteq \Gamma^* \cdot Z \cdot \Sigma^* \times \Gamma^* \cdot Z \cdot \Sigma^*$ definiert durch:

$$uvzww' \vdash u'vz'w' \text{ gdw. } \exists (z, w, u, u', z') \in K$$

Überführungsrelation

- **Definition:** Seien $u, u', v \in \Gamma^*$, $w, w' \in \Sigma^*$ und $z, z' \in Z$.
  Zwischen Konfigurationen eines Kellerautomaten A wird die **Überführungsrelation** (Rechenschritt-, Transitionsrelation) $\vdash \subseteq \Gamma^* \cdot Z \cdot \Sigma^* \times \Gamma^* \cdot Z \cdot \Sigma^*$ definiert durch:

  $$uvzww' \vdash u'vz'w' \text{ gdw. } \exists (z, w, u, u', z') \in K$$

- Wie üblich bezeichnet $\vdash^*$ die reflexive, transitive Hülle von $\vdash$ und wir schreiben $\vdash_A$, wenn andernfalls unklar ist, zu welchem PDA diese Überführungsrelation gehört.

Akzeptierungsbedingungen

- Verwendet werden i.A. Bedingungen an die Konfiguration eines Automaten.

Akzeptierungsbedingungen

- Verwendet werden i.A. Bedingungen an die Konfiguration eines Automaten.
- **Zur Erinnerung:** Bei **endlichen Automaten** musste ein *Wort bis zum Ende gelesen* werden und damit ein *Endzustand* erreicht werden. Z.B. für einen DFA:

$$\delta(z_0, w) = z \text{ mit } z \in Z_{\text{end}}$$

Akzeptierungsbedingungen

- Verwendet werden i.A. Bedingungen an die Konfiguration eines Automaten.
- **Zur Erinnerung:** Bei **endlichen Automaten** musste ein *Wort bis zum Ende gelesen* werden und damit ein *Endzustand* erreicht werden. Z.B. für einen DFA:

$$\delta(z_0, w) = z \text{ mit } z \in Z_{\text{end}}$$

- Beim **Kellerautomaten** haben wir zwei Möglichkeiten:

Akzeptierungsbedingungen

- Verwendet werden i.A. Bedingungen an die Konfiguration eines Automaten.
- **Zur Erinnerung:** Bei **endlichen Automaten** musste ein *Wort bis zum Ende gelesen* werden und damit ein *Endzustand* erreicht werden. Z.B. für einen DFA:

$$\delta(z_0, w) = z \text{ mit } z \in Z_{\text{end}}$$

- Beim **Kellerautomaten** haben wir zwei Möglichkeiten:
  - Zustand der Steuerungskomponente

Akzeptierungsbedingungen

- Verwendet werden i.A. Bedingungen an die Konfiguration eines Automaten.
- **Zur Erinnerung:** Bei **endlichen Automaten** musste ein *Wort bis zum Ende gelesen* werden und damit ein *Endzustand* erreicht werden. Z.B. für einen DFA:

$$\delta(z_0, w) = z \text{ mit } z \in Z_{\text{end}}$$

- Beim **Kellerautomaten** haben wir zwei Möglichkeiten:
  - Zustand der Steuerungskomponente
  - Speicherzustand

Akzeptierungsbedingungen

- Verwendet werden i.A. Bedingungen an die Konfiguration eines Automaten.
- **Zur Erinnerung:** Bei **endlichen Automaten** musste ein *Wort bis zum Ende gelesen* werden und damit ein *Endzustand* erreicht werden. Z.B. für einen DFA:

$$\delta(z_0, w) = z \text{ mit } z \in Z_{\text{end}}$$

- Beim **Kellerautomaten** haben wir zwei Möglichkeiten:
  - Zustand der Steuerungskomponente
  - Speicherzustand
- Dies führt zur **Akzeptierung mit Endzustand** und zur **Akzeptierung mit leerem Keller**.

$L(A)$ für Kellerautomaten

- **Definition:** Die vom nichtdeterministischen PDA $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\mathsf{start}}, Z_{\mathsf{end}}, \bot)$ **mit Endzustand akzeptierte Sprache** $L(A)$ ist

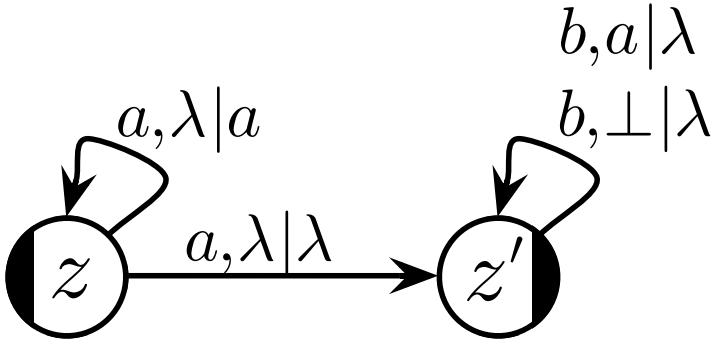
$$L(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists z_0 \in Z_{\mathsf{start}} : \exists z_e \in Z_{\mathsf{end}} : \exists v \in \Gamma^* : \bot z_0 w \vdash^* v z_e\}$$

$L(A)$ für Kellerautomaten

- **Definition:** Die vom nichtdeterministischen PDA $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ **mit Endzustand akzeptierte Sprache** $L(A)$ ist

$$L(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists z_0 \in Z_{\text{start}} : \exists z_e \in Z_{\text{end}} : \exists v \in \Gamma^* : \perp z_0 w \vdash^* v z_e\}$$

- **Beispiel:**

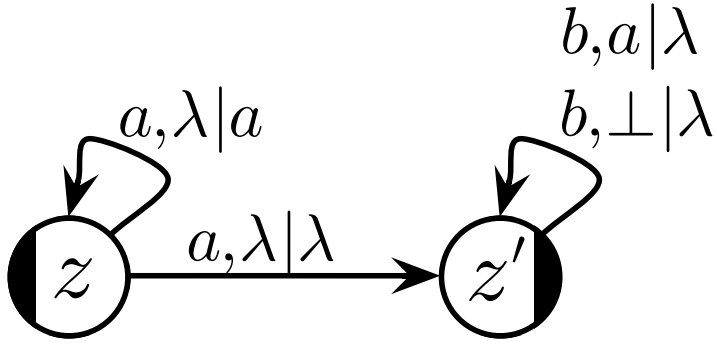


$L(A)$ für Kellerautomaten

- **Definition:** Die vom nichtdeterministischen PDA $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ **mit Endzustand akzeptierte Sprache** $L(A)$ ist

$$L(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists z_0 \in Z_{\text{start}} : \exists z_e \in Z_{\text{end}} : \exists v \in \Gamma^* : \perp z_0 w \vdash^* v z_e\}$$

- **Beispiel:**



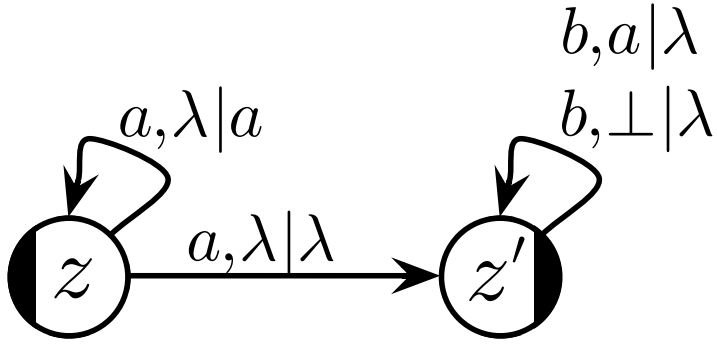
$$L(A) = \{a^n b^m \mid n, m \in I\!N \wedge n \geq 1 \wedge n \geq m\}$$

$L(A)$ für Kellerautomaten

- **Definition:** Die vom nichtdeterministischen PDA $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ **mit Endzustand akzeptierte Sprache** $L(A)$ ist

$$L(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists z_0 \in Z_{\text{start}} : \exists z_e \in Z_{\text{end}} : \exists v \in \Gamma^* : \perp z_0 w \vdash^* v z_e\}$$

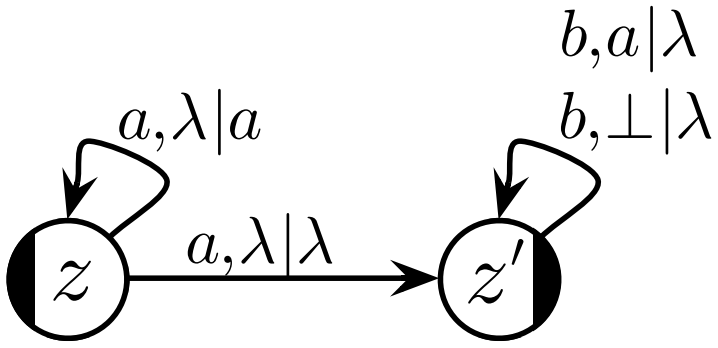
- **Beispiel:**



$$L(A) = \{a^n b^m \mid n, m \in I\!N \wedge n \geq 1 \wedge n \geq m\}$$

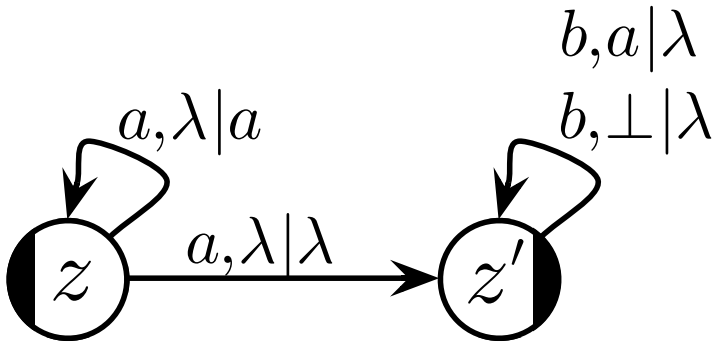
. . . für jedes gelesene b muss vorher ein a gelesen worden sein!

Beispielrechnungen



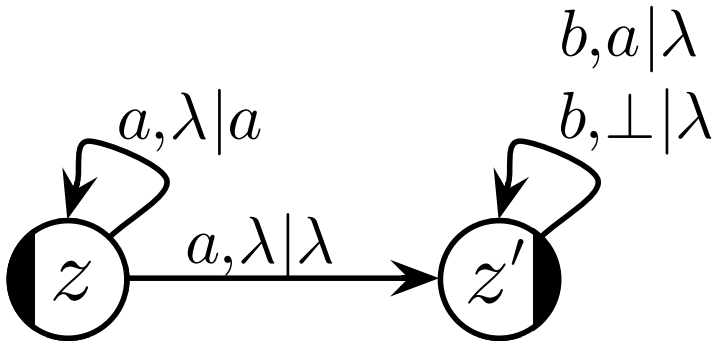
- $\perp \mathbf{z} aaabb$

Beispielrechnungen



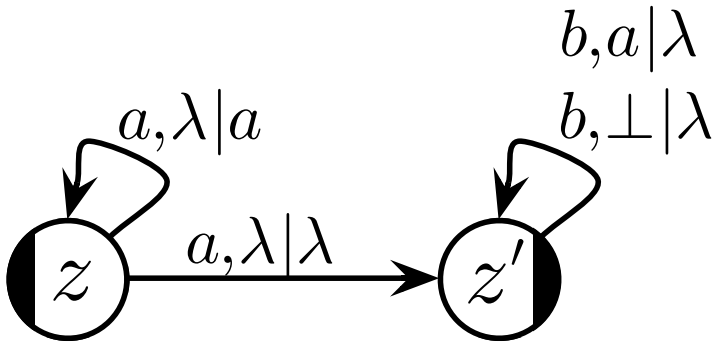
- $\perp \mathbf{z} aaabb$ ist Startkonfiguration.

Beispielrechnungen



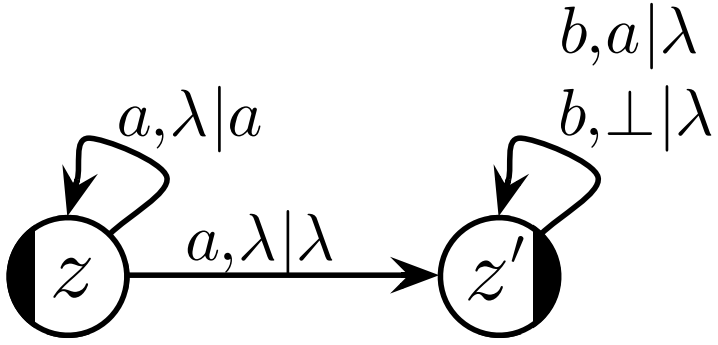
- $\perp \mathbf{z} aaabb \vdash a \perp \mathbf{z} aabb$

Beispielrechnungen



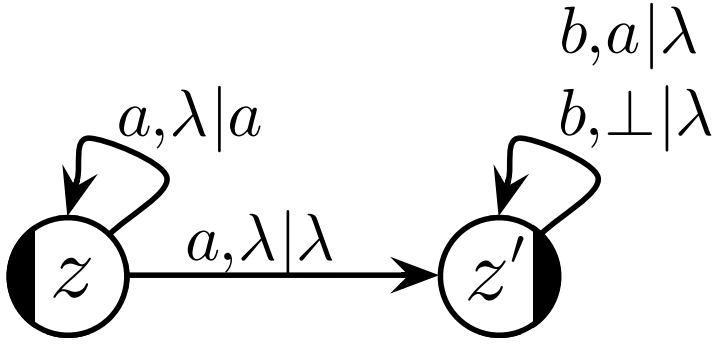
- $\perp \mathbf{z} aaabb \vdash a \perp \mathbf{z} aabb \vdash aa \perp \mathbf{z} abb$

Beispielrechnungen



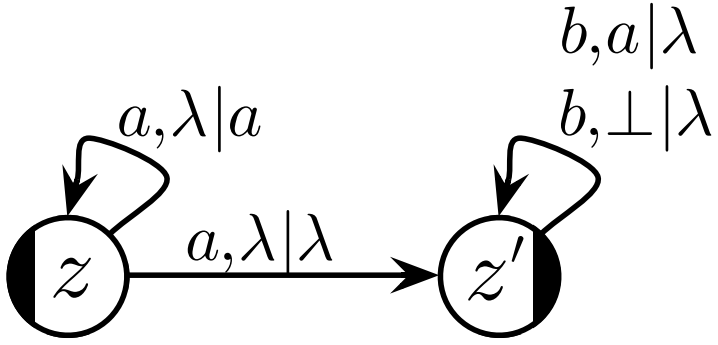
- $\bot\mathbf{z}aaabb \vdash a\bot\mathbf{z}aabb \vdash aa\bot\mathbf{z}abb \vdash aaa\bot\mathbf{z}bb$

Beispielrechnungen



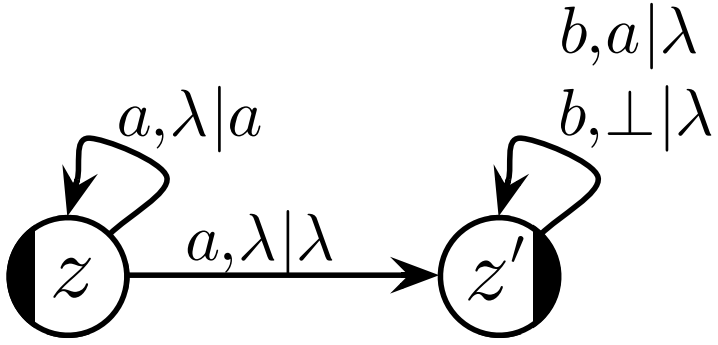
- $\perp \mathbf{z} aaabb \vdash a \perp \mathbf{z} aabb \vdash aa \perp \mathbf{z} abb$
  $\vdash aaa \perp \mathbf{z} bb$ und hier blockiert der PDA.

Beispielrechnungen



- $\perp \mathbf{z} aaabb \vdash a \perp \mathbf{z} aabb \vdash aa \perp \mathbf{z} abb$
  $\vdash aaa \perp \mathbf{z} bb$ und hier blockiert der PDA.
- Eine weitere Rechnung für $aaabb$:
  $\perp \mathbf{z} aaabb \vdash a \perp \mathbf{z} aabb \vdash aa \perp \mathbf{z} abb \vdash$
  $aa \perp \mathbf{z}' bb \vdash a \perp \mathbf{z}' b \vdash \perp \mathbf{z}'$

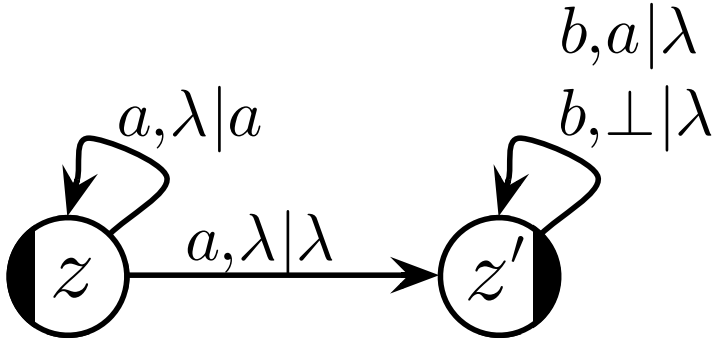
Beispielrechnungen



- $\perp \mathbf{z} aaabb \vdash a \perp \mathbf{z} aabb \vdash aa \perp \mathbf{z} abb$
  $\vdash aaa \perp \mathbf{z} bb$ und hier blockiert der PDA.
- Eine weitere Rechnung für $aaabb$:
  $\perp \mathbf{z} aaabb \vdash a \perp \mathbf{z} aabb \vdash aa \perp \mathbf{z} abb \vdash$
  $aa \perp \mathbf{z}' bb \vdash a \perp \mathbf{z}' b \vdash \perp \mathbf{z}'$

  Zwar ist der Keller *nicht* leer (er enthält noch $\perp$),
  aber es ist ein Endzustand erreicht $\Rightarrow$ akzeptieren!

Beispielrechnungen



- $\perp \mathbf{z} aaabb \vdash a \perp \mathbf{z} aabb \vdash aa \perp \mathbf{z} abb$
  $\vdash aaa \perp \mathbf{z} bb$ und hier blockiert der PDA.
- Eine weitere Rechnung für $aaabb$:
  $\perp \mathbf{z} aaabb \vdash a \perp \mathbf{z} aabb \vdash aa \perp \mathbf{z} abb \vdash$
  $aa \perp \mathbf{z}' bb \vdash a \perp \mathbf{z}' b \vdash \perp \mathbf{z}'$

  Zwar ist der Keller *nicht* leer (er enthält noch $\perp$),
  aber es ist ein Endzustand erreicht $\Rightarrow$ akzeptieren!
- Für $aabbb$ existiert *keine* Erfolgsrechnung.

$N(A)$ für Kellerautomaten

- **Definition:** Die vom nichtdeterministischen PDA A **mit leerem Keller akzeptierte Sprache** $N(A)$ ist

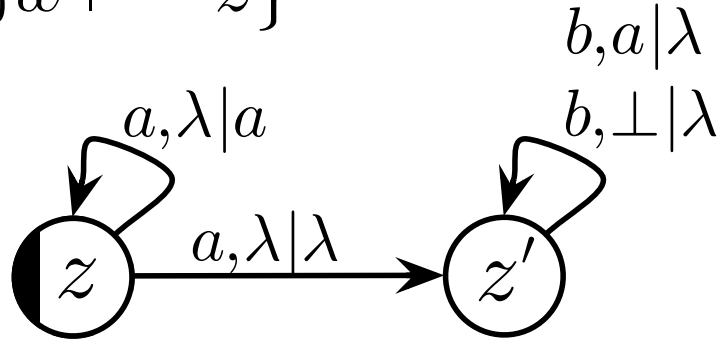
$$N(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists z_0 \in Z_{\text{start}} : \exists z \in Z : \perp z_0 w \vdash^* z\}$$

$N(A)$ für Kellerautomaten

- **Definition:** Die vom nichtdeterministischen PDA A **mit leerem Keller akzeptierte Sprache** $N(A)$ ist

$$N(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists z_0 \in Z_{\text{start}} : \exists z \in Z : \perp z_0 w \vdash^* z\}$$

- **Beispiel:**

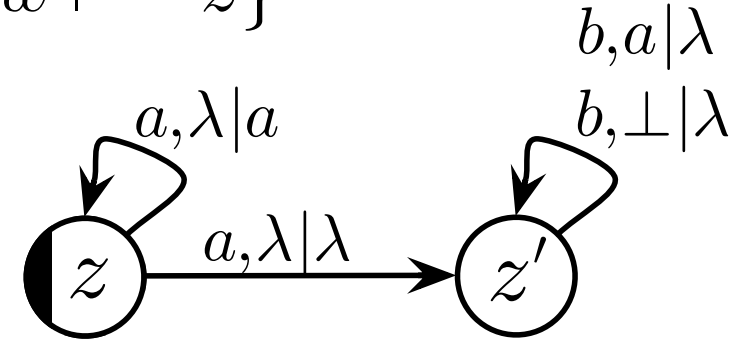


$N(A)$ für Kellerautomaten

- **Definition:** Die vom nichtdeterministischen PDA A **mit leerem Keller akzeptierte Sprache** $N(A)$ ist

$$N(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists z_0 \in Z_{\text{start}} : \exists z \in Z : \perp z_0 w \vdash^* z\}$$

- **Beispiel:**

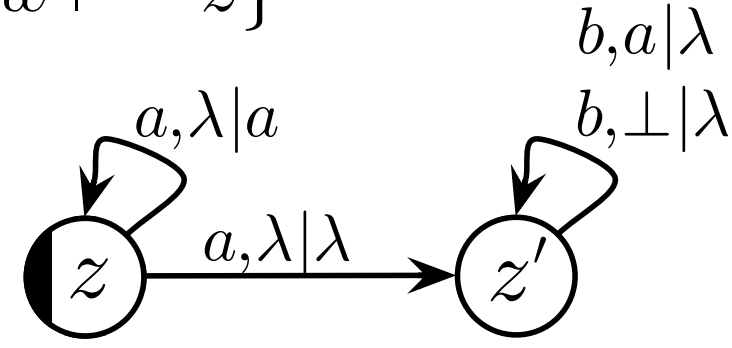


- $N(A) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

$N(A)$ für Kellerautomaten

- **Definition:** Die vom nichtdeterministischen PDA A **mit leerem Keller akzeptierte Sprache** $N(A)$ ist

$$N(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists z_0 \in Z_{\text{start}} : \exists z \in Z : \perp z_0 w \vdash^* z\}$$



- **Beispiel:**
- $N(A) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$
- ...für jedes gelesene b muss vorher ein a gelesen worden sein und für jedes a muss später ein b folgen!

Äquivalenzbegriff

- **Definition:** Zwei Kellerautomaten A und B heißen **äquivalent** genau dann, wenn ihre mit Endzustand akzeptierten Sprachen gleich sind, d.h $L(A) = L(B)$ gilt.

Äquivalenzbegriff

- **Definition:** Zwei Kellerautomaten A und B heißen **äquivalent** genau dann, wenn ihre mit Endzustand akzeptierten Sprachen gleich sind, d.h $L(A) = L(B)$ gilt.
- **Merke:** Dieser Äquivalenzbegriff vergleicht nur PDAs, die im Endzustand akzeptieren!

Äquivalenzbegriff

- **Definition:** Zwei Kellerautomaten A und B heißen **äquivalent** genau dann, wenn ihre mit Endzustand akzeptierten Sprachen gleich sind, d.h $L(A) = L(B)$ gilt.
- **Merke:** Dieser Äquivalenzbegriff vergleicht nur PDAs, die im Endzustand akzeptieren!
- Eine Verallgemeinerung wäre aber natürlich möglich:

Äquivalenzbegriff

- **Definition:** Zwei Kellerautomaten A und B heißen **äquivalent** genau dann, wenn ihre mit Endzustand akzeptierten Sprachen gleich sind, d.h $L(A) = L(B)$ gilt.
- **Merke:** Dieser Äquivalenzbegriff vergleicht nur PDAs, die im Endzustand akzeptieren!
- Eine Verallgemeinerung wäre aber natürlich möglich:
  - bezüglich der mit leerem Keller akzeptierten Sprachen $(N(A) = N(B))$

Äquivalenzbegriff

- **Definition:** Zwei Kellerautomaten A und B heißen **äquivalent** genau dann, wenn ihre mit Endzustand akzeptierten Sprachen gleich sind, d.h $L(A) = L(B)$ gilt.
- **Merke:** Dieser Äquivalenzbegriff vergleicht nur PDAs, die im Endzustand akzeptieren!
- Eine Verallgemeinerung wäre aber natürlich möglich:
  - bezüglich der mit leerem Keller akzeptierten Sprachen $(N(A) = N(B))$
  - „interdisziplinär“ $(L(A) = N(B))$

Eigenschaften von PDAs

- Ein Kellerautomat $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\mathsf{start}}, Z_{\mathsf{end}}, \perp)$ heißt

Eigenschaften von PDAs

- Ein Kellerautomat $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ heißt
  - **fast-buchstabierend** genau dann, wenn $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma^* \times Z$ gilt.

Eigenschaften von PDAs

- Ein Kellerautomat $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ heißt
  - **fast-buchstabierend** genau dann, wenn $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma^* \times Z$ gilt.
  - **buchstabierend** genau dann, wenn $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Z$ gilt.

Eigenschaften von PDAs

- Ein Kellerautomat $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ heißt
  - **fast-buchstabierend** genau dann, wenn $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma^* \times Z$ gilt.
  - **buchstabierend** genau dann, wenn $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Z$ gilt.
  - **deterministisch**, (Abk.: DPDA) genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Eigenschaften von PDAs

- Ein Kellerautomat $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ heißt
  - **fast-buchstabierend** genau dann, wenn $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma^* \times Z$ gilt.
  - **buchstabierend** genau dann, wenn $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Z$ gilt.
  - **deterministisch**, (Abk.: DPDA) genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
    1. $|Z_{\text{start}}| = 1$

Eigenschaften von PDAs

- Ein Kellerautomat $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ heißt
  - **fast-buchstabierend** genau dann, wenn
    $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma^* \times Z$ gilt.
  - **buchstabierend** genau dann, wenn
    $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Z$ gilt.
  - **deterministisch**, (Abk.: DPDA) genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
    1. $|Z_{\text{start}}| = 1$
    2. A ist buchstabierend, d.h.
       $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Z$

Eigenschaften von PDAs

- Ein Kellerautomat $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \bot)$ heißt
  - **fast-buchstabierend** genau dann, wenn $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma^* \times Z$ gilt.
  - **buchstabierend** genau dann, wenn $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Z$ gilt.
  - **deterministisch**, (Abk.: DPDA) genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
    1. $|Z_{\text{start}}| = 1$
    2. A ist buchstabierend, d.h. $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Z$
    3. Zu jedem $(z, x, X) \in Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma$ gibt es max. ein $(w, z') \in \Gamma^* \times Z$ mit $(z, x, X, w, z') \in K$.

Eigenschaften von PDAs

- Ein Kellerautomat $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \bot)$ heißt
  - **fast-buchstabierend** genau dann, wenn $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma^* \times Z$ gilt.
  - **buchstabierend** genau dann, wenn $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Z$ gilt.
  - **deterministisch**, (Abk.: DPDA) genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
    1. $|Z_{\text{start}}| = 1$
    2. A ist buchstabierend, d.h. $K \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Z$
    3. Zu jedem $(z, x, X) \in Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma$ gibt es max. ein $(w, z') \in \Gamma^* \times Z$ mit $(z, x, X, w, z') \in K$.
    4. Falls $(z, \lambda, X, w, z') \in K$ ist, so gilt $\forall x \in \Sigma$: $\forall z'' \in Z : (z, x, X, w', z'') \notin K$.

Konstruktionen auf PDAs

- **Theorem:** Es existiert zu jedem PDA $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ ein äquivalenter fast-buchstabierender PDA $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$.

Konstruktionen auf PDAs

- **Theorem:** Es existiert zu jedem PDA $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ ein äquivalenter fast-buchstabierender PDA $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$.
- **Beweisidee:** Konstruktion eines äquivalenten PDA, der je Schritt max. ein Eingabesymbol liest.

Konstruktionen auf PDAs

- **Theorem:** Es existiert zu jedem PDA $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ ein äquivalenter fast-buchstabierender PDA $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$.
- **Beweisidee:** Konstruktion eines äquivalenten PDA, der je Schritt max. ein Eingabesymbol liest.
  - Speichern der jeweils gelesenen Symbolkette in einem neuen Zustand:
    $Z'' := Z \cup \{[z, u'] \mid (z, u, v, w, z') \in K \ \wedge u' \in \Sigma^*$ ist echter Präfix von u mit $|u'| \geq 1\}$

Konstruktionen auf PDAs

- **Theorem:** Es existiert zu jedem PDA $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ ein äquivalenter fast-buchstabierender PDA $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$.
- **Beweisidee:** Konstruktion eines äquivalenten PDA, der je Schritt max. ein Eingabesymbol liest.
  - Speichern der jeweils gelesenen Symbolkette in einem neuen Zustand:
    $Z'' := Z \cup \{[z, u'] \mid (z, u, v, w, z') \in K \ \wedge u' \in \Sigma^*$ ist echter Präfix von u mit $|u'| \geq 1\}$
  - Für Kante $k = (z, u_1 u_2 \ldots u_n, v, w, z') \in K$ neu:
    $(z, u_1, v, \lambda, [z', u_1]), ([z', u_1], u_2, \lambda, \lambda, [z', u_1 u_2]),$
    $\ldots, ([z', u_1 \ldots u_{n-1}], u_n, \lambda, w, z')$

CFG vs. PDA

- **Theorem:** Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V_N, V_T, P, S)$ kann effektiv ein Kellerautomat $A_G := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\mathsf{start}}, Z_{\mathsf{end}}, \bot)$ konstruiert werden, für den $N(A_G) = L(A_G) = L(G)$ gilt.

CFG vs. PDA

- **Theorem:** Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V_N, V_T, P, S)$ kann effektiv ein Kellerautomat $A_G := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\mathsf{start}}, Z_{\mathsf{end}}, \perp)$ konstruiert werden, für den $N(A_G) = L(A_G) = L(G)$ gilt.
- **Beweis:** Sei $G = (V_N, V_T, P, S)$ eine CFG.

CFG vs. PDA

- **Theorem:** Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V_N, V_T, P, S)$ kann effektiv ein Kellerautomat $A_G := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ konstruiert werden, für den $N(A_G) = L(A_G) = L(G)$ gilt.
- **Beweis:** Sei $G = (V_N, V_T, P, S)$ eine CFG.
- Konstruiere $A_G := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ mit drei Zuständen: $Z := \{z_0, z_1, z_2\}$

CFG vs. PDA

- **Theorem:** Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V_N, V_T, P, S)$ kann effektiv ein Kellerautomat $A_G := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\mathsf{start}}, Z_{\mathsf{end}}, \perp)$ konstruiert werden, für den $N(A_G) = L(A_G) = L(G)$ gilt.
- **Beweis:** Sei $G = (V_N, V_T, P, S)$ eine CFG.
- Konstruiere $A_G := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\mathsf{start}}, Z_{\mathsf{end}}, \perp)$ mit drei Zuständen: $Z := \{z_0, z_1, z_2\}$
- $\Sigma := V_T$

CFG vs. PDA

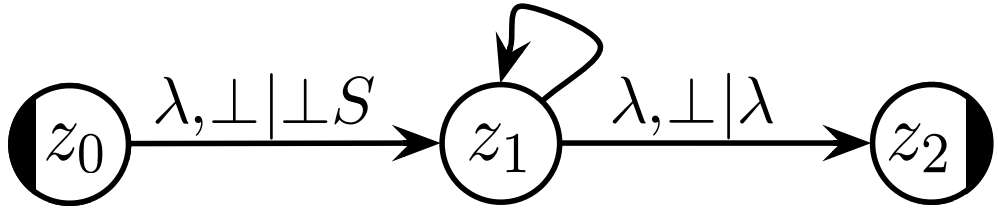
- **Theorem:** Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V_N, V_T, P, S)$ kann effektiv ein Kellerautomat $A_G := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ konstruiert werden, für den $N(A_G) = L(A_G) = L(G)$ gilt.
- **Beweis:** Sei $G = (V_N, V_T, P, S)$ eine CFG.
- Konstruiere $A_G := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ mit drei Zuständen: $Z := \{z_0, z_1, z_2\}$
- $\Sigma := V_T$
- $\Gamma := V_N \cup V_T \cup \{\perp\}$

CFG vs. PDA

- **Theorem:** Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V_N, V_T, P, S)$ kann effektiv ein Kellerautomat $A_G := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ konstruiert werden, für den $N(A_G) = L(A_G) = L(G)$ gilt.
- **Beweis:** Sei $G = (V_N, V_T, P, S)$ eine CFG.
- Konstruiere $A_G := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ mit drei Zuständen: $Z := \{z_0, z_1, z_2\}$
- $\Sigma := V_T$
- $\Gamma := V_N \cup V_T \cup \{\perp\}$
- und Kanten:

$$\lambda, A \mid w \text{ für alle } A \longrightarrow w \in P$$

$$a, a \mid \lambda \text{ für jedes } a \in V_T$$



$L(A)$ vs. $N(A)$

- **Lemma:** Es existiert zu jedem PDA
  $A := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ ein PDA
  $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ mit $L(A) = N(B)$.

$L(A)$ vs. $N(A)$

- **Lemma:** Es existiert zu jedem PDA
  $A := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ ein PDA
  $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ mit $L(A) = N(B)$.
- **Beweis:** O.B.d.A. sei A fast-buchstabierend. Konstruiere
  PDA $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ mit

$L(A)$ vs. $N(A)$

- **Lemma:** Es existiert zu jedem PDA
  $A := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ ein PDA
  $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ mit $L(A) = N(B)$.
- **Beweis:** O.B.d.A. sei A fast-buchstabierend. Konstruiere
  PDA $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ mit
  - neuem Kellersymbol \$, also $\Gamma' := \Gamma \uplus \{\$\}$;

$L(A)$ vs. $N(A)$

- **Lemma:** Es existiert zu jedem PDA
  $A := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ ein PDA
  $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ mit $L(A) = N(B)$.
- **Beweis:** O.B.d.A. sei A fast-buchstabierend. Konstruiere PDA $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ mit
  - neuem Kellersymbol \$, also $\Gamma' := \Gamma \uplus \{\$\}$;
  - neuen Zuständen $Z' := Z \uplus \{z_{\text{begin}}, z_{\text{empty}}\}$

$L(A)$ vs. $N(A)$

- **Lemma:** Es existiert zu jedem PDA
  $A := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ ein PDA
  $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ mit $L(A) = N(B)$.
- **Beweis:** O.B.d.A. sei A fast-buchstabierend. Konstruiere
  PDA $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ mit
  - neuem Kellersymbol \$, also $\Gamma' := \Gamma \uplus \{\$\}$;
  - neuen Zuständen $Z' := Z \uplus \{z_{\text{begin}}, z_{\text{empty}}\}$
  - $K_1 := \{(z_{\text{begin}}, \lambda, \perp, \perp\$, z) \mid z \in Z_{\text{start}}\}$ „Initialisieren“

$L(A)$ vs. $N(A)$

- **Lemma:** Es existiert zu jedem PDA
  $A := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$ ein PDA
  $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ mit $L(A) = N(B)$.
- **Beweis:** O.B.d.A. sei A fast-buchstabierend. Konstruiere PDA $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ mit
  - neuem Kellersymbol \$, also $\Gamma' := \Gamma \uplus \{\$\}$;
  - neuen Zuständen $Z' := Z \uplus \{z_{\text{begin}}, z_{\text{empty}}\}$
  - $K_1 := \{(z_{\text{begin}}, \lambda, \perp, \perp\$, z) \mid z \in Z_{\text{start}}\}$ „Initialisieren“
  - $K_2 := \{(z_e, \lambda, \lambda, \lambda, z_{\text{empty}}) \mid z_e \in Z_{\text{end}}\}$ „Übergänge zum den Keller leerenden Zustand z_{empty}“

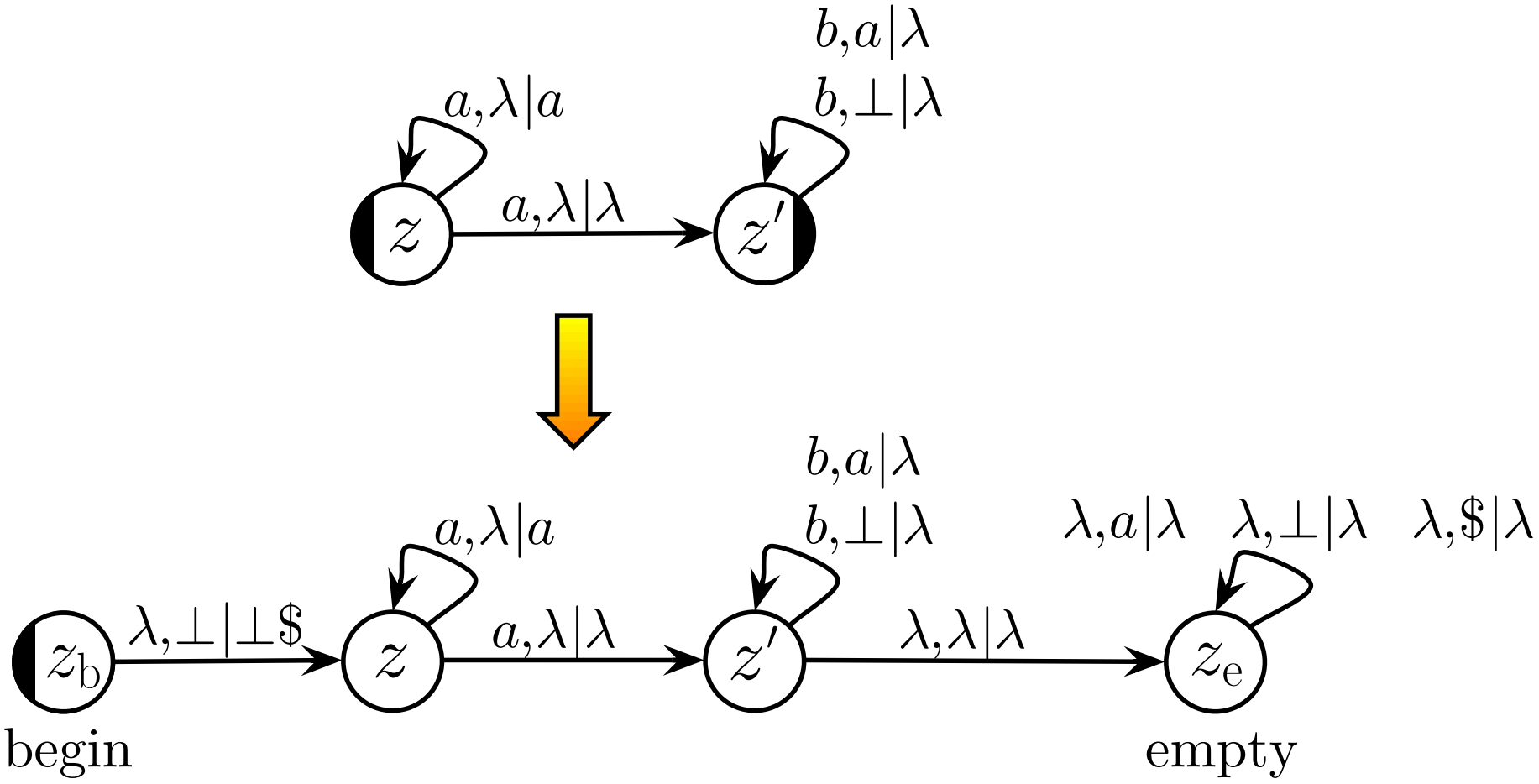
$L(A)$ vs. $N(A)$

- **Lemma:** Es existiert zu jedem PDA
  $A := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \bot)$ ein PDA
  $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \bot)$ mit $L(A) = N(B)$.
- **Beweis:** O.B.d.A. sei A fast-buchstabierend. Konstruiere PDA $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \bot)$ mit
  - neuem Kellersymbol \$, also $\Gamma' := \Gamma \uplus \{\$\}$;
  - neuen Zuständen $Z' := Z \uplus \{z_{\text{begin}}, z_{\text{empty}}\}$
  - $K_1 := \{(z_{\text{begin}}, \lambda, \bot, \bot\$, z) \mid z \in Z_{\text{start}}\}$ „Initialisieren“
  - $K_2 := \{(z_e, \lambda, \lambda, \lambda, z_{\text{empty}}) \mid z_e \in Z_{\text{end}}\}$ „Übergänge zum den Keller leerenden Zustand z_{empty}“
  - $K_3 := \{(z_{\text{empty}}, \lambda, a, \lambda, z_{\text{empty}}) \mid a \in \Gamma'\}$ „Leeren“

$L(A)$ vs. $N(A)$

- **Lemma:** Es existiert zu jedem PDA
  $A := (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \bot)$ ein PDA
  $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \bot)$ mit $L(A) = N(B)$.
- **Beweis:** O.B.d.A. sei A fast-buchstabierend. Konstruiere PDA $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \bot)$ mit
  - neuem Kellersymbol \$, also $\Gamma' := \Gamma \uplus \{\$\}$;
  - neuen Zuständen $Z' := Z \uplus \{z_{\text{begin}}, z_{\text{empty}}\}$
  - $K_1 := \{(z_{\text{begin}}, \lambda, \bot, \bot\$, z) \mid z \in Z_{\text{start}}\}$ „Initialisieren“
  - $K_2 := \{(z_e, \lambda, \lambda, \lambda, z_{\text{empty}}) \mid z_e \in Z_{\text{end}}\}$ „Übergänge zum den Keller leerenden Zustand z_{empty}“
  - $K_3 := \{(z_{\text{empty}}, \lambda, a, \lambda, z_{\text{empty}}) \mid a \in \Gamma'\}$ „Leeren“
  - $K' := K \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3$

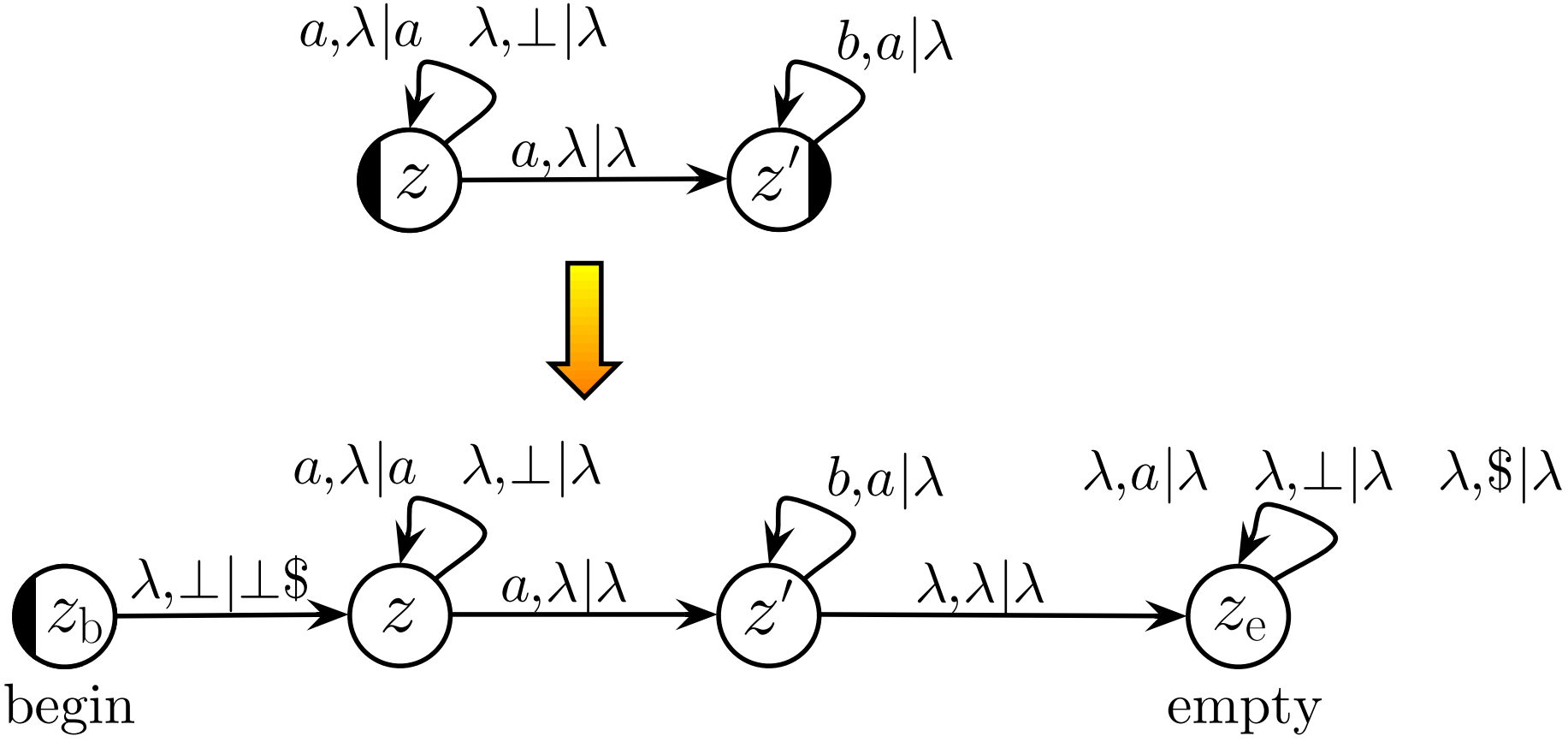
Beispiel: $L(A) = N(B)$



. . . aber warum wird das \$ neu eingeführt?

Beispiel: $L(A) = N(B)$

Ein etwas modifizierter Automat:



. . . ohne das neue Bodensymbol würde auch das leere Wort λ akzeptiert!

Gilt immer $L(A) \in \mathcal{C}f$?

- **Theorem:** Für jeden PDA A ist $L(A)$ eine kontextfreie Sprache.

Gilt immer $L(A) \in \mathcal{C}f$?

- **Theorem:** Für jeden PDA A ist $L(A)$ eine kontextfreie Sprache.
- **Beweisskizze:** Sei $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\mathsf{start}}, Z'_{\mathsf{end}}, \perp)$ der A existierende fast-buchstabierende PDA mit $L(A) = N(B)$.

Gilt immer $L(A) \in \mathcal{C}f$?

- **Theorem:** Für jeden PDA A ist $L(A)$ eine kontextfreie Sprache.
- **Beweisskizze:** Sei $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ der A existierende fast-buchstabierende PDA mit $L(A) = N(B)$.
  - Definiere PDA $C := (Z'', \Sigma, \Gamma'', K'', Z''_{\text{start}}, Z''_{\text{end}}, \perp)$ mit

Gilt immer $L(A) \in \mathcal{C}f$?

- **Theorem:** Für jeden PDA A ist $L(A)$ eine kontextfreie Sprache.
- **Beweisskizze:** Sei $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ der A existierende fast-buchstabierende PDA mit $L(A) = N(B)$.
  - Definiere PDA $C := (Z'', \Sigma, \Gamma'', K'', Z''_{\text{start}}, Z''_{\text{end}}, \perp)$ mit
    - $K_4 := \{(z, x, X, vX, z') \mid X \in \Gamma'\} \subseteq K''$ falls $(z, x, \lambda, v, z') \in K'$ mit $x \in \Sigma \cup \{\lambda\}$

Gilt immer $L(A) \in \mathcal{C}f$?

- **Theorem:** Für jeden PDA A ist $L(A)$ eine kontextfreie Sprache.
- **Beweisskizze:** Sei $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \perp)$ der A existierende fast-buchstabierende PDA mit $L(A) = N(B)$.
  - Definiere PDA $C := (Z'', \Sigma, \Gamma'', K'', Z''_{\text{start}}, Z''_{\text{end}}, \perp)$ mit
    - $K_4 := \{(z, x, X, vX, z') \mid X \in \Gamma'\} \subseteq K''$ falls $(z, x, \lambda, v, z') \in K'$ mit $x \in \Sigma \cup \{\lambda\}$
    - Insgesamt: $K'' := K' \setminus \{(z, x, \lambda, v, z') \in K' \mid x \in \Sigma \cup \{\lambda\}\} \cup K_4$

Gilt immer $L(A) \in \mathcal{C}f$?

- **Theorem:** Für jeden PDA A ist $L(A)$ eine kontextfreie Sprache.
- **Beweisskizze:** Sei $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \bot)$ der A existierende fast-buchstabierende PDA mit $L(A) = N(B)$.
  - Definiere PDA $C := (Z'', \Sigma, \Gamma'', K'', Z''_{\text{start}}, Z''_{\text{end}}, \bot)$ mit
    - $K_4 := \{(z, x, X, vX, z') \mid X \in \Gamma'\} \subseteq K''$ falls $(z, x, \lambda, v, z') \in K'$ mit $x \in \Sigma \cup \{\lambda\}$
    - Insgesamt: $K'' := K' \setminus \{(z, x, \lambda, v, z') \in K' \mid x \in \Sigma \cup \{\lambda\}\} \cup K_4$
    - Es gilt $N(C) = L(A)$.

Gilt immer $L(A) \in \mathcal{C}f$?

- **Theorem:** Für jeden PDA A ist $L(A)$ eine kontextfreie Sprache.
- **Beweisskizze:** Sei $B := (Z', \Sigma, \Gamma', K', Z'_{\text{start}}, Z'_{\text{end}}, \bot)$ der A existierende fast-buchstabierende PDA mit $L(A) = N(B)$.
  - Definiere PDA $C := (Z'', \Sigma, \Gamma'', K'', Z''_{\text{start}}, Z''_{\text{end}}, \bot)$ mit
    - $K_4 := \{(z, x, X, vX, z') \mid X \in \Gamma'\} \subseteq K''$ falls $(z, x, \lambda, v, z') \in K'$ mit $x \in \Sigma \cup \{\lambda\}$
    - Insgesamt: $K'' := K' \setminus \{(z, x, \lambda, v, z') \in K' \mid x \in \Sigma \cup \{\lambda\}\} \cup K_4$
    - Es gilt $N(C) = L(A)$.
    - Nun wird mittels **Tripelkonstruktion** eine CFG konstruiert, die mögliche Rechnungen des PDA C simuliert.

Tripelkonstruktion

- **Idee:** Verwendung des Nonterminalalphabets zur Codierung von Zustandsübergängen des PDA.

Tripelkonstruktion

- **Idee:** Verwendung des Nonterminalalphabets zur Codierung von Zustandsübergängen des PDA.
- Die Regeln **„raten“** eine Zustandsfolge des Kellerautomaten.

Tripelkonstruktion

- **Idee:** Verwendung des Nonterminalalphabets zur Codierung von Zustandsübergängen des PDA.
- Die Regeln **„raten“** eine Zustandsfolge des Kellerautomaten.
- Die Grammatik $G_C := (V_N, V_T, P, S)$ besteht aus:

$$
\begin{aligned}
V_N &:= \{S\} \cup \{[z, X, z'] \mid X \in \Gamma'', z, z' \in Z''\} \\
V_T &:= \Sigma \\
P &:= \{S \longrightarrow [z, \$, z'] \mid z \in Z''_{\mathsf{start}}, z' \in Z''\} \cup \\
&\quad \{[z, X, z'] \longrightarrow a \mid (z, a, X, \lambda, z') \in K'', a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \\
&\quad X \in \Gamma'', z, z' \in Z''\} \cup \\
&\quad \{[z, X, z_k] \longrightarrow a[z', B_1, z_1][z_1, B_2, z_2] \ldots [z_{k-1}, B_k, z_k] \mid \\
&\quad k \geq 1, z_i \in Z'', (z, a, X, B_1 B_2 \ldots B_k, z') \in K''\}
\end{aligned}
$$

Tripelkonstruktion

- **Idee:** Verwendung des Nonterminalalphabets zur Codierung von Zustandsübergängen des PDA.
- Die Regeln **„raten“** eine Zustandsfolge des Kellerautomaten.
- Die Grammatik $G_C := (V_N, V_T, P, S)$ besteht aus:

$$
\begin{aligned}
V_N &:= \{S\} \cup \{[z, X, z'] \mid X \in \Gamma'', z, z' \in Z''\} \\
V_T &:= \Sigma \\
P &:= \{S \longrightarrow [z, \$, z'] \mid z \in Z''_{\text{start}}, z' \in Z''\} \cup \\
&\quad \{[z, X, z'] \longrightarrow a \mid (z, a, X, \lambda, z') \in K'', a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \\
&\quad X \in \Gamma'', z, z' \in Z''\} \cup \\
&\quad \{[z, X, z_k] \longrightarrow a[z', B_1, z_1][z_1, B_2, z_2] \ldots [z_{k-1}, B_k, z_k] \mid \\
&\quad k \geq 1, z_i \in Z'', (z, a, X, B_1 B_2 \ldots B_k, z') \in K''\}
\end{aligned}
$$

- Für diese Grammatik gilt $L(G) = N(C)$.

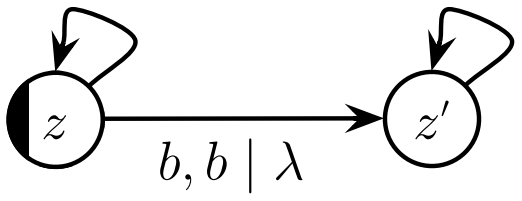
Beispiel: Tripelkonstruktion

$a, \perp \mid \$b\$$

$a, \$ \mid \$b\$$

$\lambda, \$ \mid \lambda$

$b, b \mid \lambda$ $\qquad$ $\lambda, \$ \mid \lambda$



$$V_N := \{S\} \cup \{[z_1, y, z_2] \mid z_1, z_2 \in \{z, z'\} \ \wedge \ y \in \{a, b, \perp, \$\}\}$$

$$P := \{S \longrightarrow [z, \perp, z],\ S \longrightarrow [z, \perp, z']\} \cup$$
$$\{[z, b, z] \longrightarrow b,\ [z, b, z'] \longrightarrow b\} \cup$$
$$\{[z, \$, z] \longrightarrow \lambda,\ [z', \$, z'] \longrightarrow \lambda\} \cup$$
$$\{[z, \$, z_3] \longrightarrow a[z, \$, z_1][z_1, b, z_2][z_2, \$, z_3] \mid z_1, z_2, z_3 \in \{z, z'\}\} \cup$$
$$\{[z, \perp, z_3] \longrightarrow a[z, \$, z_1][z_1, b, z_2][z_2, \$, z_3] \mid z_1, z_2, z_3 \in \{z, z'\}\}$$

Die Grammatik ist *nicht* reduziert!

($[z', b, z']$, $[z', b, z]$ und $[z', \$, z]$ sind nicht produktiv)

Die Sprachfamilie $\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Folgende Aussagen sind äquivalent:

Die Sprachfamilie $\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Folgende Aussagen sind äquivalent:
  1. $L \in \mathcal{C}f$

Die Sprachfamilie $\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Folgende Aussagen sind äquivalent:
  1. $L \in \mathcal{C}f$
  2. $L = L(A)$ für einen beliebigen PDA A

Die Sprachfamilie $\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Folgende Aussagen sind äquivalent:
  1. $L \in \mathcal{C}f$
  2. $L = L(A)$ für einen beliebigen PDA A
  3. $L = L(A)$ für einen fast-buchstabierenden PDA A

Die Sprachfamilie $\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Folgende Aussagen sind äquivalent:
  1. $L \in \mathcal{C}f$
  2. $L = L(A)$ für einen beliebigen PDA A
  3. $L = L(A)$ für einen fast-buchstabierenden PDA A
  4. $L = L(A)$ für einen buchstabierenden PDA A

Die Sprachfamilie $\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Folgende Aussagen sind äquivalent:
  1. $L \in \mathcal{C}f$
  2. $L = L(A)$ für einen beliebigen PDA A
  3. $L = L(A)$ für einen fast-buchstabierenden PDA A
  4. $L = L(A)$ für einen buchstabierenden PDA A
  5. $L = N(A)$ für einen fast-buchstabierenden PDA A

Die Sprachfamilie $\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Folgende Aussagen sind äquivalent:
  1. $L \in \mathcal{C}f$
  2. $L = L(A)$ für einen beliebigen PDA A
  3. $L = L(A)$ für einen fast-buchstabierenden PDA A
  4. $L = L(A)$ für einen buchstabierenden PDA A
  5. $L = N(A)$ für einen fast-buchstabierenden PDA A
- **Nächste Woche:** Eigenschaften deterministischer Kellerautomaten