The Boolean Hierarchy over **NP**

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

Gastvortrag im Rahmen der Vorlesung
Komplexitätstheorie
von
Prof. Dr. Matthias Jantzen
23.06.2008

Hausaufgaben zum 23.6.2008

- Findet eine Reduktion g, die `3SAT` auf `IS` in Polynomialzeit reduziert, wobei $g(\phi) = (G, m)$ ist, und

$$\phi \in \mathtt{3SAT} \implies \alpha(G) = m \tag{1}$$
$$\phi \notin \mathtt{3SAT} \implies \alpha(G) = m - 1 \tag{2}$$

  erfüllt.
- Zeigt, dass `IN-Odd` und `IN-Geq` $\mathbf{\Theta}_2$-vollständig sind.

Eine einführende Überlegung

Das Färbungsproblem für Graphen:

- $\{(G, k) \mid \chi(G) \leq k\} \in \mathbf{NP}$

Eine einführende Überlegung

Das Färbungsproblem für Graphen:

- $\{(G, k) \mid \chi(G) \leq k\} \in \mathbf{NP}$
- $\{(G, k) \mid \chi(G) \geq k\} \in \mathbf{coNP}$

Eine einführende Überlegung

Das Färbungsproblem für Graphen:

- $\{(G,k) \mid \chi(G) \leq k\} \in \mathbf{NP}$
- $\{(G,k) \mid \chi(G) \geq k\} \in \mathbf{coNP}$
- $\{(G,k) \mid \chi(G) = k\} \in \mathbf{NP} \wedge \mathbf{coNP}$

Exact, Critical, and Unique Problems

Anmerkung I

Durch solche *exakten* Varianten von **NP**-vollständigen Optimierungsproblemen motiviert, führten Papadimitriou und Yannakakis 1982 die Klasse **DP** ein.

Exact, Critical, and Unique Problems

Anmerkung I

Durch solche *exakten* Varianten von **NP**-vollständigen Optimierungsproblemen motiviert, führten Papadimitriou und Yannakakis 1982 die Klasse **DP** ein.

Anmerkung II

- Exakte Probleme $\Longrightarrow$ `Exact-`i`-Colorability`, `Exact-`i`-DNP`
- Kritische Probleme $\Longrightarrow$ `Minimal-3-Uncolorability`
- Unique Solution Problems $\Longrightarrow$ `Unique-SAT`

Die Klasse DP

Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Klassen von Mengen. Es sei:

$$\begin{aligned} co\mathcal{C} &= \{\overline{A} \mid A \in \mathcal{C}\} \\ \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} &= \{A \cap B \mid A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}\} \\ \mathcal{C} \vee \mathcal{D} &= \{A \cup B \mid A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}\} \end{aligned}$$

Die Klasse DP

Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Klassen von Mengen. Es sei:

$$\begin{aligned} co\mathcal{C} &= \{\overline{A} \mid A \in \mathcal{C}\} \\ \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} &= \{A \cap B \mid A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}\} \\ \mathcal{C} \vee \mathcal{D} &= \{A \cup B \mid A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}\} \end{aligned}$$

Definition (DP)

$$\mathbf{DP} = \mathbf{NP} \wedge \mathbf{coNP} = \{L \mid L = L_1 \cap L_2, L_1 \in \mathbf{NP}, L_2 \in \mathbf{coNP}\}$$

Die Klasse DP

Definition (DP)

$\mathbf{DP} = \mathbf{NP} \wedge \mathbf{coNP} = \{L \mid L = L_1 \cap L_2, L_1 \in \mathbf{NP}, L_2 \in \mathbf{coNP}\}$

DP ist

- der Abschluss von $\mathbf{NP} \cup \mathbf{coNP}$ gegenüber Schnittbildung;
- vermutlich nicht gegenüber Vereinigung abgeschlossen;
- vermutlich nicht gegenüber Komplement abgeschlossen.

Es lässt sich daher fortfahren...

Die Boolesche Hierarchie

Definition (Die Boolesche Hierarchie)

Die *Boolesche Hierarchie* wird induktiv definiert durch:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{BH}_0 &= \mathbf{P}, \\
\mathbf{BH}_1 &= \mathbf{NP}, \\
\mathbf{BH}_k &= \begin{cases} \mathbf{BH}_{k-1} \wedge \mathbf{coNP} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \mathbf{BH}_{k-1} \vee \mathbf{NP} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \text{für } k \geq 2, \\
\mathbf{BH} &= \bigcup_{k \geq 0} \mathbf{BH}_k.
\end{aligned}
$$

Die Boolesche Hierarchie

Anmerkung

Die Komplemente werden wie gewohnt definiert, so ist

- $\mathbf{coBH}_1 = \mathbf{coNP}$ und
- $\mathbf{coBH}_2 = \mathbf{coDP} = \mathbf{co}(\mathbf{NP} \wedge \mathbf{coNP}) = \mathbf{coNP} \vee \mathbf{NP}$.

Die Boolesche Hierarchie

Anmerkung

Die Komplemente werden wie gewohnt definiert, so ist

- $\mathbf{coBH}_1 = \mathbf{coNP}$ und
- $\mathbf{coBH}_2 = \mathbf{coDP} = \mathbf{co}(\mathbf{NP} \wedge \mathbf{coNP}) = \mathbf{coNP} \vee \mathbf{NP}$.

Anmerkung

Seien $A_1, \ldots, A_k$ Mengen. Es sei

$$A_1 - A_2 - \ldots - A_{k-1} - A_k := A_1 - (A_2 - (\ldots - (A_{k-1} - A_k)\ldots))$$

die geschachtelte Differenz von k Mengen.

Die Boolesche Hierarchie - Alternative Darstellungen

Es folgen alternative Darstellungen der Booleschen Hierarchie...

Die Boolesche Hierarchie - Alternative Darstellungen

Definition (Boolesche Hierarchie 2)

Die *Hierarchie verschachtelter Differenzen* wird induktiv definiert durch:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{BH}'_0 &= \mathbf{P}, \\
\mathbf{BH}'_k &= \left\{ L \;\middle|\; \begin{array}{l} L = A_1 - A_2 - \ldots - A_k \text{ für Mengen } A_i \in \mathbf{NP} \\ 1 \leq i \leq k, \text{ mit } A_k \subseteq A_{k-1} \subseteq \ldots \subseteq A_1 \end{array} \right\}, \\
\mathbf{BH}' &= \bigcup_{k \geq 0} \mathbf{BH}'_k.
\end{aligned}
$$

Die Boolesche Hierarchie - Alternative Darstellungen

Definition (Boolesche Hierarchie 3)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{BH}''_0 &= \mathbf{P} \\
\mathbf{BH}''_1 &= \mathbf{NP} \\
\mathbf{BH}''_2 &= \mathbf{DP}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{BH}''_k = \begin{cases} \mathbf{BH}''_{k-1} \vee \mathbf{NP} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \mathbf{BH}''_{k-2} \vee \mathbf{DP} & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases} \qquad \text{für } k \geq 3
$$

$$
\mathbf{BH}'' = \bigcup_{k \geq 0} \mathbf{BH}''_k
$$

Die Boolesche Hierarchie - Alternative Darstellungen

Definition (Boolescher Abschluss)

Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Klasse von Mengen. Der *Boolesche Abschluss*, $\mathbf{BC}(\mathcal{C})$, von $\mathcal{C}$ ist die kleinste Klasse $\mathcal{B}$ von Mengen, die $\mathcal{C}$ enthält und gegenüber den folgenden Booleschen Operationen abgeschlossen ist:

1. $\mathcal{B}$ ist gegenüber Vereinigung abgeschlossen, d.h. mit $A, B \in \mathcal{B}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{B}$;
2. $\mathcal{B}$ ist gegenüber Durchschnitt abgeschlossen, d.h. mit $A, B \in \mathcal{B}$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{B}$;
3. $\mathcal{B}$ ist gegenüber Komplementbildung abgeschlossen, d.h. mit $A \in \mathcal{B}$ ist auch $\overline{A} \in \mathcal{B}$.

Die Boolesche Hierarchie - Alternative Darstellungen

Satz (Die BH - Äquivalenzen)

1. $\mathbf{BH}_k = \mathbf{BH}'_k = \mathbf{BH}''_k$ *für alle* $k \geq 0$
2. $\mathbf{BH} = \mathbf{BH}' = \mathbf{BH}''$
3. $\mathbf{BH} = \mathbf{BC}(\mathbf{NP})$

Die Boolesche Hierarchie - Alternative Darstellungen

Satz (Die BH - Äquivalenzen)

1. $\mathbf{BH}_k = \mathbf{BH}'_k = \mathbf{BH}''_k$ *für alle* $k \geq 0$
2. $\mathbf{BH} = \mathbf{BH}' = \mathbf{BH}''$
3. $\mathbf{BH} = \mathbf{BC}(\mathbf{NP})$

Anmerkung

(i) $L \in \mathbf{BH}_k$

(ii) $L = (\ldots(((L_1 - L_2) + L_3) - L_4)\ldots)(-1)^{k-1}L_k$ für Mengen $L_1, \ldots, L_k \in \mathbf{NP}$

(iii) $L = (\ldots(((L_1 - L_2) + L_3) - L_4)\ldots)(-1)^{k-1}L_k$ für Mengen $L_1, \ldots, L_k \in \mathbf{NP}$ mit $L_k \subseteq L_{k-1} \subseteq \ldots \subseteq L_1$

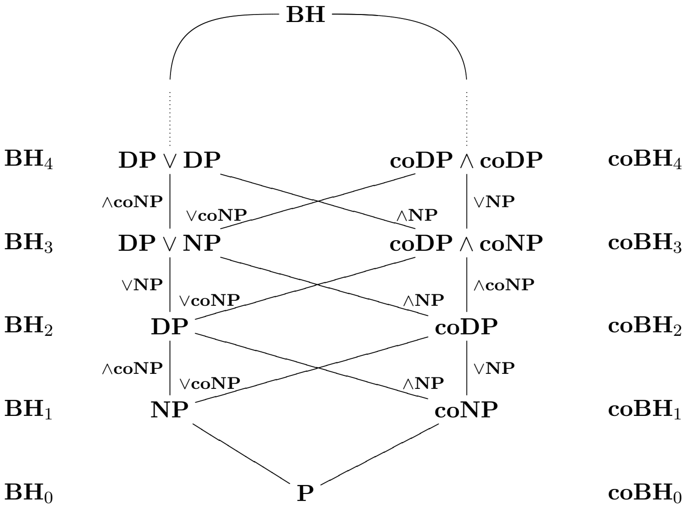
(iv) $L \in \mathbf{BH}'_k$

(v) $L \in \mathbf{BH}''_k$

Teilmengenbeziehungen

Satz (Teilmengenbeziehungen)

1. $\mathbf{BH}_k \subseteq \mathbf{BH}_{k+1}$ *und* $\mathbf{coBH}_k \subseteq \mathbf{coBH}_{k+1}$
2. $\mathbf{BH}_k \subseteq \mathbf{coBH}_{k+1}$ *und* $\mathbf{coBH}_k \subseteq \mathbf{BH}_{k+1}$
3. $\mathbf{BH}_k \vee \mathbf{coNP} = \mathbf{coBH}_{k+1}$ *und* $\mathbf{coBH}_k \wedge \mathbf{NP} = \mathbf{BH}_{k+1}$
4. $\mathbf{BH}_k \cup \mathbf{coBH}_k \subseteq \mathbf{BH}_{k+1}$ *und* $\mathbf{BH}_k \cup \mathbf{coBH}_k \subseteq \mathbf{coBH}_{k+1}$


BH
BH_4
$DP \vee DP$
$coDP \wedge coDP$
$coBH_4$
$\wedge coNP$
$\vee coNP$
$\wedge NP$
$\vee NP$
BH_3
$DP \vee NP$
$coDP \wedge coNP$
$coBH_3$
$\vee NP$
$\vee coNP$
$\wedge NP$
$\wedge coNP$
BH_2
DP
coDP
$coBH_2$
$\wedge coNP$
$\vee coNP$
$\wedge NP$
$\vee NP$
BH_1
NP
coNP
$coBH_1$
BH_0
P
$coBH_0$

Zusammenbruch

Ein Ergebnis wie das in der polynomiellen Hierarchie:

Satz (Zusammenbruch der Booleschen Hierarchie)

1. *Gilt* $\mathbf{BH}_k = \mathbf{BH}_{k+1}$ *für ein* $k \geq 0$, *so folgt* $\mathbf{BH}_k = \mathbf{coBH}_k = \mathbf{BH}_{k+1} = \mathbf{coBH}_{k+1} = \ldots = \mathbf{BH}$.
2. *Gilt* $\mathbf{BH}_k = \mathbf{coBH}_k$ *für ein* $k \geq 1$, *so folgt* $\mathbf{BH}_k = \mathbf{coBH}_k = \mathbf{BH}_{k+1} = \mathbf{coBH}_{k+1} = \ldots = \mathbf{BH}$.

Verallgemeinerung von SAT

Als Verallgemeinerung von SAT erhält man vollständige Probleme für jede Stufe der Booleschen Hierarchie:

$$
\begin{aligned}
L_{\mathbf{BH}_2} &= \{(F_1, F_2) \mid F_1 \in \mathtt{SAT} \text{ und } F_2 \in \overline{\mathtt{SAT}}\} \\
L_{\mathbf{BH}_3} &= \{(F_1, F_2, F_3) \mid (F_1 \in \mathtt{SAT} \text{ und } F_2 \in \overline{\mathtt{SAT}}) \text{ oder } F_3 \in \mathtt{SAT}\} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{BH}_1 &= \mathbf{NP} \\
\mathbf{BH}_2 &= \mathbf{NP} \wedge \mathbf{coNP} \\
\mathbf{BH}_3 &= (\mathbf{NP} \wedge \mathbf{coNP}) \vee \mathbf{NP}
\end{aligned}
$$

Ein vollständiges Problem

Satz

$L_{\mathbf{BH}_2} = \{(F_1, F_2) \mid F_1 \in SAT$ *und* $F_2 \in \overline{SAT}\}$ *ist* **DP**-*vollständig.*

Ein vollständiges Problem

Satz

$L_{\mathbf{BH}_2} = \{(F_1, F_2) \mid F_1 \in \mathit{SAT} \text{ und } F_2 \in \overline{\mathit{SAT}}\}$ *ist* **DP**-*vollständig.*

Beweis.

- Sei $L \in \mathbf{DP}$. $L = L_1 \cap L_2$ mit $L_1 \in \mathbf{NP}$, $L_2 \in \mathbf{coNP}$.
- Es gilt $L_1 \leq_m^p \mathtt{SAT}$ und $L_2 \leq_m^p \overline{\mathtt{SAT}}$.
- $$\begin{aligned} w \in L &\Leftrightarrow w \in L_1 \text{ und } w \in L_2 \\ &\Leftrightarrow f(w) \in \mathtt{SAT} \text{ und } g(w) \in \overline{\mathtt{SAT}} \\ &\Leftrightarrow (f(w), g(w)) \in L_{\mathbf{BH}_2} \end{aligned}$$

$\square$

Verallgemeinerung von $\overline{\mathtt{SAT}}$

Ebenso definiert man vollständige Probleme für $\mathbf{coBH}_k$:

$$
\begin{aligned}
L_{\mathbf{coBH}_2} &= \{(F_1, F_2) \mid F_1 \in \overline{\mathtt{SAT}} \text{ oder } F_2 \in \mathtt{SAT}\} \\
L_{\mathbf{coBH}_3} &= \{(F_1, F_2, F_3) \mid (F_1 \in \overline{\mathtt{SAT}} \text{ oder } F_2 \in \mathtt{SAT}) \text{ und } F_3 \in \overline{\mathtt{SAT}}\} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{\mathbf{BH}_2} &= \{(F_1, F_2) \mid F_1 \in \mathtt{SAT} \text{ und } F_2 \in \overline{\mathtt{SAT}}\} \\
L_{\mathbf{BH}_3} &= \{(F_1, F_2, F_3) \mid (F_1 \in \mathtt{SAT} \text{ und } F_2 \in \overline{\mathtt{SAT}}) \text{ oder } F_3 \in \mathtt{SAT}\} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Mehr vollständige Probleme

Satz

Für jedes $k \geq 1$ gilt

1. $L_{\mathbf{BH}_k}$ *ist* $\mathbf{BH}_k$*-vollständig und*
2. $L_{\mathbf{coBH}_k}$ *ist* $\mathbf{coBH}_k$*-vollständig.*

Mehr vollständige Probleme

Satz

Für jedes $k \geq 1$ gilt

1. $L_{\mathbf{BH}_k}$ *ist* $\mathbf{BH}_k$*-vollständig und*
2. $L_{\mathbf{coBH}_k}$ *ist* $\mathbf{coBH}_k$*-vollständig.*

Beweis.

Der Beweis von 1. ist induktiv und verläuft ansonsten völlig analog zu dem vorherigen Beweis. Anschließend folgt 2. dann direkt aus 1. durch Komplementbildung. □

Zwischenbemerkung

Anmerkung

Mit den Problemen $L_{\mathbf{BH}_k}$ ist schnell ersichtlich, dass die Boolesche Hierarchie in der polynomiellen Hierarchie eingebettet ist. Um für ein k-Tupel aus Formeln zu entscheiden, ob $(F_1, \ldots, F_k) \in L_{\mathbf{BH}_k}$ gilt, genügt es, SAT als Orakel zu benutzen und maximal k Fragen zu stellen.

Zur Vollständigkeit in der BH...

Ein paar Anmerkungen:

- Wenig natürliche Probleme für die höheren Stufen der Hierarchie bekannt (ähnlich wie bei der PH).

Zur Vollständigkeit in der BH...

Ein paar Anmerkungen:

- Wenig natürliche Probleme für die höheren Stufen der Hierarchie bekannt (ähnlich wie bei der PH).
- Auch in den unteren Stufen konnten bisher nur wenige vollständige Probleme gefunden werden.

Zur Vollständigkeit in der BH...

Ein paar Anmerkungen:

- Wenig natürliche Probleme für die höheren Stufen der Hierarchie bekannt (ähnlich wie bei der PH).
- Auch in den unteren Stufen konnten bisher nur wenige vollständige Probleme gefunden werden.
- Problematisch ist, dass, anders als obiger Beweis es suggerieren mag, es sehr schwierig ist, bekannte Ergebnisse bezüglich der **NP**-Vollständigkeit auf **DP**-Vollständigkeit zu übertragen.

Zur Vollständigkeit in der BH...

Ein paar Anmerkungen:

- Wenig natürliche Probleme für die höheren Stufen der Hierarchie bekannt (ähnlich wie bei der PH).
- Auch in den unteren Stufen konnten bisher nur wenige vollständige Probleme gefunden werden.
- Problematisch ist, dass, anders als obiger Beweis es suggerieren mag, es sehr schwierig ist, bekannte Ergebnisse bezüglich der **NP**-Vollständigkeit auf **DP**-Vollständigkeit zu übertragen.
- Hier hilft nun Wagners Lemma...

Entstehung eines Satzes...

- Sei $X \in \mathbf{BH}_k$ beliebig
- Ziel: Irgendwas wie

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in B,$$

  um zu schliessen, dass B $\mathbf{BH}_k$-schwierig ist.
- Am liebsten so, dass ein Zusammenhang zur **NP**-Vollständigkeit besteht...

Entstehung eines Satzes...

- Zunächst können wir X anders darstellen:

$$X = Y_1 - Y_2 - \ldots - Y_k = \cup_{i=1}^{m}(Y_{2i-1} \cap \overline{Y_{2i}})$$

  wobei $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathbf{NP}$, $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots \supseteq Y_k$ und $k = 2m$ gilt. (Hier nur der Fall für gerade k. Anderer analog.)
- Um das Problem so *umzuformulieren* und diese *Struktur* 'reinzukriegen', ist Kreativität nötig.
- Vergleiche aber das Problem $L_{\mathbf{BH}_2} = \mathtt{SAT} \wedge \overline{\mathtt{SAT}}$

Entstehung eines Satzes...

- Was können wir nun noch ausnutzen?
- Da $Y_1, \ldots, Y_k$ in **NP** sind, hilft vielleicht ein **NP**-vollständiges Problem dabei die Probleme 'anzugleichen'. (Auch dies ist ein kreativer Schritt, aber man wollte ja auch was mit NPC machen!)
- Sei A **NP**-vollständig. Dann gibt es Reduktionen $r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{FP}$ mit $x \in Y_j \Leftrightarrow r_j(x) \in A$ und wegen $Y_1 \supseteq \ldots \supseteq Y_k$ zusätzlich $r_{j+1}(x) \in A \Rightarrow r_j(x) \in A$.
- Damit:

$$x \in X \Leftrightarrow ||\{i \mid r_i(x) \in A\}|| \text{ ist ungerade}$$

Entstehung eines Satzes...

- Nun weiss man nicht so recht weiter und schliesst ab:

$$\begin{aligned} x \in X &\Leftrightarrow ||\{i \mid r_i(x) \in A\}|| \text{ ist ungerade} \\ &\Leftrightarrow f(r_1(x), \ldots, r_k(x)) \in B \end{aligned}$$

- Nun sammelt man noch die nötigen Vorbedingungen ein und kann das Lemma formulieren...

Das Lemma von Wagner

Satz (Wagner)

Sei A eine **NP***-vollständige Menge, B eine beliebige Menge und $k \geq 1$ fest. Existiert eine in Polynomialzeit berechenbare Funktion f derart, dass für alle $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \Sigma^*$ mit $v_{j+1} \in A \Rightarrow v_j \in A$*

$$||\{i \mid v_i \in A\}|| \textit{ ist ungerade} \Leftrightarrow f(v_1, \ldots, v_k) \in B$$

erfüllt ist, so ist B $\mathbf{BH}_k$-schwierig.

Anmerkung

$v_{j+1} \in A \Rightarrow v_j \in A$ ist keine weitere (störende) Vorbedingung, sondern eine *Einschränkung* der Vorbedingung!

Vollständigkeit in der BH

Mit dem Lemma von Wagner wollen wir nun ein komplizierteres Problem als Vollständig für die Boolsche Hierarchie nachweisen. Dazu

- Definieren wir das *domatic number problem*
- Zeigen, dass dieses **NP**-vollständig ist
- Definieren die exakten Varianten
- Zeigen, dass dieses **DP**- und $\mathbf{BH}_k$-vollständig ist..

Defintion des DNP

Definition (Domatic Number Problem)

Sei G ein ungerichteter Graph. Ein *dominating set* von G ist eine Teilmenge $D \subseteq V(G)$ derart, dass zu jedem Knoten $u \in V(G) \setminus D$ ein Knoten $v \in D$ existiert mit $\{v, u\} \in E$. Die maximale Anzahl an disjunkten dominating sets wird mit $\delta(G)$ bezeichnet.
Die Entscheidungsvariante des *domatic number problems* wird definiert durch:

$$\mathtt{DNP} = \{(G, k) \mid G \text{ ist ein Graph mit } \delta(G) \geq k\}$$

Defintion des DNP

Definition (Domatic Number Problem)

Sei G ein ungerichteter Graph. Ein *dominating set* von G ist eine Teilmenge $D \subseteq V(G)$ derart, dass zu jedem Knoten $u \in V(G) \setminus D$ ein Knoten $v \in D$ existiert mit $\{v, u\} \in E$. Die maximale Anzahl an disjunkten dominating sets wird mit $\delta(G)$ bezeichnet.
Die Entscheidungsvariante des *domatic number problems* wird definiert durch:

$$\mathtt{DNP} = \{(G, k) \mid G \text{ ist ein Graph mit } \delta(G) \geq k\}$$

Anmerkung

Es gilt stets $\delta(G) \leq min - deg(G) + 1$.

DNP $\in$ **NPC** - Ziel

Wir wollen nun DNP als **NP**-vollständig nachweisen...

$$\texttt{3-Colorability} \leq_m^p \texttt{DNP}$$

$\mathtt{DNP} \in \mathbf{NPC}$ - Ziel

Wir wollen nun DNP als **NP**-vollständig nachweisen...

$$\mathtt{3\text{-}Colorability} \leq_m^p \mathtt{DNP}$$

Dazu geben wir ein $f \in \mathbf{FP}$ an mit $f(G) = (H, 3)$, wobei

$$\begin{array}{rcl} G \in \mathtt{3\text{-}Colorability} & \Longrightarrow & \delta(H) = 3 \\ G \notin \mathtt{3\text{-}Colorability} & \Longrightarrow & \delta(H) = 2 \end{array}$$

$\texttt{DNP} \in \mathbf{NPC}$ - Ziel

Wir wollen nun $\texttt{DNP}$ als **NP**-vollständig nachweisen...

$$\texttt{3-Colorability} \leq_m^p \texttt{DNP}$$

Dazu geben wir ein $f \in \mathbf{FP}$ an mit $f(G) = (H, 3)$, wobei

$$\begin{array}{rcl} G \in \texttt{3-Colorability} & \Longrightarrow & \delta(H) = 3 \\ G \notin \texttt{3-Colorability} & \Longrightarrow & \delta(H) = 2 \end{array}$$

Anmerkung

- $\chi(G) \geq 3$
- G hat keine isolierten Knoten (impliziert $\delta(G) \geq 2$)

DNP $\in$ **NPC** - Konstruktion

H entsteht aus G indem

- auf jede Kante von G ein neuer Knoten gesetzt wird und
- alle Knoten in G in H verbunden werden (Clique)

DNP $\in$ **NPC** - Konstruktion

H entsteht aus G indem

- auf jede Kante von G ein neuer Knoten gesetzt wird und
- alle Knoten in G in H verbunden werden (Clique)

Anmerkung

- Jede Kante in G induziert ein Dreieck in H.
- Jedes Paar in G nicht verbundener Knoten ist in H verbunden.

DNP $\in$ **NPC** - Konstruktion (formal)

Sei $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Nun sei

$$\begin{aligned} V(H) &= V(G) \cup \{u_{i,j} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G)\} \\ E(H) &= \{\{v_i, u_{i,j}\}, \{u_{i,j}, v_j\} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G) \cup \\ &\quad \{\{v_i, v_j\} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} \end{aligned}$$

Anmerkung

Wegen $min - deg(H) = 2$ und da H keine isolierten Knoten hat, gilt

$$2 \leq \delta(H) \leq 3$$

$\mathtt{DNP} \in \mathbf{NPC}$

$G \in \mathtt{3\text{-}Colorability} \Longrightarrow \delta(H) = 3$

- Seien $C_k = \{v_i \mid v_i \in V(G) \text{ ist mit } k \text{ gefärbt}\}$, $k = 1, 2, 3$

$\mathtt{DNP} \in \mathbf{NPC}$

$G \in \mathtt{3\text{-}Colorability} \Longrightarrow \delta(H) = 3$

- Seien $C_k = \{v_i \mid v_i \in V(G) \text{ ist mit } k \text{ gefärbt}\}$, $k = 1, 2, 3$
- Seien nun $C'_k = C_k \cup \{u_{i,j} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G) \wedge v_i, v_j \notin C_k\}$

$\texttt{DNP} \in \mathbf{NPC}$

$G \in \texttt{3-Colorability} \Longrightarrow \delta(H) = 3$

- Seien $C_k = \{v_i \mid v_i \in V(G) \text{ ist mit } k \text{ gefärbt}\}$, $k = 1, 2, 3$
- Seien nun $C'_k = C_k \cup \{u_{i,j} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G) \wedge v_i, v_j \notin C_k\}$
- Wegen $C'_k \cap V(G) \neq \emptyset$ für jedes k und da $V(G)$ in H eine Clique induziert, dominiert jedes C'_k $V(G)$ in H.

DNP $\in$ **NPC**

$G \in \texttt{3-Colorability} \Longrightarrow \delta(H) = 3$

- Seien $C_k = \{v_i \mid v_i \in V(G) \text{ ist mit } k \text{ gefärbt}\}$, $k = 1, 2, 3$
- Seien nun $C'_k = C_k \cup \{u_{i,j} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G) \wedge v_i, v_j \notin C_k\}$
- Wegen $C'_k \cap V(G) \neq \emptyset$ für jedes k und da $V(G)$ in H eine Clique induziert, dominiert jedes C'_k $V(G)$ in H.
- Jedes Dreieck $\{v_i, u_{i,j}, v_j\}$ in H enthält ein Element aus jedem C'_k, also dominiert jedes C'_k auch $\{u_{i,j} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G)\}$.

$\mathtt{DNP} \in \mathbf{NPC}$

$G \in \texttt{3-Colorability} \Longrightarrow \delta(H) = 3$

- Seien $C_k = \{v_i \mid v_i \in V(G) \text{ ist mit } k \text{ gefärbt}\}$, $k = 1, 2, 3$
- Seien nun $C'_k = C_k \cup \{u_{i,j} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G) \wedge v_i, v_j \notin C_k\}$
- Wegen $C'_k \cap V(G) \neq \emptyset$ für jedes k und da $V(G)$ in H eine Clique induziert, dominiert jedes C'_k $V(G)$ in H.
- Jedes Dreieck $\{v_i, u_{i,j}, v_j\}$ in H enthält ein Element aus jedem C'_k, also dominiert jedes C'_k auch $\{u_{i,j} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G)\}$.
- Also: $\delta(H) = 3$.

DNP $\in$ **NPC**

$G \in \texttt{3-Colorability} \Longleftarrow \delta(H) = 3$

- Sei C_1', C_2', C_3' eine Partition von H in drei dominating sets

DNP $\in$ **NPC**

$G \in \texttt{3-Colorability} \Longleftarrow \delta(H) = 3$

- Sei C_1', C_2', C_3' eine Partition von H in drei dominating sets
- Färbe C_k' mit Farbe k

$\mathtt{DNP} \in$ **NPC**

$G \in \mathtt{3\text{-}Colorability} \Longleftarrow \delta(H) = 3$

- Sei C'_1, C'_2, C'_3 eine Partition von H in drei dominating sets
- Färbe C'_k mit Farbe k
- Jedes Dreieck $\{v_i, u_{i,j}, v_j\}$ ist jetzt dreigefärbt

DNP $\in$ NPC

$G \in \texttt{3-Colorability} \Longleftarrow \delta(H) = 3$

- Sei C_1', C_2', C_3' eine Partition von H in drei dominating sets
- Färbe C_k' mit Farbe k
- Jedes Dreieck $\{v_i, u_{i,j}, v_j\}$ ist jetzt dreigefärbt
- Diese Färbung von $V(H)$ induziert eine legale Färbung von G

DNP $\in$ **NPC**

$G \in$ 3-Colorability $\Longleftarrow \delta(H) = 3$

- Sei C'_1, C'_2, C'_3 eine Partition von H in drei dominating sets
- Färbe C'_k mit Farbe k
- Jedes Dreieck $\{v_i, u_{i,j}, v_j\}$ ist jetzt dreigefärbt
- Diese Färbung von $V(H)$ induziert eine legale Färbung von G
- Wegen $2 \leq \delta(H) \leq 3$ folgt damit dann auch
  $G \notin$ 3-Colorability $\Longrightarrow \delta(H) = 2$

Die exakte Variante

Definition (Exact Domatic Number Problem)

Sei $i \in \mathbb{N}$ fest. Das *exact domatic number problem* wird definiert durch:

$$\texttt{Exact-}i\texttt{-DNP} = \{(G, k) \mid G \text{ ist ein Graph mit } \delta(G) = k\}$$

Die exakte Variante

Definition (Exact Domatic Number Problem)

Sei $i \in \mathbb{N}$ fest. Das *exact domatic number problem* wird definiert durch:

$$\texttt{Exact-}i\texttt{-DNP} = \{(G, k) \mid G \text{ ist ein Graph mit } \delta(G) = k\}$$

Definition (Exact Domatic Number Problem (Generalized Version))

Sei $M_k \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge von k Zahlen. Das *allgemeine exact domatic number problem* wird definiert durch:

$$\texttt{Exact-}M_k\texttt{-DNP} = \{G \mid G \text{ ist ein Graph mit } \delta(G) \in M_k\}$$

Nächstes Mal...

Nächstes Mal wollen wir zeigen:

Satz

Sei $k \geq 1$ fest gewählt. Sei $M_k = \{4k+1, 4k+3, \dots, 6k-1\}$. Dann ist `Exact`-$M_k$-`DNP` $\mathbf{BH}_{2k}$*-vollständig.*

Nächstes Mal...

Nächstes Mal wollen wir zeigen:

Satz

Sei $k \geq 1$ fest gewählt. Sei $M_k = \{4k+1, 4k+3, \ldots, 6k-1\}$. Dann ist `Exact-`$M_k$`-DNP` $\mathbf{BH}_{2k}$*-vollständig.*

Satz

`Exact-5-DNP` *ist* **DP***-vollständig.*

Nächstes Mal...

Ausserdem kommt nächstes Mal:

- Die Query Hierarchy
- Die parallele Query Hierarchie
- Der Satz, der diese Hierarchien (und die BH) miteinander verzahnt (mit Beweis; *mind change technique*)
- Der Satz von Kadin (wird nur erwähnt/skizziert; *easy-hard-technique*)

Hausaufgaben

...

Kurz vor Schluss...

Gleich ist noch Zeit für Fragen, jetzt heißt es erstmal...

Ende...

Danke für die Aufmerksamkeit
!