PNL

Kapitel 6
Prozesse und ihre Synchronisation

Berndt Farwer
farwer@informatik.uni-hamburg.de

Wintersemester 2002/2003

©2002 Berndt Farwer

Motivation

- Darstellung von Abläufen in parallelen und verteilten Systemen
  - ▷ Aktions- bzw. Transitionsfolgen nicht immer ausreichend
  - ▷ Verwendung partieller Ordnungen

Motivation

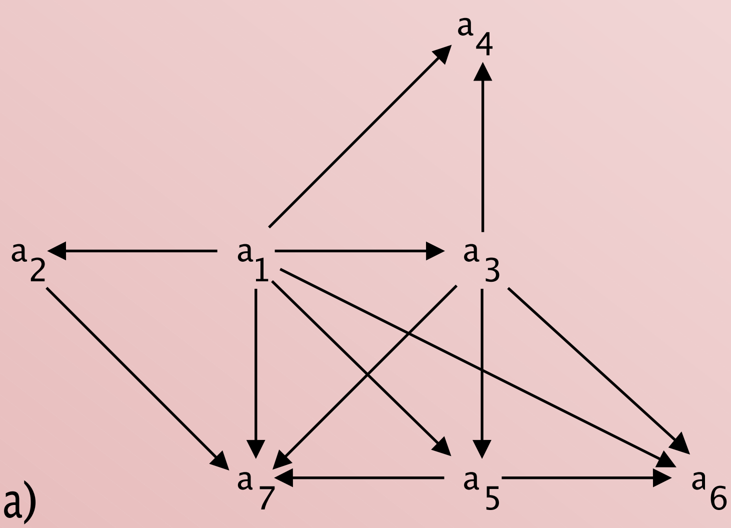
- Darstellung von Abläufen in parallelen und verteilten Systemen
  - ▷ Aktions- bzw. Transitionsfolgen nicht immer ausreichend
  - ▷ Verwendung partieller Ordnungen
- Petrinetz-Prozesse:
  - ▷ entstehen durch Abwickeln der Netzstruktur
  - ▷ Vorteile gegenüber Schaltfolgen:
    - ◇ Nebenläufigkeit wird dargestellt
    - ◇ Erweiterung durch Zeitstempel leicht möglich

Kausalnetze und Prozesse

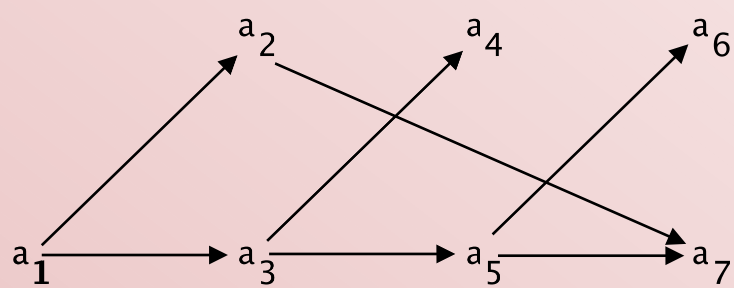
- Kausalnetze beschreiben eine Striktordung von Ereignissen (Transitionen).
- Endliche Kausalnetze wurden implizit bereits im in F4 als Auftragssysteme behandelt.

Kausalnetze und Prozesse

- Kausalnetze beschreiben eine Striktordung von Ereignissen (Transitionen).
- Endliche Kausalnetze wurden implizit bereits im in F4 als Auftragssysteme behandelt.
  - ▷ Beispiel eines Auftragssystems als
    - a) Präzedenzgraph
    - b) Konnektivitätsgraph

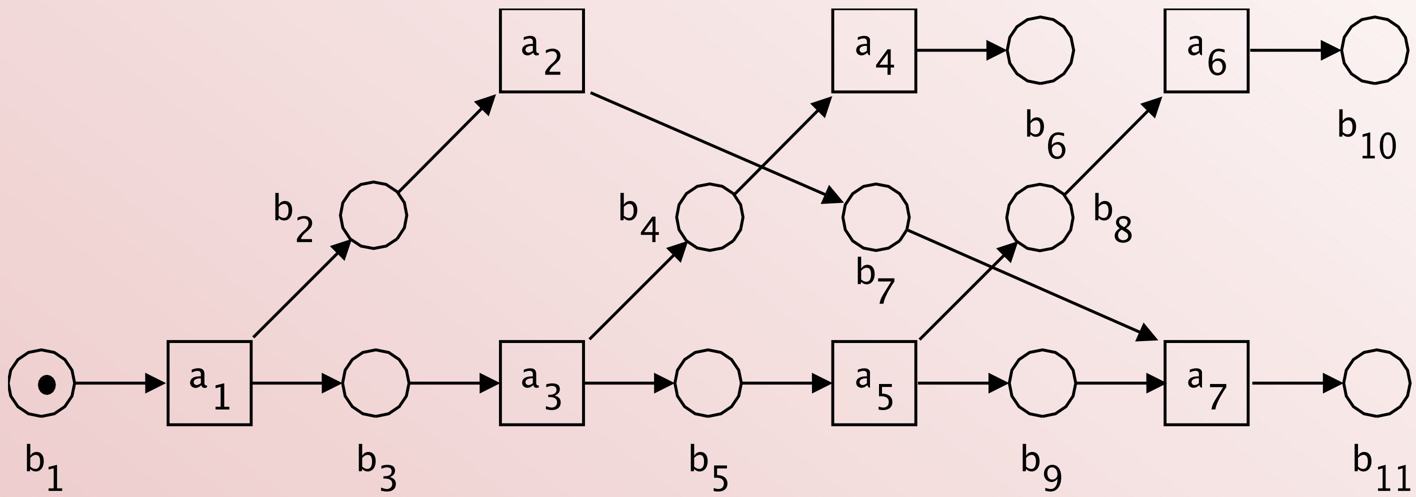


a)

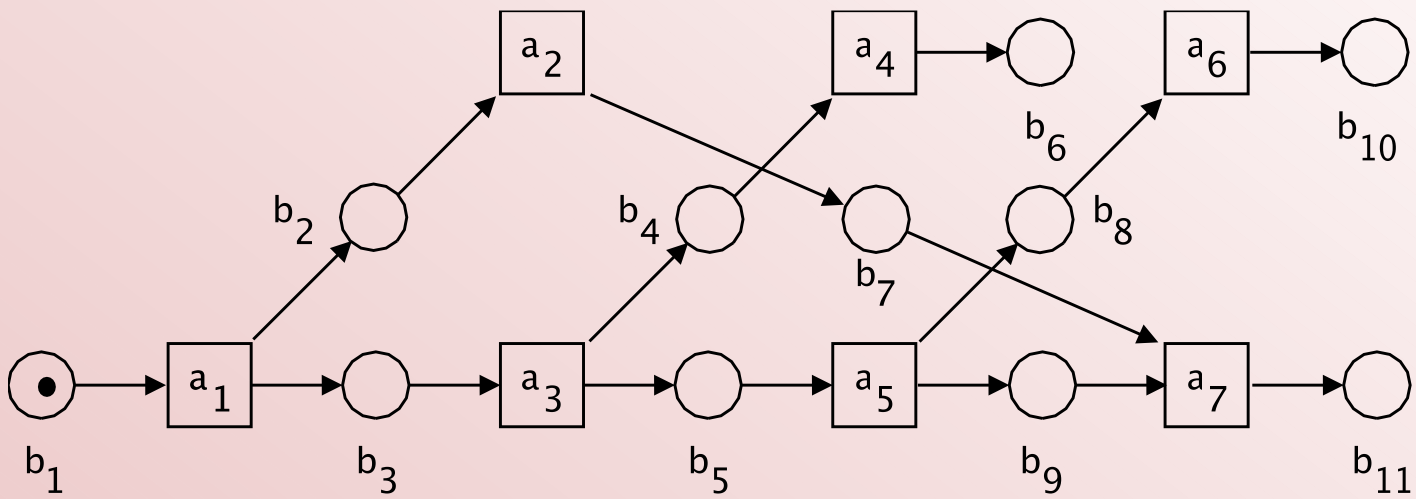


b)

- Das entsprechende Kausalnetz mit einer Anfangsmarkierung.

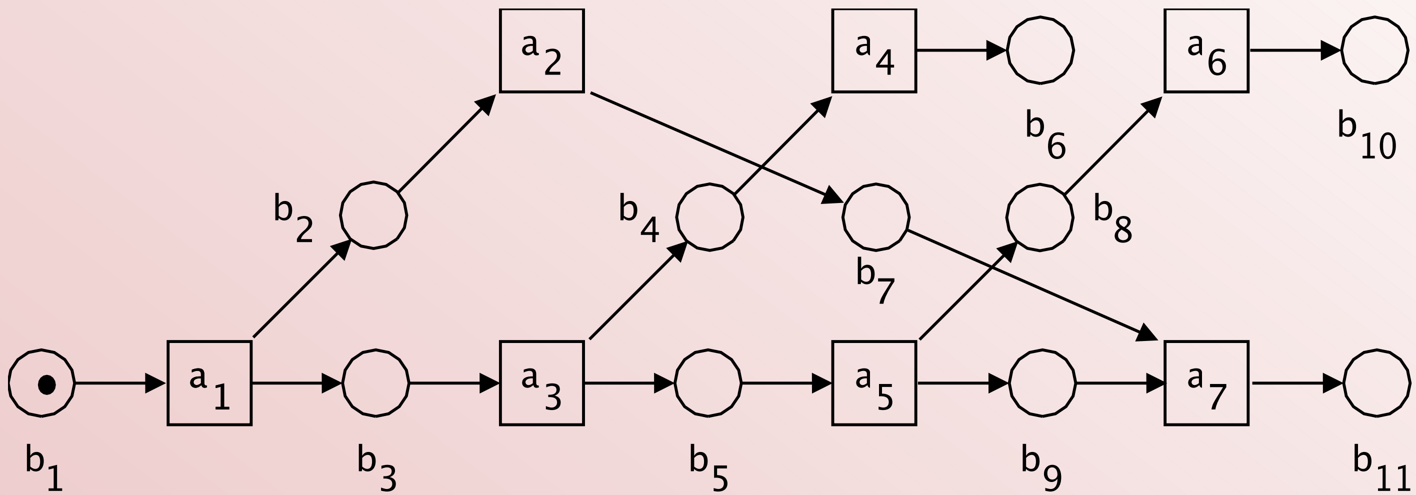


- Das entsprechende Kausalnetz mit einer Anfangsmarkierung.



- Maximale Schaltfolgen eines solchen Netzes sind die linearen Vervollständigungen der Striktordnung.

- Das entsprechende Kausalnetz mit einer Anfangsmarkierung.



- Maximale Schaltfolgen eines solchen Netzes sind die linearen Vervollständigungen der Striktordnung.

- Die Definition eines Kausalnetzes verwendet die Definition eines Netzes aus Kapitel: Referenznetze.

Operationen auf Relationen

Definition 6.1. *Ist $R \subset A \times A$ eine Relation, dann bezeichnen*

- $R^{-1} := \{(a,b)|(b,a) \in R\}$ *die* **inverse** *Relation*
- $\overline{R} := \{(a,b) \mid (a,b) \in (A \times A) \wedge (a,b) \notin R\}$ *die* **komplementäre** *Relation*
- $id_{|A} := \{(a,a) \mid a \in A\}$ *die* **identische** *Relation*
- $\widehat{R} := R \cup R^{-1} \cup \mathrm{id}_{|A}$ *die* **symmetrische und reflexive** *Hülle von R*
- $R^+ := \{(a_1,a_n) \in A \times A \mid n \geq 2$ *und es gibt* $a_2,\dots,a_{n-1} \in A$ *mit* $(a_i,a_{i+1}) \in R$ *für* $1 \leq i \leq n-1\}$ *die* **transitive Hülle**
- $R^* := R^+ \cup \mathrm{id}_{|A}$ *die* **Iteration** *oder* **reflexive und transitive Hülle** *von R*
- *Für* $B \subset A$ *heißt* $R_{|B \times B} := \{(a,b) \in B \times B \mid (a,b) \in R\}$ *die* **Einschränkung** *auf B.*

Pfade in Netzen

Definition 6.2. *Sei $N = (P, T, F)$ ein Netz.*

- *Eine Folge von Paaren der Form $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_n, a_{n+1})$ ($n \geq 1$) mit $(a_i, a_{i+1}) \in F$ heißt* **Pfad** *von a_1 nach a_{n+1}.*
- *Sind Anfang und Ende identisch, d. h. $a_1 = a_{n+1}$, dann heißt der Pfad* **Zyklus***.*
- *N heißt* **zyklusfrei***, wenn es keine Zyklen enthält.*

Kausalnetz

Definition 6.3. *Ein Netz $N = (P, T, F)$ heißt* **Kausalnetz** *(causal net), wenn*

a) N *zyklenfrei ist, d.h.* $F^+ \cap \mathrm{id}_{|(P \cup T)} = \emptyset$

b) alle Stellen höchstens eine Eingangs- und Ausgangstransition haben, d.h.

$$\forall p \in P : |{}^\bullet p| \leq 1 \text{ und } |p^\bullet| \leq 1$$

- *Die Relation* $< \subset (P \cup T) \times (T \cup P)$ *mit* $< := F^+$ *heißt* **Kausalrelation** *des Kausalnetzes.*
- *Ist* $P \cup T$ *endlich, dann heißt N* **endliches Kausalnetz**.

Kausalnetz

Definition 6.3. *Ein Netz $N = (P, T, F)$ heißt* **Kausalnetz** *(causal net), wenn*

a) N *zyklenfrei ist, d.h.* $F^+ \cap \mathrm{id}_{|(P \cup T)} = \emptyset$

b) alle Stellen höchstens eine Eingangs- und Ausgangstransition haben, d.h.

$$\forall p \in P : |{}^\bullet p| \leq 1 \textit{ und } |p^\bullet| \leq 1$$

- ▷ *Die Relation* $< \subset (P \cup T) \times (T \cup P)$ *mit* $< := F^+$ *heißt* **Kausalrelation** *des Kausalnetzes.*
- ▷ *Ist* $P \cup T$ *endlich, dann heißt N* **endliches Kausalnetz***.*

- Die Kausalrelation ist eine Halbordnung, d.h. wie die Präzedenzrelation eine irreflexive, transitive Relation.

Kausalnetz

Definition 6.3. *Ein Netz $N = (P, T, F)$ heißt* **Kausalnetz** *(causal net), wenn*

a) N *zyklenfrei ist, d.h.* $F^+ \cap \mathrm{id}_{|(P \cup T)} = \emptyset$

b) alle Stellen höchstens eine Eingangs- und Ausgangstransition haben, d.h.

$$\forall p \in P : |{}^\bullet p| \leq 1 \text{ und } |p^\bullet| \leq 1$$

- ▷ *Die Relation* $< \subset (P \cup T) \times (T \cup P)$ *mit* $< := F^+$ *heißt* **Kausalrelation** *des Kausalnetzes.*
- ▷ *Ist* $P \cup T$ *endlich, dann heißt N* **endliches Kausalnetz**.

- Die Kausalrelation ist eine Halbordnung, d.h. wie die Präzedenzrelation eine irreflexive, transitive Relation.
- Endliche Kausalnetze und Auftragssysteme entsprechen sich daher in eindeutiger Weise.

Kausalnetze zu Auftragssystemen

Definition 6.4. *Sei $AS = (A, \lessdot)$ ein Auftragssystem mit $|A| = n$. O.b.d.A. sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.*

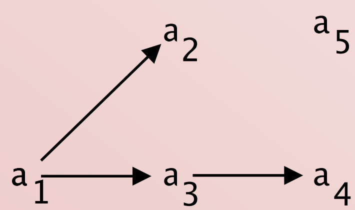
a) *Dann heißt $N = (P, T, F)$ das AS* **zugeordnete Kausalnetz**, *wobei für $\{1, \ldots, n\}$ gilt:*

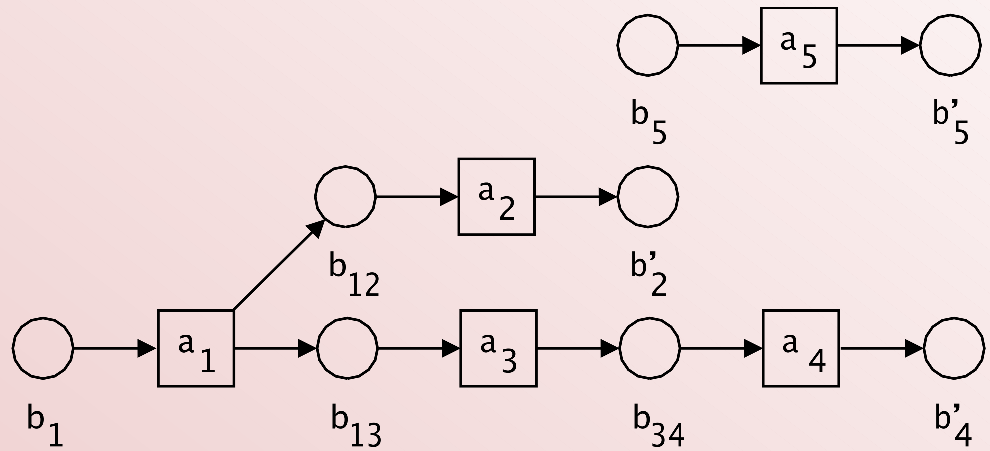
$$
\begin{aligned}
T &:= A \\
P &:= \{b_{ij} \mid a_i \in A \text{ ist direkt präzedent zu } a_j \in A\} \cup \\
&\quad\; \{b_i \mid a_i \in A \wedge \neg\exists a_j : a_j \lessdot a_i\} \cup \\
&\quad\; \{b'_i \mid a_i \in A \wedge \neg\exists a_j : a_i \lessdot a_j\} \\
F &:= \{(a_i, b_{ij}), (b_{ij}, a_j) \mid a_i, a_j \in A, b_{ij} \in P\} \cup \\
&\quad\; \{(b_i, a_i) \mid a_i \in A, b_i \in P\} \cup \\
&\quad\; \{(a_i, b'_i) \mid a_i \in A, b'_i \in P\}
\end{aligned}
$$

b) *Ist $N = (P, T, F)$ ein endliches Kausalnetz mit Kausalrelation $< := F^+$, dann heißt $(T, <_{|T \times T})$ das N zugeordnete Auftragssystem.*

Beispiel

- Ein Auftragssystem mit zugeordnetem Kausalnetz





- Die Bedingungen b_{ij} drücken gerade die entsprechende Präzedenz $a_i \lessdot a_j$ aus.

Eigenschaften

- . . . sinngemäß auch für Auftragssysteme:

Eigenschaften

- . . . sinngemäß auch für Auftragssysteme:
  - ▷ Für ein Kausalnetz drückt die Kausalrelation $<$ die **logischen Abhängigkeiten** der Transitionen (bzw. Aufträge, Handlungen) im Hinblick auf die Reihenfolge ihrer Ausführung aus.

Eigenschaften

- . . . sinngemäß auch für Auftragssysteme:
  - Für ein Kausalnetz drückt die Kausalrelation $<$ die **logischen Abhängigkeiten** der Transitionen (bzw. Aufträge, Handlungen) im Hinblick auf die Reihenfolge ihrer Ausführung aus.
  - Gilt $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, dann gibt es nur **eine** solche Reihenfolge.

Eigenschaften

- . . . sinngemäß auch für Auftragssysteme:
  - Für ein Kausalnetz drückt die Kausalrelation $<$ die **logischen Abhängigkeiten** der Transitionen (bzw. Aufträge, Handlungen) im Hinblick auf die Reihenfolge ihrer Ausführung aus.
  - Gilt $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, dann gibt es nur **eine** solche Reihenfolge.
  - Alle Transitionen t_i stehen mit allen Transitionen t_j in der Relation $<$ bzw. $<^{-1}$.

Eigenschaften

- . . . sinngemäß auch für Auftragssysteme:
  - Für ein Kausalnetz drückt die Kausalrelation $<$ die **logischen Abhängigkeiten** der Transitionen (bzw. Aufträge, Handlungen) im Hinblick auf die Reihenfolge ihrer Ausführung aus.
  - Gilt $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, dann gibt es nur **eine** solche Reihenfolge.
  - Alle Transitionen t_i stehen mit allen Transitionen t_j in der Relation $<$ bzw. $<^{-1}$.
  - Zusammen mit der identischen Relation erhalten wir die Relation „in Linie“ li:

$$\mathrm{li} :=< \cup <^{-1} \cup \mathrm{id}_{|(P \cup T)}.$$

Eigenschaften

- . . . sinngemäß auch für Auftragssysteme:
  - Für ein Kausalnetz drückt die Kausalrelation $<$ die **logischen Abhängigkeiten** der Transitionen (bzw. Aufträge, Handlungen) im Hinblick auf die Reihenfolge ihrer Ausführung aus.
  - Gilt $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, dann gibt es nur **eine** solche Reihenfolge.
  - Alle Transitionen t_i stehen mit allen Transitionen t_j in der Relation $<$ bzw. $<^{-1}$.
  - Zusammen mit der identischen Relation erhalten wir die Relation „in Linie" li:
  $$\mathrm{li} := < \cup <^{-1} \cup \mathrm{id}_{|(P \cup T)}.$$
  - Transitionen, die nicht in der Relation li stehen, können unabhängig voneinander schalten.

    Sie heißen **nebenläufig**.

Relationen li und co

Definition 6.5. *Sei* $N = (P, T, F)$ *ein Kausalnetz mit der Kausalrelation* $<= F^+$.

Wir definieren:

$$\mathrm{li} :=< \cup <^{-1} \cup \mathrm{id}_{|(P \cup T)}$$

also mit Definition 6.1 $\mathrm{li} = \widehat{<}$, *die Relation* **in Linie** *(on a line) und durch*

$$\mathrm{co} := \overline{\mathrm{li}} \cup \mathrm{id}_{|(P \cup T)}$$

die Relation **nebenläufig** *(concurrent).*

Relationen li und co

Definition 6.5. *Sei $N = (P, T, F)$ ein Kausalnetz mit der Kausalrelation $<= F^+$.*

Wir definieren:

$$\mathrm{li} := < \cup <^{-1} \cup \mathrm{id}_{|(P \cup T)}$$

also mit Definition 6.1 $\mathrm{li} = \widehat{<}$*, die Relation* **in Linie** *(on a line) und durch*

$$\mathrm{co} := \overline{\mathrm{li}} \cup \mathrm{id}_{|(P \cup T)}$$

die Relation **nebenläufig** *(concurrent).*

- li und co sind symmetrische und reflexive Relationen.

Relationen li und co

Definition 6.5. *Sei $N = (P, T, F)$ ein Kausalnetz mit der Kausalrelation $<= F^+$.*

Wir definieren:

$$\mathrm{li} :=< \cup <^{-1} \cup \mathrm{id}_{|(P \cup T)}$$

also mit Definition 6.1 $\mathrm{li} = \hat{\lessgtr}$, *die Relation* **in Linie** *(on a line) und durch*

$$\mathrm{co} := \overline{\mathrm{li}} \cup \mathrm{id}_{|(P \cup T)}$$

die Relation **nebenläufig** *(concurrent).*

- ▷ li und co sind symmetrische und reflexive Relationen.

- Eine Menge von Transitionen mit *mehr* als zwei Elementen kann nebenläufig schalten,

  wenn

  alle Transitionen dieser Menge paarweise unabhängig bezüglich der Relation li sind.

Kliquen

Definition 6.6. *Sei $R \subset A \times A$ eine symmetrische, reflexive Relation und $K \subset A$ eine Menge.*

a) K heißt **unabhängig** *(independent) bezüglich R, falls keine zwei verschiedenen Elemente von K in der Relation R stehen :*

$$(x \in K \wedge y \in K \wedge x \neq y) \Rightarrow (x, y) \notin R.$$

b) K heißt **Klique** *(clique) bezüglich R, falls alle Elemente von K in der Relation R stehen:*

$$(x \in K \wedge y \in K) \Rightarrow (x, y) \in R$$

c) K heißt **Elementüberdeckung** *(covering) von R, falls für jedes Paar $(x, y) \in R$ mit $x \neq y$ mindestens ein Element zu K gehört :*

$$((x, y) \in R \wedge x \neq y) \Rightarrow (x \in K \vee y \in K)$$

Äquivalenzen

Theorem 6.7. *Sei $R \subset A \times A$ eine reflexive, symmetrische Relation. Dann sind für $K \subset A$ die folgenden Aussagen äquivalent.*

a) K ist unabhängig bezüglich R

b) K ist Klique bezüglich $\overline{R} \cup id_{|A}$

c) $\overline{K}$ ist Elementüberdeckung von R

Äquivalenzen

Theorem 6.7. *Sei $R \subset A \times A$ eine reflexive, symmetrische Relation. Dann sind für $K \subset A$ die folgenden Aussagen äquivalent.*

a) K ist unabhängig bezüglich R

b) K ist Klique bezüglich $\overline{R} \cup id_{|A}$

c) $\overline{K}$ ist Elementüberdeckung von R

Beweis: Alle drei Aussagen lassen sich leicht äquivalent umformen in:

$$(x, y) \notin R \;\vee\; x = y \;\vee\; x \notin K \;\vee\; y \notin K$$

Äquivalenzen

Theorem 6.7. *Sei $R \subset A \times A$ eine reflexive, symmetrische Relation. Dann sind für $K \subset A$ die folgenden Aussagen äquivalent.*

a) K ist unabhängig bezüglich R

b) K ist Klique bezüglich $\overline{R} \cup id_{|A}$

c) $\overline{K}$ ist Elementüberdeckung von R

Beweis: Alle drei Aussagen lassen sich leicht äquivalent umformen in:

$$(x, y) \notin R \ \vee \ x = y \ \vee \ x \notin K \ \vee \ y \notin K$$

- Angewandt auf li und co ergeben sich folgende Äquivalenzen:

  a) K ist unabhängig bezüglich li (kausale Unabhängigkeit)

  b) K ist Klique bezüglich co (paarweise Nebenläufigkeit)

  c) $\overline{K} = (P \cup T) \backslash K$ ist Überdeckung bezüglich li ($\overline{K}$ berührt alle Paare von li)

- Eine Bedingung $p \in P$ kann auch nebenläufig zu einer Transition $t \in T$ sein: $(p, t) \in \mathrm{co}$.

- Eine Bedingung $p \in P$ kann auch nebenläufig zu einer Transition $t \in T$ sein: $(p, t) \in \mathrm{co}$.

- Für zwei Bedingungen kann gelten: $(p, p') \in \mathrm{co}$.

- Eine Bedingung $p \in P$ kann auch nebenläufig zu einer Transition $t \in T$ sein: $(p, t) \in \mathrm{co}$.
- Für zwei Bedingungen kann gelten: $(p, p') \in \mathrm{co}$.
- Insbesondere ist man an maximalen Mengen von nebenläufigen Elementen interessiert.

- Eine Bedingung $p \in P$ kann auch nebenläufig zu einer Transition $t \in T$ sein: $(p, t) \in \mathrm{co}$.
- Für zwei Bedingungen kann gelten: $(p, p') \in \mathrm{co}$.
- Insbesondere ist man an maximalen Mengen von nebenläufigen Elementen interessiert.

Bezirke

Definition 6.8. *Sei K eine Klique bezüglich der (symmetrischen, reflexiven) Relation $R \subset A \times A$.*

K heißt **maximale Klique** *(maximal clique) oder* Bezirk, *wenn gilt:*

$$a \notin K \Rightarrow \exists k \in K : (a, k) \notin R$$

Linien und Schnitte

Definition 6.9. *Es sei $N = (P, T, F)$ ein Kausalnetz mit den Relationen* li *und* co. *Dann bezeichnet*

a) $\mathbb{L} := \{K \mid K$ *ist Bezirk bezüglich* $\mathrm{li}\}$

Die **Menge der Linien** *(lines) von* N

b) $\mathbb{C} := \{K \mid K$ *ist Bezirk bezüglich* $\mathrm{co}\}$

Die **Menge der Schnitte** *(cuts) von* N

c) $\$:= \{K \mid K \subset P \wedge K \in \mathbb{C}\}$

Die **Menge der P-Schnitte** *(P-cuts) von* N

d) $\overline{T} := \{K|K \subset T \wedge K \in \mathbb{C}\}$

Die **Menge der T-Schnitte** *(T-cuts) von* N

Linien und Schnitte

Definition 6.9. *Es sei $N = (P, T, F)$ ein Kausalnetz mit den Relationen* li *und* co*. Dann bezeichnet*

a) $\mathbb{L} := \{K \mid K$ *ist Bezirk bezüglich* li$\}$

Die **Menge der Linien** *(lines) von* N

b) $\mathbb{C} := \{K \mid K$ *ist Bezirk bezüglich* co$\}$

Die **Menge der Schnitte** *(cuts) von* N

c) $\$:= \{K \mid K \subset P \wedge K \in \mathbb{C}\}$

Die **Menge der P-Schnitte** *(P-cuts) von* N

d) $\overline{T} := \{K|K \subset T \wedge K \in \mathbb{C}\}$

Die **Menge der T-Schnitte** *(T-cuts) von* N

▷ Linien sind maximale Mengen von paarweise kausal abhängigen Elementen, ähnlich den ,,Weltlinien" in der Physik.

Sequentialität

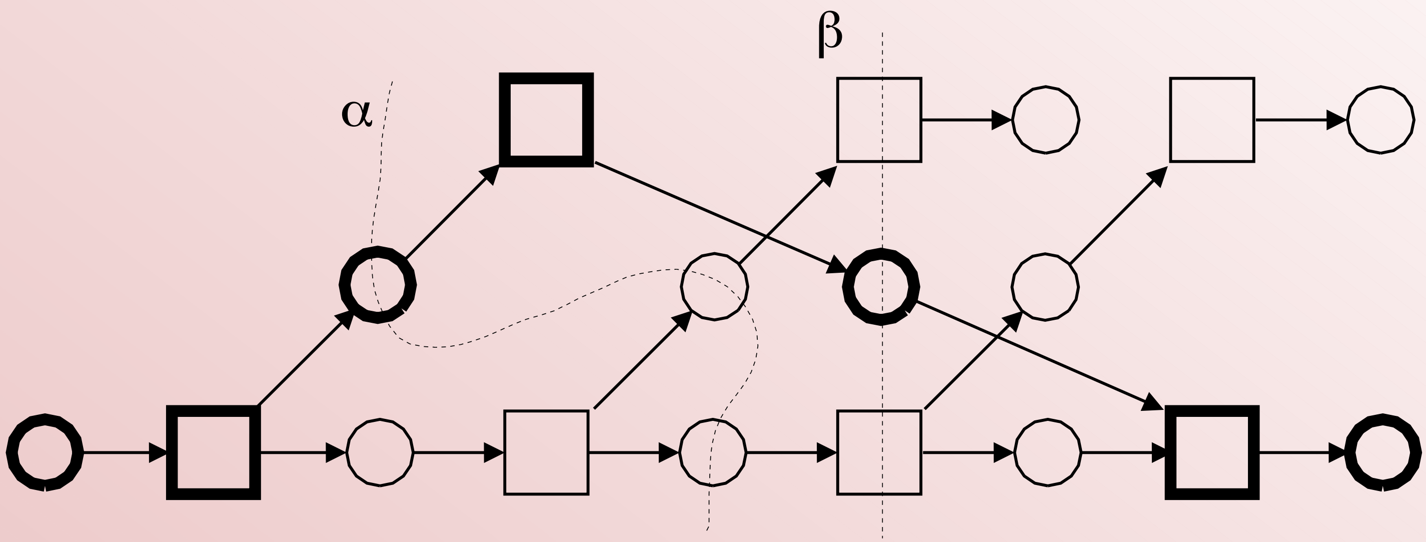
- . . . keine verschiedenen nebenläufigen Elemente:

Definition 6.10. *Ein Kausalnetz* $N = (P, T, F)$ *heißt* **sequentiell**, *wenn* $\overline{\mathrm{li}} = \emptyset$ *gilt, oder äquivalenter dazu* $\mathrm{co} = \mathrm{id}_{|(P \cup T)}$.

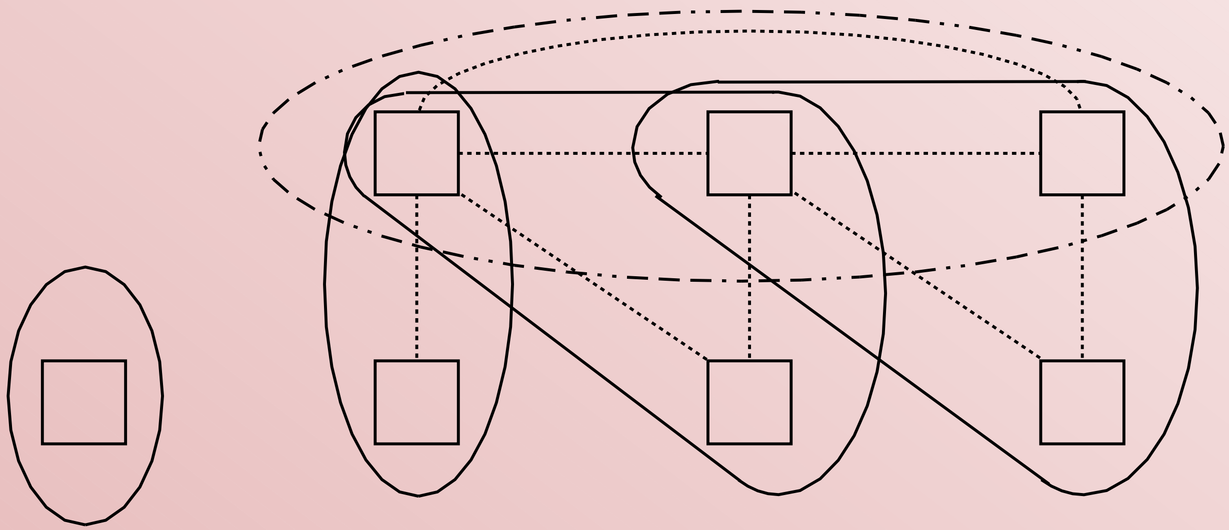
Ein Auftragssystem AS *heißt* **sequentiell**, *falls das* AS *zugeordnete Kausalnetz sequentiell ist.*

. . . zunächst einige Beispiele:

Beispiel: Linien und Schnitte



a)



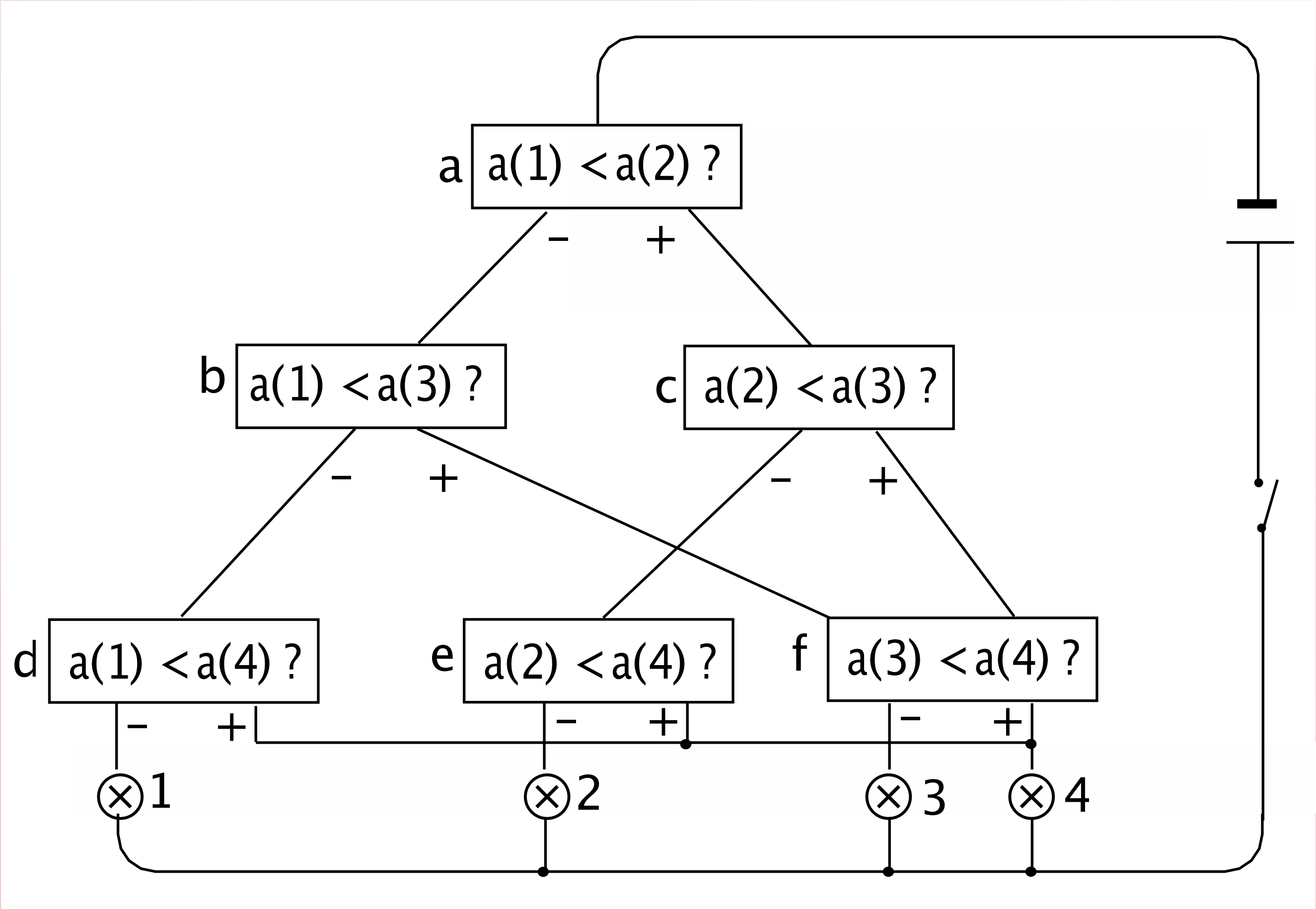
b)

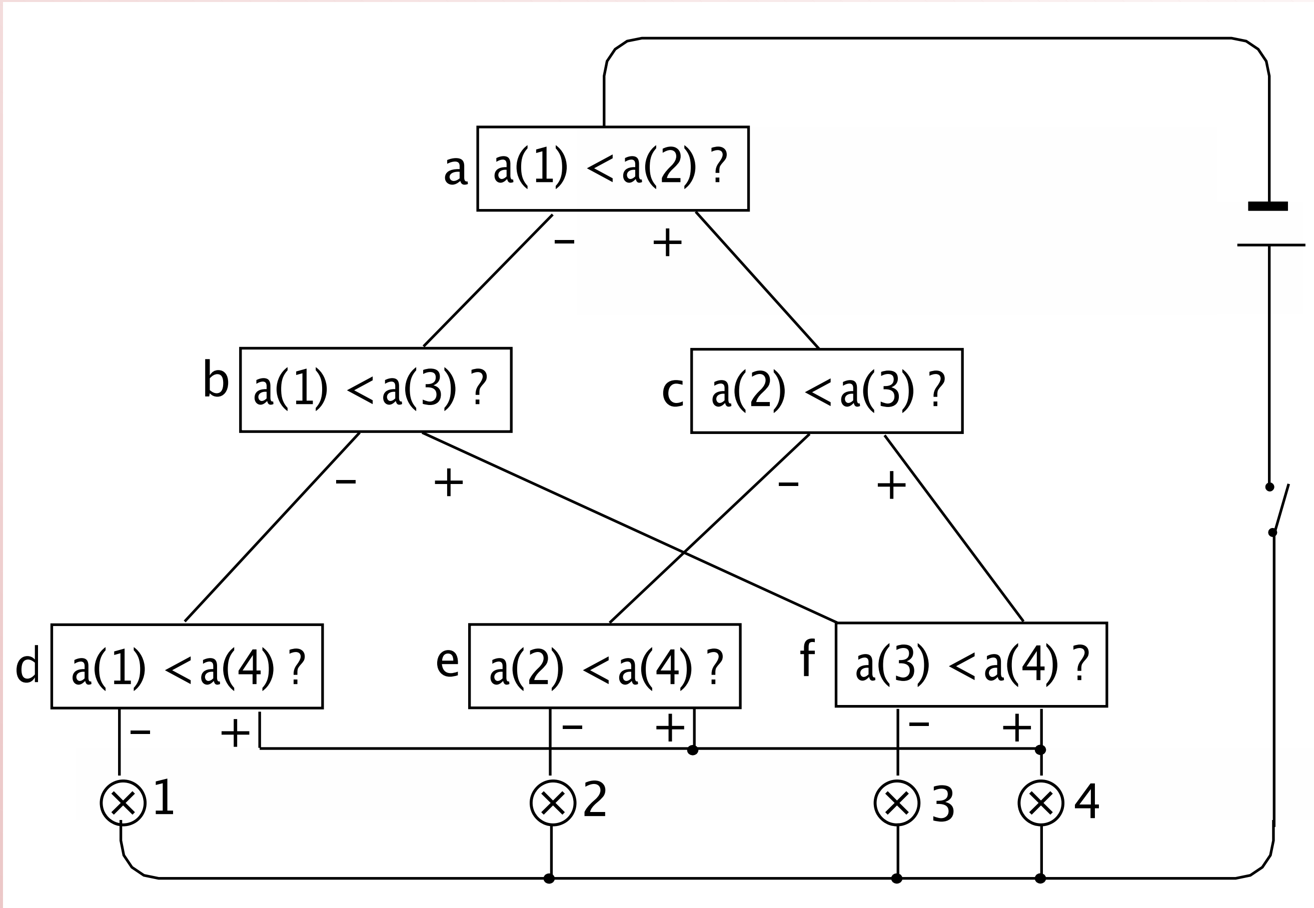
Nebenläufigkeit

- Begriff Nebenläufigkeit, erklärt anhand eines Beispiels von Dijkstra (1968).
  - ▷ **Gegeben**:
    4 paarweise verschiedene natürliche Zahlen:

$$\{a(1), a(2), a(3), a(4)\} \subset \mathbb{N}$$

    - ◇ Es soll eine Maschine konstruiert werden, die anzeigt, welche der vier Zahlen den größten Wert hat.
  - ▷ Den Zahlen seinen elektrische Ströme entsprechender Stärke zugeordnet, welche paarweise Relais ansteuern.


a
a(1) < a(2) ?
–
+
b
a(1) < a(3) ?
c
a(2) < a(3) ?
–
+
–
+
d
a(1) < a(4) ?
e
a(2) < a(4) ?
f
a(3) < a(4) ?
–
+
–
+
–
+
1
2
3
4

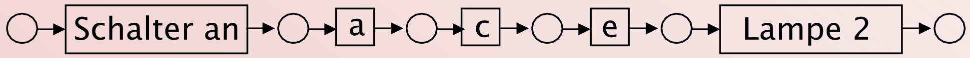


- Was passiert für

$$a(1) = 1, \quad a(2) = 5, \quad a(3) = 4, \quad a(4) = 3 \ ?$$

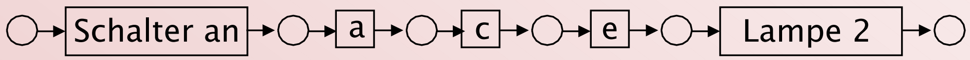
Mögliche Interpretationen

- seriell:

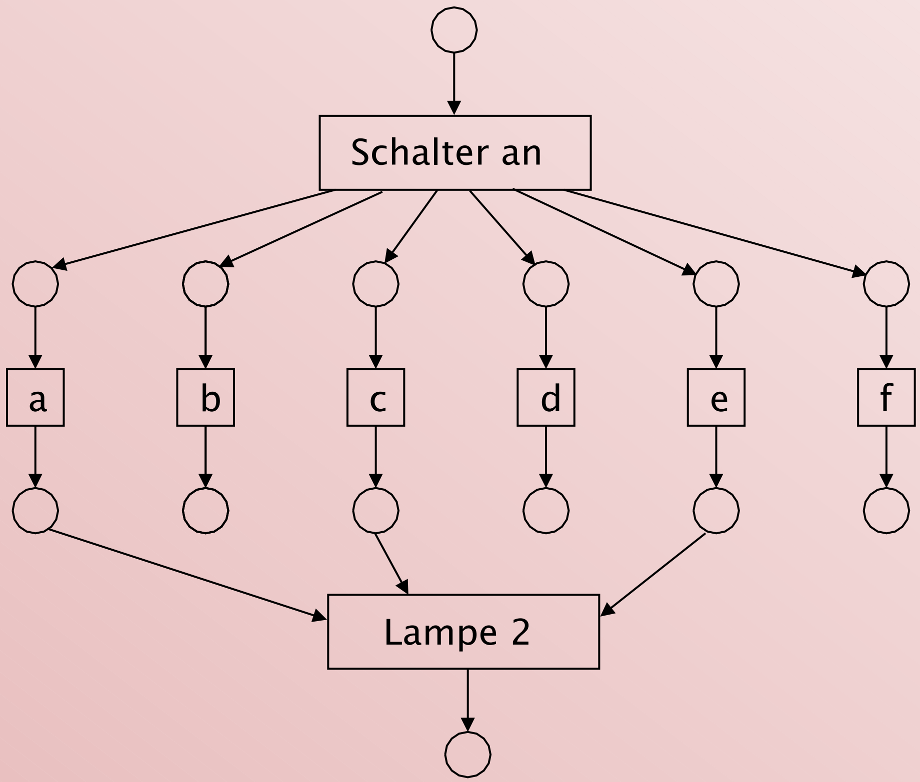


Mögliche Interpretationen

- seriell:

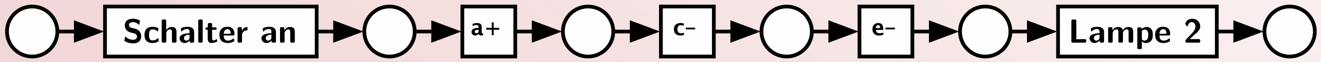


- nebenläufig:



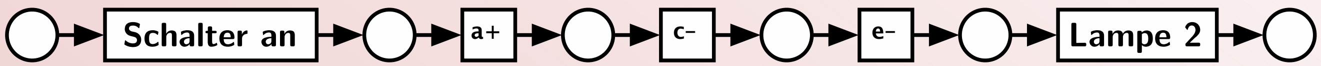
Mögliche Interpretationen (alternativ)

- seriell:

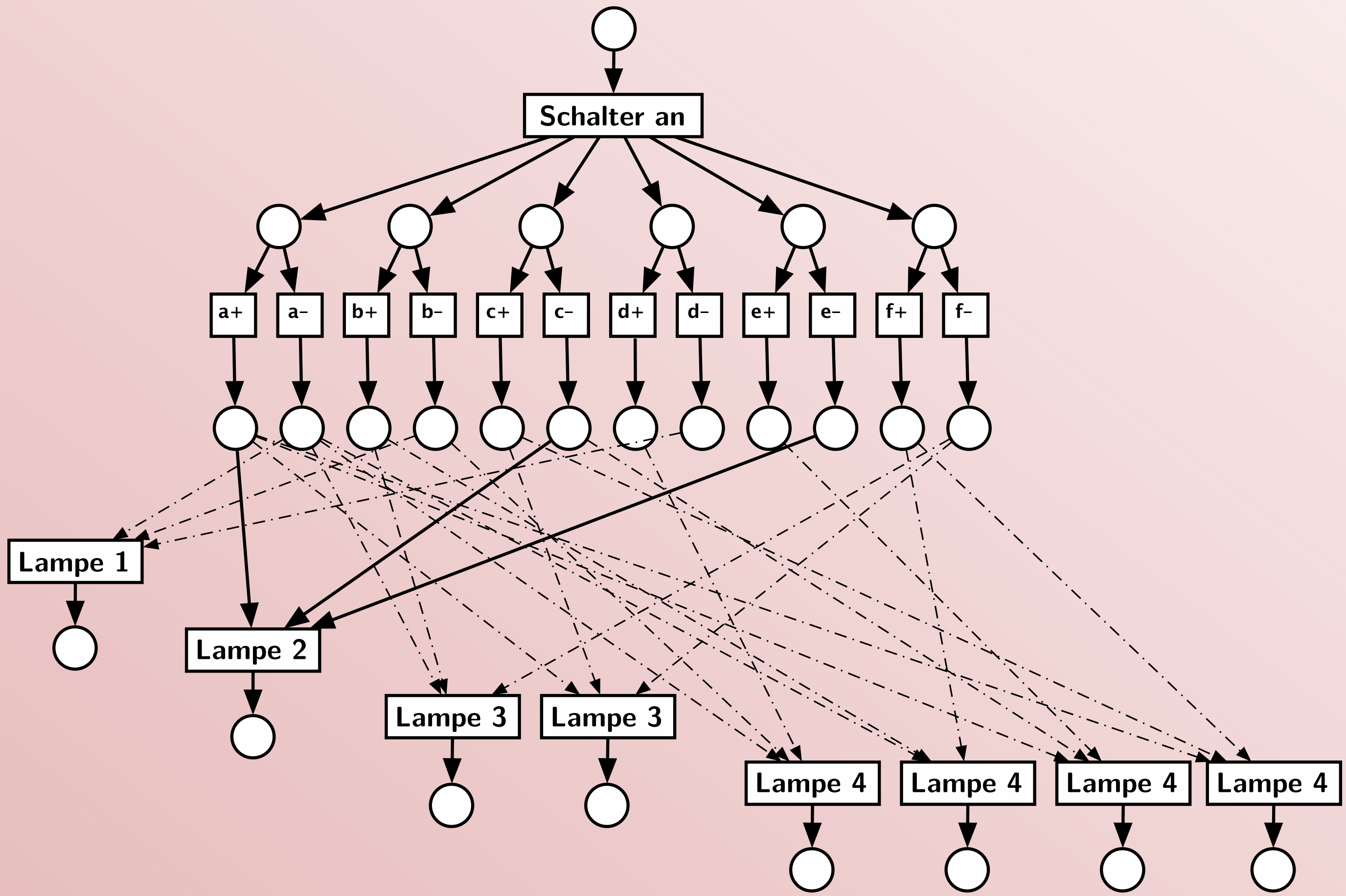


Mögliche Interpretationen (alternativ)

- seriell:

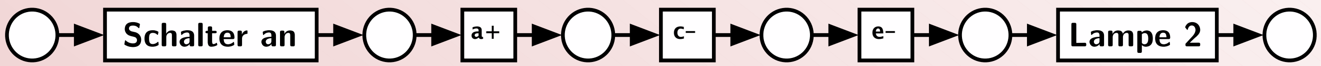


- nebenläufig:

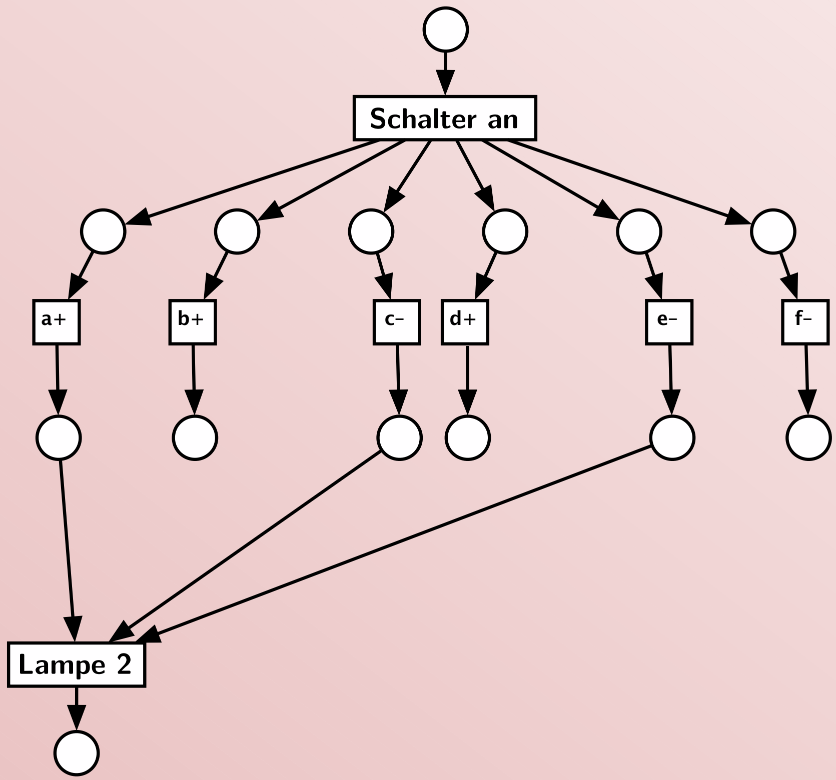


Mögliche Interpretationen (alternativ)

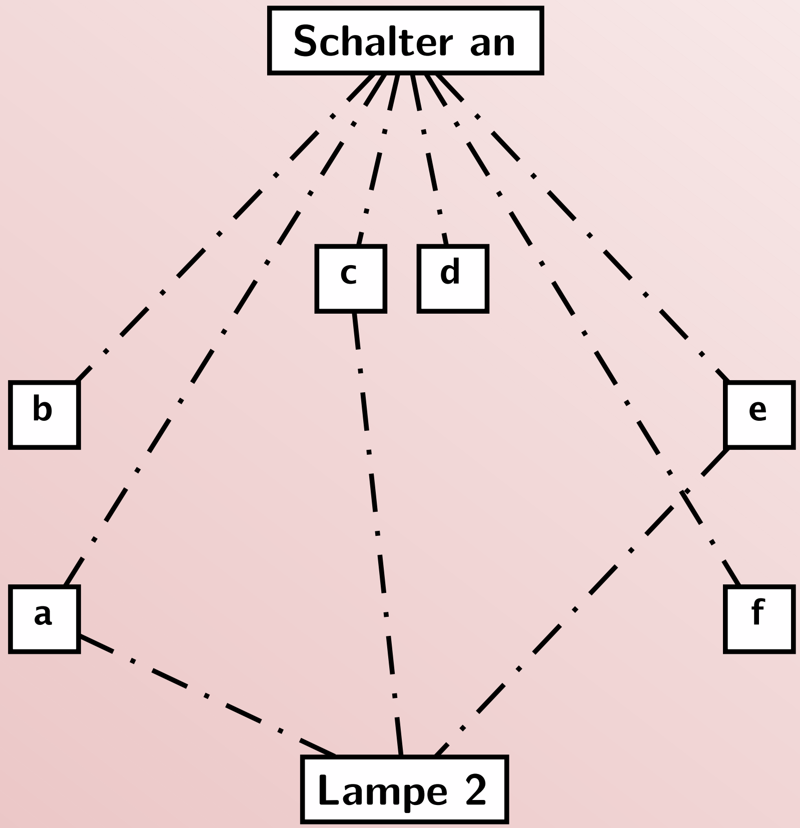
- seriell:

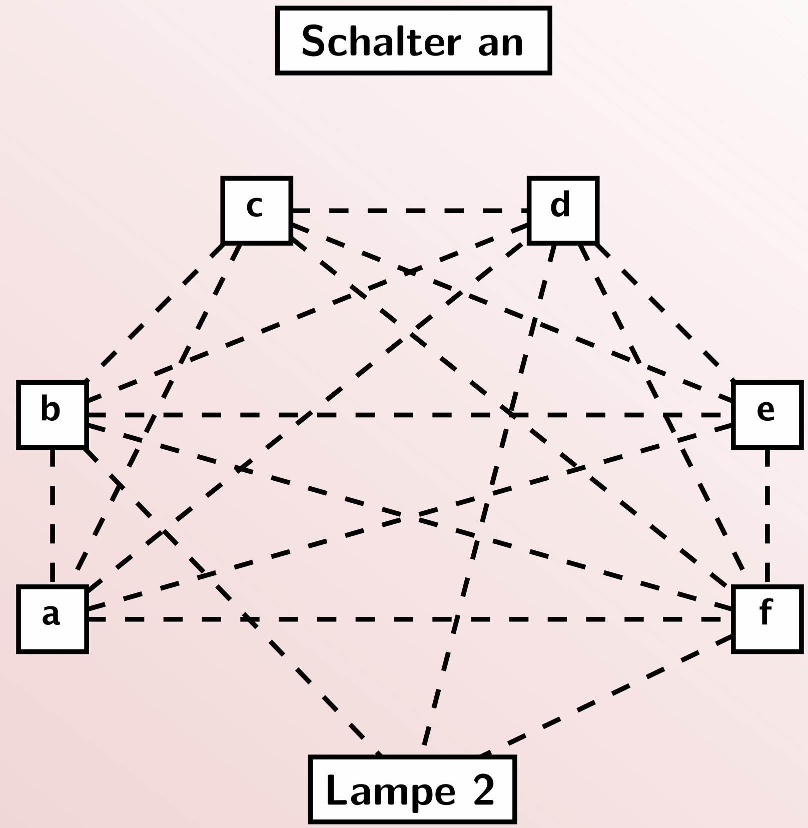


- nebenläufig:

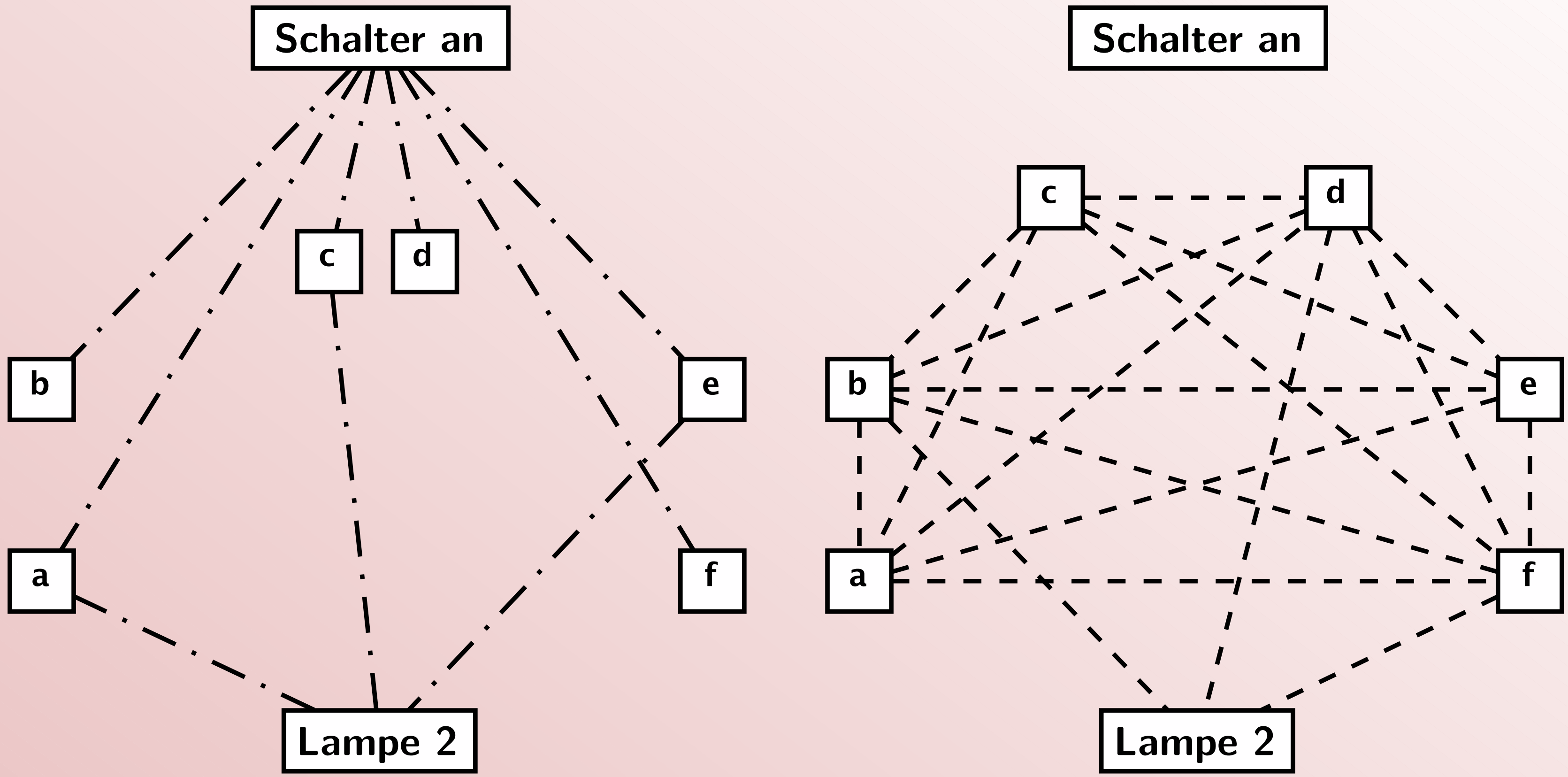


- a) Relation li und b) Relation co :



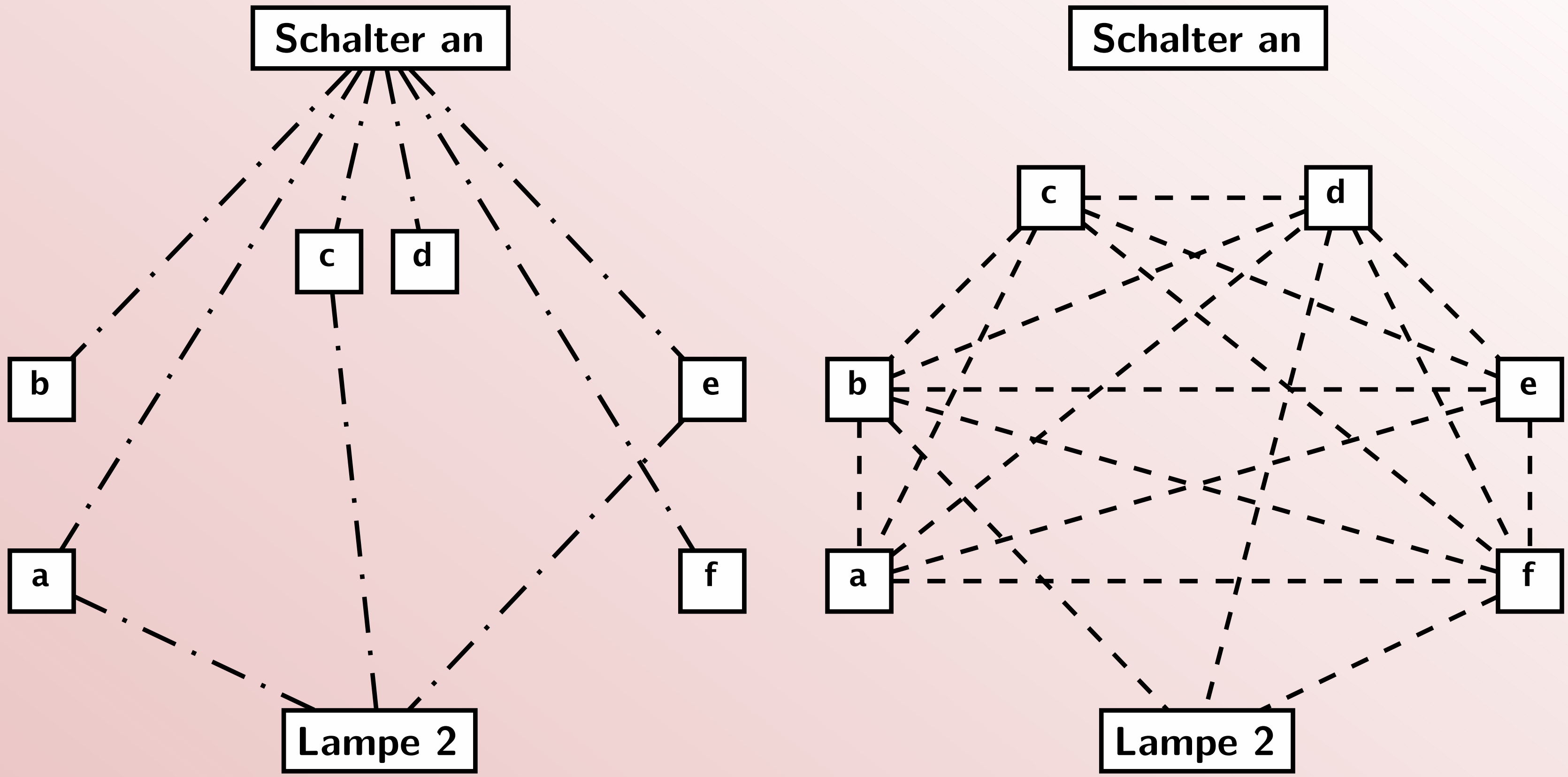


- a) Relation li und b) Relation co :



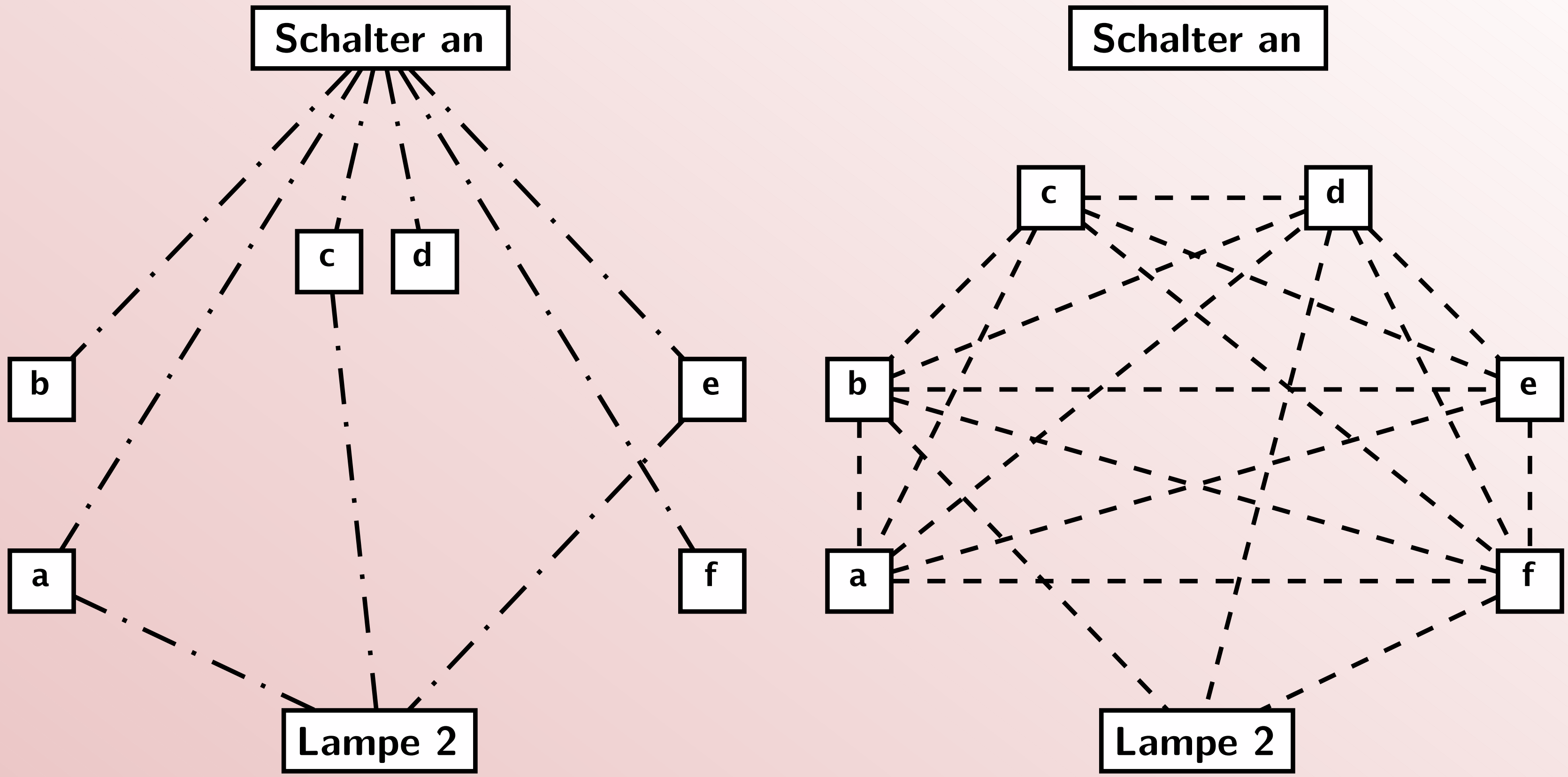
- ,,Schalter an" und ,,Lampe 2" sind *in Linie*, bilden aber keine Linie.

- a) Relation li und b) Relation co :



- „Schalter an" und „Lampe 2" sind *in Linie*, bilden aber keine Linie.
- Die Mengen $M_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $M_2 = \{b, d, f, \text{„Lampe 2"}\}$ bilden jeweils einen Schnitt, nicht jedoch ihre Vereinigung $M_1 \cup M_2$.

- a) Relation li und b) Relation co :



- ,,Schalter an" und ,,Lampe 2" sind *in Linie*, bilden aber keine Linie.
- Die Mengen $M_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $M_2 = \{b, d, f, \text{,,Lampe 2''}\}$ bilden jeweils einen Schnitt, nicht jedoch ihre Vereinigung $M_1 \cup M_2$.
- Die Nebenläufigkeitsrelation ist *nicht* transitiv !

Zusammenfassung

- Bei der seriellen Interpretation:
  - ▷ Das Schaltbild der Relais-Anordnung (unnötigerweise) auf die zeitliche Anordnung übertragen.
  - ▷ Entsprechend der einzigen Linie gilt $\mathrm{co} = \mathrm{id}$.
  - ▷ Es wurde die dreifache Gesamtschaltzeit in Kauf genommen.

Zusammenfassung

- Bei der seriellen Interpretation:
  - ▷ Das Schaltbild der Relais-Anordnung (unnötigerweise) auf die zeitliche Anordnung übertragen.
  - ▷ Entsprechend der einzigen Linie gilt $\mathrm{co} = \mathrm{id}$.
  - ▷ Es wurde die dreifache Gesamtschaltzeit in Kauf genommen.
- Dagegen wird bei der nebenläufigen Interpretation
  - ▷ nur die tatsächliche kausale Abhängigkeit in die zeitliche Anordnung übernommen,
  - ▷ die größtmögliche Nebenläufigkeit dargestellt (6 Funktionseinheiten entsprechen der Elementezahl des größten Schnitts).
  - ▷ die Gesamtschaltzeit nur durch die maximale Relaisschaltzeit bestimmt.

Ausführungsfolgen

Definition 6.11.

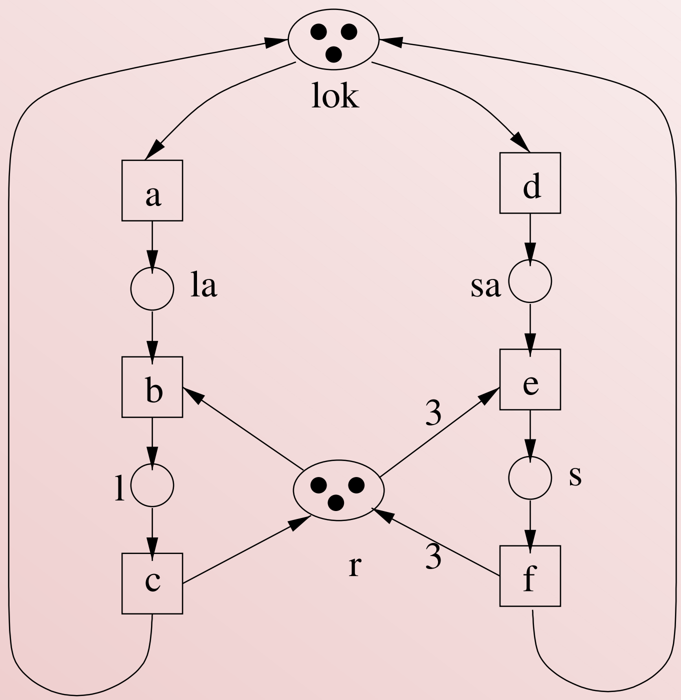
a) Für ein Netz $N = (P, T, F)$ bezeichnen
$^\circ N := \{p \in P \mid {}^\bullet p = \emptyset\}$ die Plätze ohne Eingangs- und
$N^\circ := \{p \in P \mid p^\bullet = \emptyset\}$ die Plätze ohne Ausgangstransitionen.

b) Sei $N = (P, T, F)$ das dem Auftragssystem $AS = (A, \lessdot)$ zugeordnete Kausalnetz (Def. 6.4).

- *Legt man in jeden Platz von $^\circ N$ bzw. N° genau eine Marke, so erhält man Markierungen m_0 bzw. m_E.*
- *Dann heißt $F_E(AS) := F((P, T, F, m_0), \{m_E\})$ die* Menge der Ausführungsfolgen *(execution sequences) von AS.*

$$F_E(AS) := \{w \in T^* \mid w = t_0 \ldots t_n, t_i \in T \text{ für } 0 \le i \le n \text{ und } m_0 \xrightarrow[F]{t_0} m_1 \text{ sowie } m_j \xrightarrow[F]{t_j} m_{j+1} \text{ für } 1 \le j \le n-1 \text{ und } m_n \xrightarrow[F]{t_n} m_E\}$$

P/T-Netz mit Kantenbewertung



- Die drei Marken in *lok* stellen jeweils einen Auftrag dar.
- Für deren Bearbeitung kann es nötig sein, auf einen bestimmten Datensatz zuzugreifen, der allen Aufträgen zugänglich ist.

Prozeß als Netz

- Je Marke eine Kopie der entsprechenden Stelle.
- Schalten einer Transition $\Rightarrow$ neue Kopien der Nachbedingungen.
  - Erneutes Auftreten einer Transition ist eine neue Verpflichtung der Funktionseinheit.
- Das Netz ist (bis auf die Markierung) ein Kausalnetz.

Prozeß als Netz

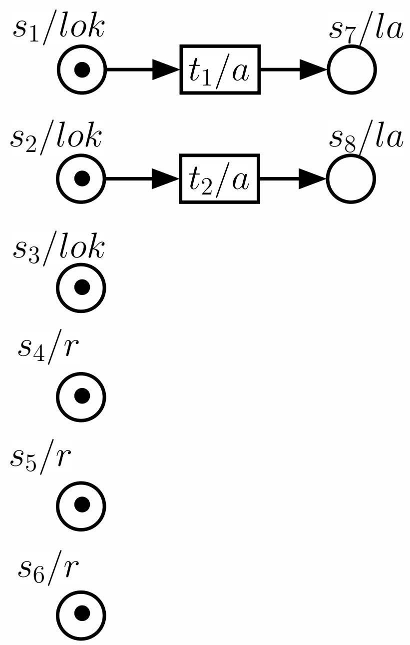
- Je Marke eine Kopie der entsprechenden Stelle.
- Schalten einer Transition $\Rightarrow$ neue Kopien der Nachbedingungen.
  - Erneutes Auftreten einer Transition ist eine neue Verpflichtung der Funktionseinheit.
- Das Netz ist (bis auf die Markierung) ein Kausalnetz.

Prozeß als Netz

- Je Marke eine Kopie der entsprechenden Stelle.
- Schalten einer Transition ⇒ neue Kopien der Nachbedingungen.
  - Erneutes Auftreten einer Transition ist eine neue Verpflichtung der Funktionseinheit.
- Das Netz ist (bis auf die Markierung) ein Kausalnetz.

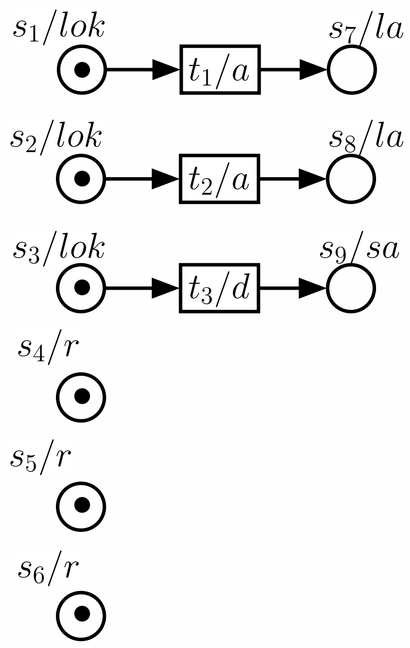
Prozeß als Netz

- Je Marke eine Kopie der entsprechenden Stelle.
- Schalten einer Transition ⇒ neue Kopien der Nachbedingungen.
  - Erneutes Auftreten einer Transition ist eine neue Verpflichtung der Funktionseinheit.
- Das Netz ist (bis auf die Markierung) ein Kausalnetz.



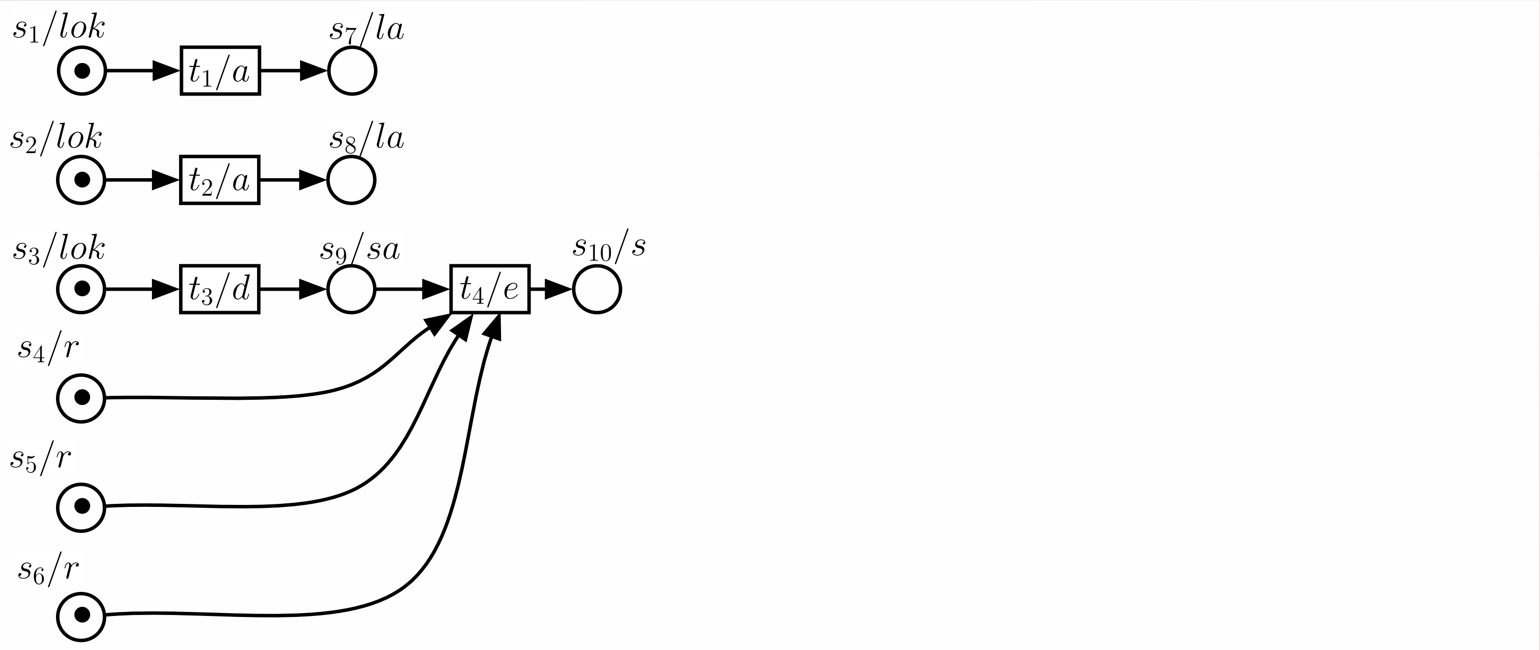
Prozeß als Netz

- Je Marke eine Kopie der entsprechenden Stelle.
- Schalten einer Transition $\Rightarrow$ neue Kopien der Nachbedingungen.
  - Erneutes Auftreten einer Transition ist eine neue Verpflichtung der Funktionseinheit.
- Das Netz ist (bis auf die Markierung) ein Kausalnetz.



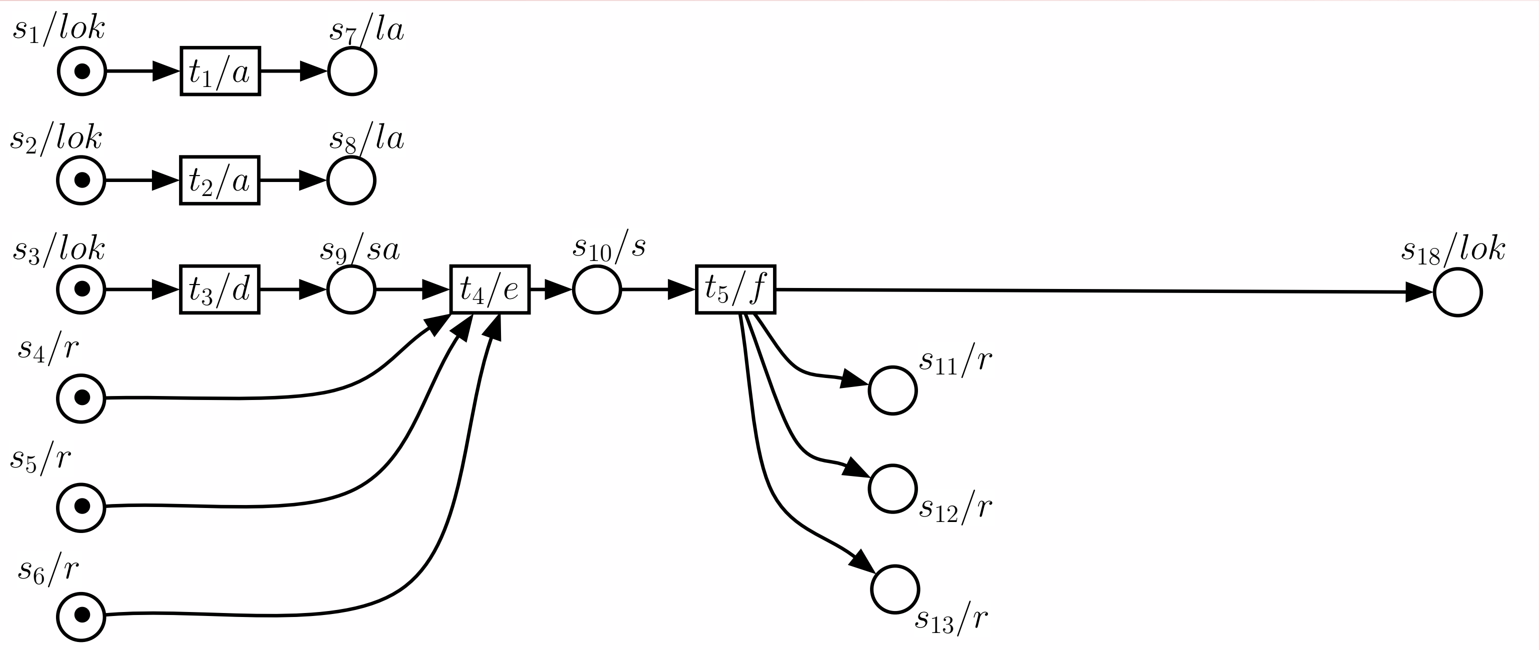
Prozeß als Netz

- Je Marke eine Kopie der entsprechenden Stelle.
- Schalten einer Transition $\Rightarrow$ neue Kopien der Nachbedingungen.
  - Erneutes Auftreten einer Transition ist eine neue Verpflichtung der Funktionseinheit.
- Das Netz ist (bis auf die Markierung) ein Kausalnetz.



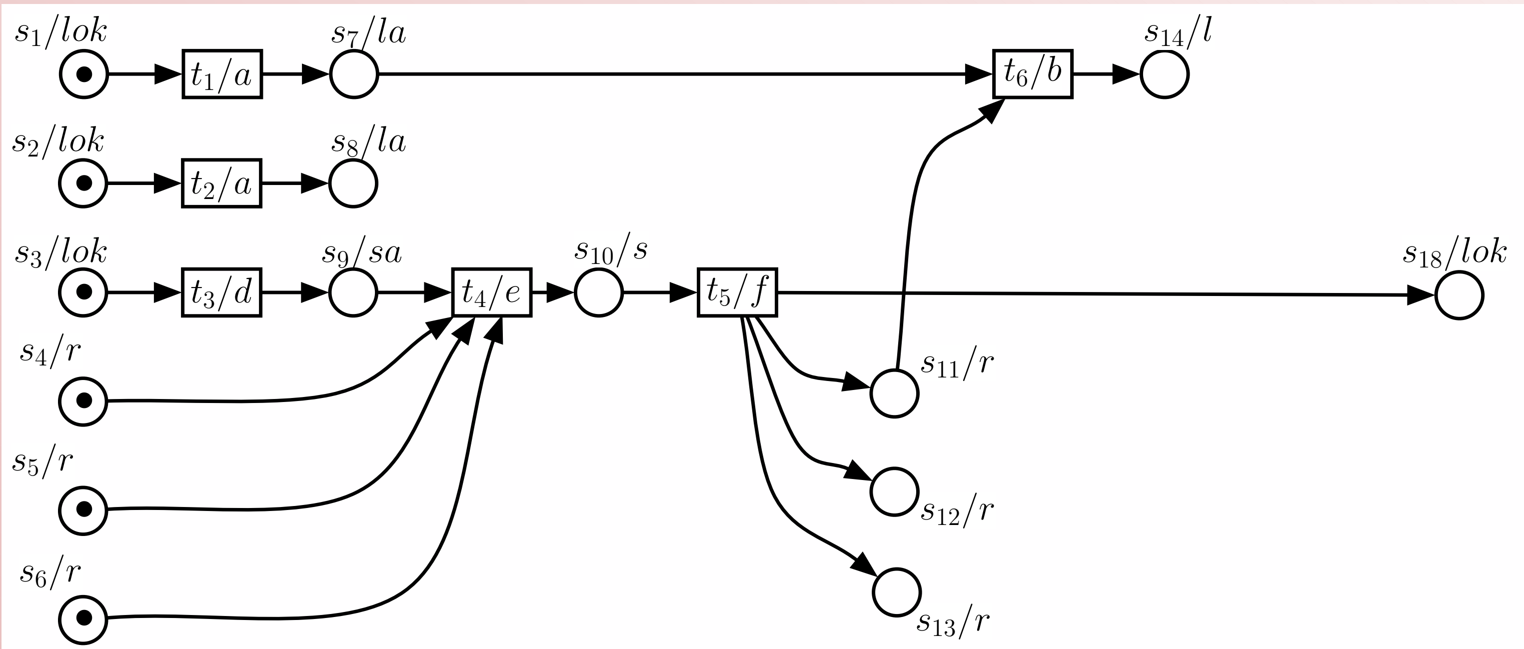
Prozeß als Netz

- Je Marke eine Kopie der entsprechenden Stelle.
- Schalten einer Transition $\Rightarrow$ neue Kopien der Nachbedingungen.
  - Erneutes Auftreten einer Transition ist eine neue Verpflichtung der Funktionseinheit.
- Das Netz ist (bis auf die Markierung) ein Kausalnetz.



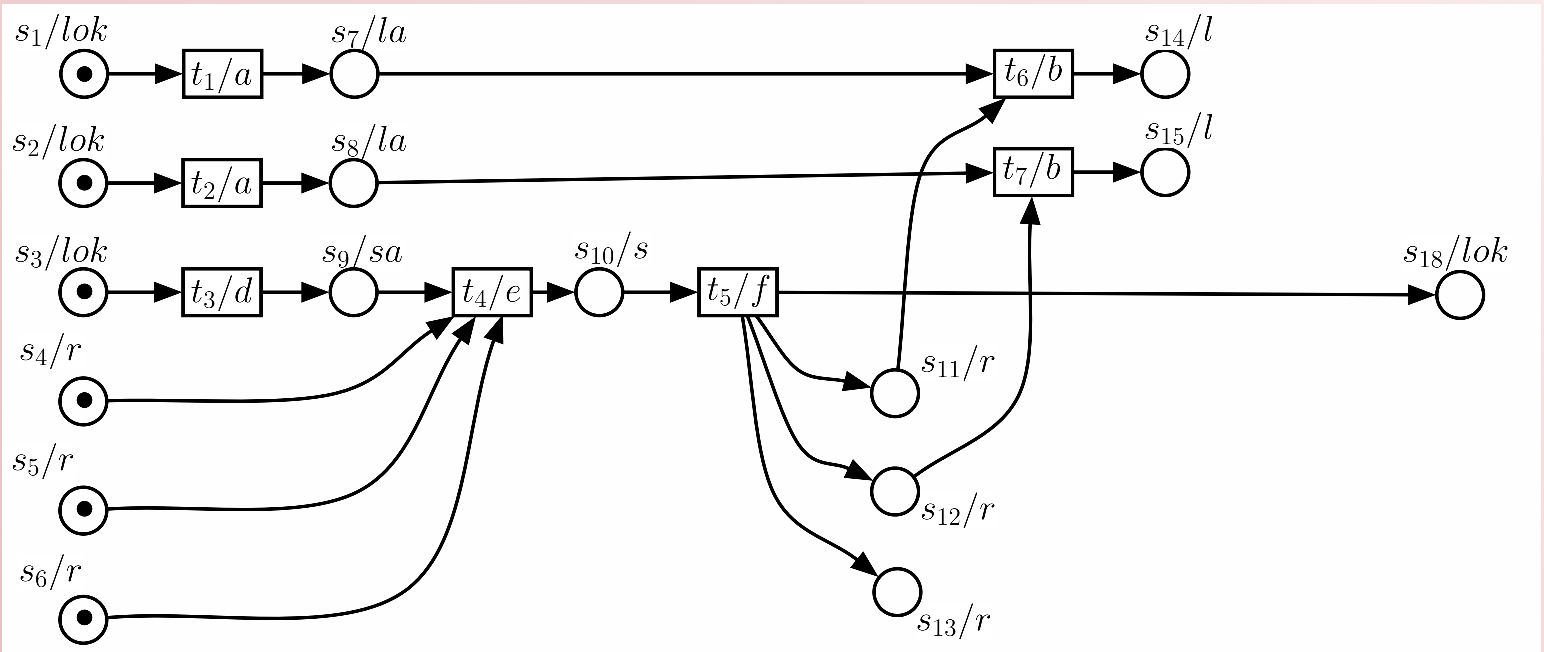
Prozeß als Netz

- ▷ Je Marke eine Kopie der entsprechenden Stelle.
- ▷ Schalten einer Transition $\Rightarrow$ neue Kopien der Nachbedingungen.
  - ◇ Erneutes Auftreten einer Transition ist eine neue Verpflichtung der Funktionseinheit.
- ▷ Das Netz ist (bis auf die Markierung) ein Kausalnetz.



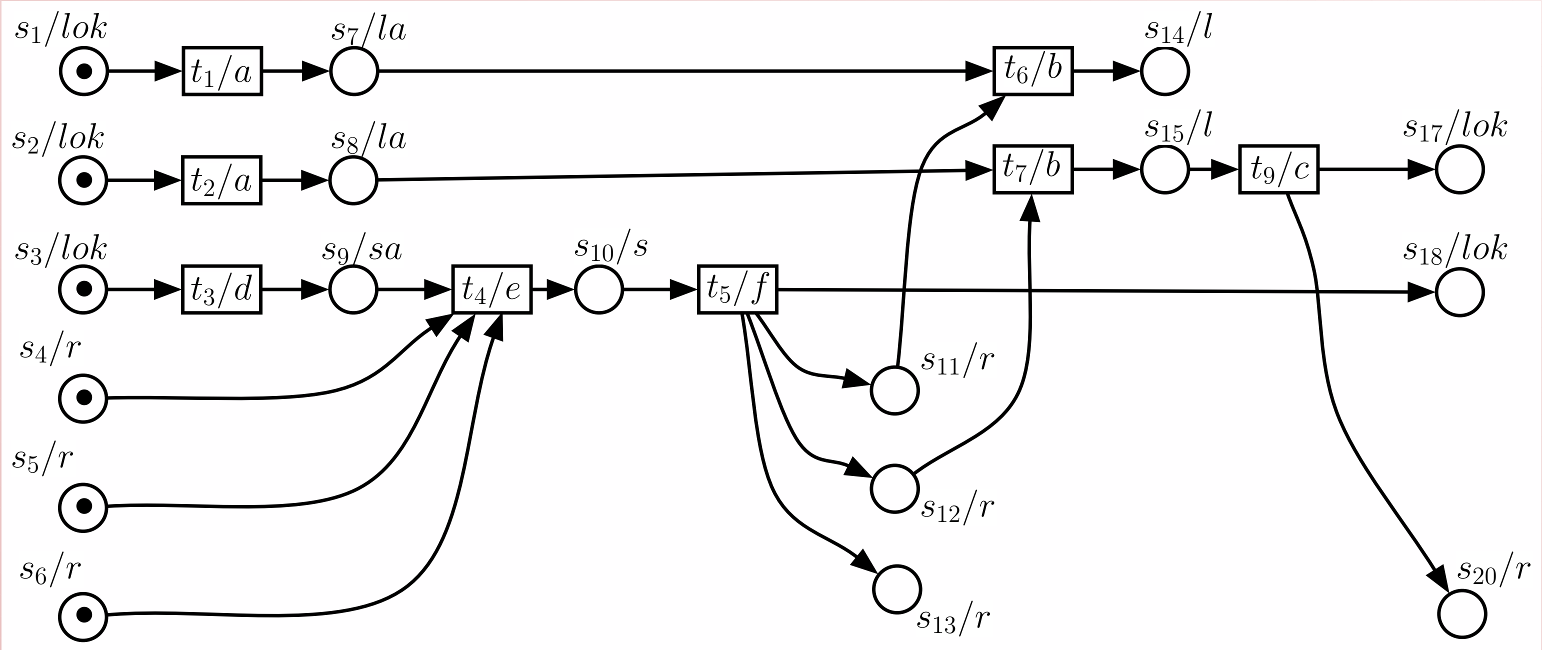
Prozeß als Netz

- Je Marke eine Kopie der entsprechenden Stelle.
- Schalten einer Transition $\Rightarrow$ neue Kopien der Nachbedingungen.
  - Erneutes Auftreten einer Transition ist eine neue Verpflichtung der Funktionseinheit.
- Das Netz ist (bis auf die Markierung) ein Kausalnetz.



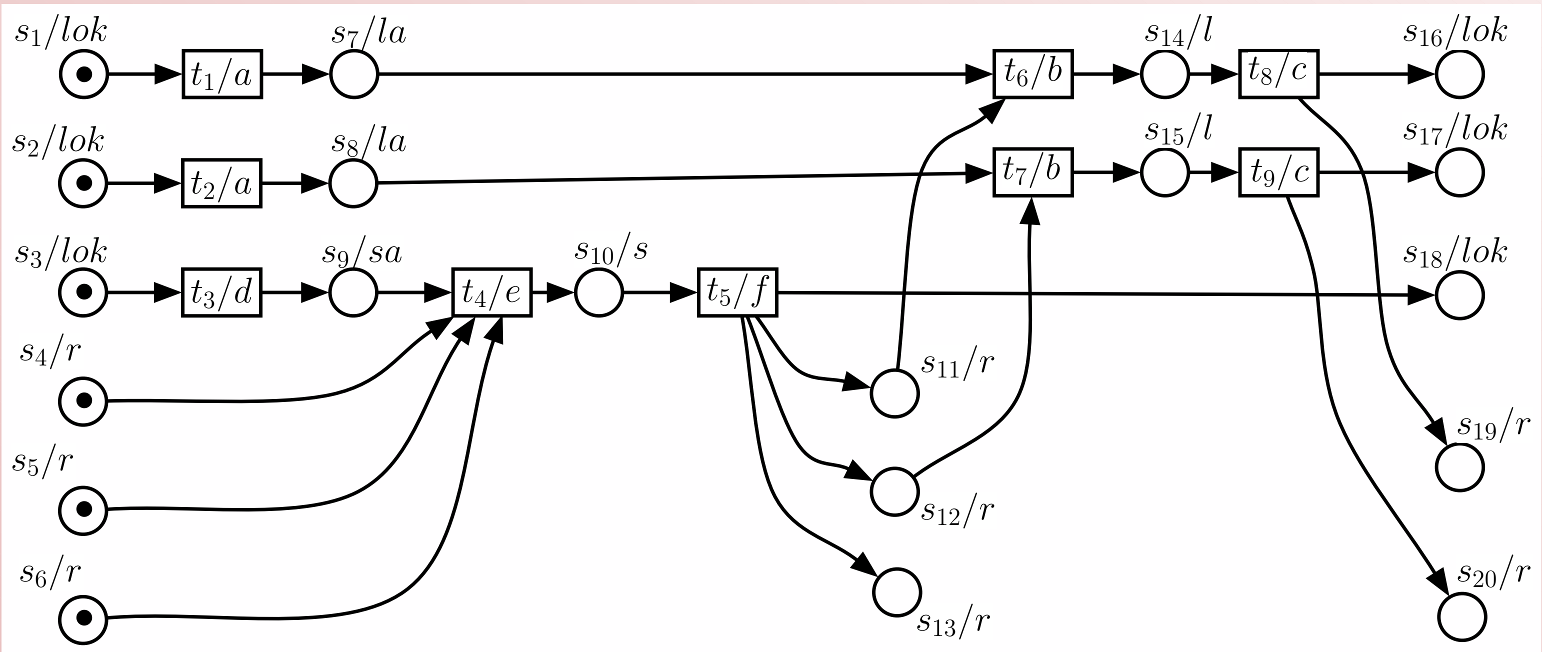
Prozeß als Netz

- ▷ Je Marke eine Kopie der entsprechenden Stelle.
- ▷ Schalten einer Transition ⇒ neue Kopien der Nachbedingungen.
  - ◇ Erneutes Auftreten einer Transition ist eine neue Verpflichtung der Funktionseinheit.
- ▷ Das Netz ist (bis auf die Markierung) ein Kausalnetz.

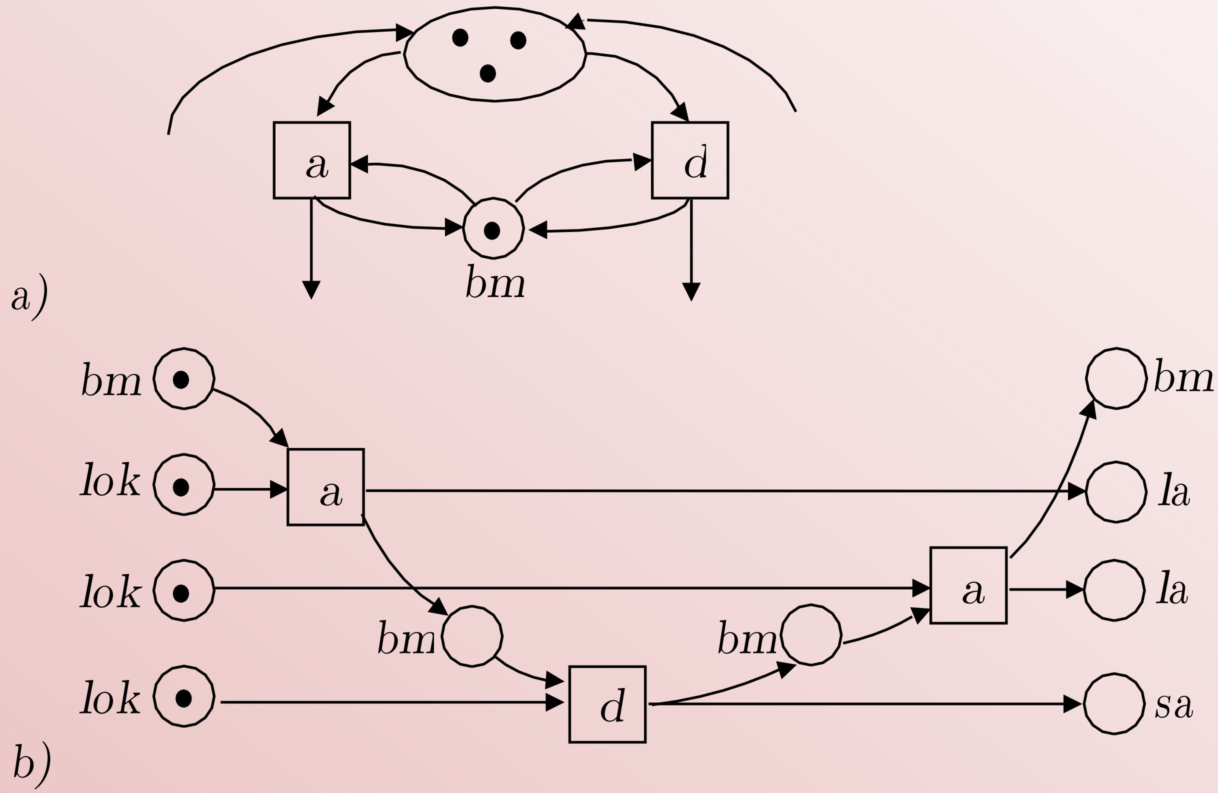


Prozeß als Netz

- Je Marke eine Kopie der entsprechenden Stelle.
- Schalten einer Transition $\Rightarrow$ neue Kopien der Nachbedingungen.
  - Erneutes Auftreten einer Transition ist eine neue Verpflichtung der Funktionseinheit.
- Das Netz ist (bis auf die Markierung) ein Kausalnetz.

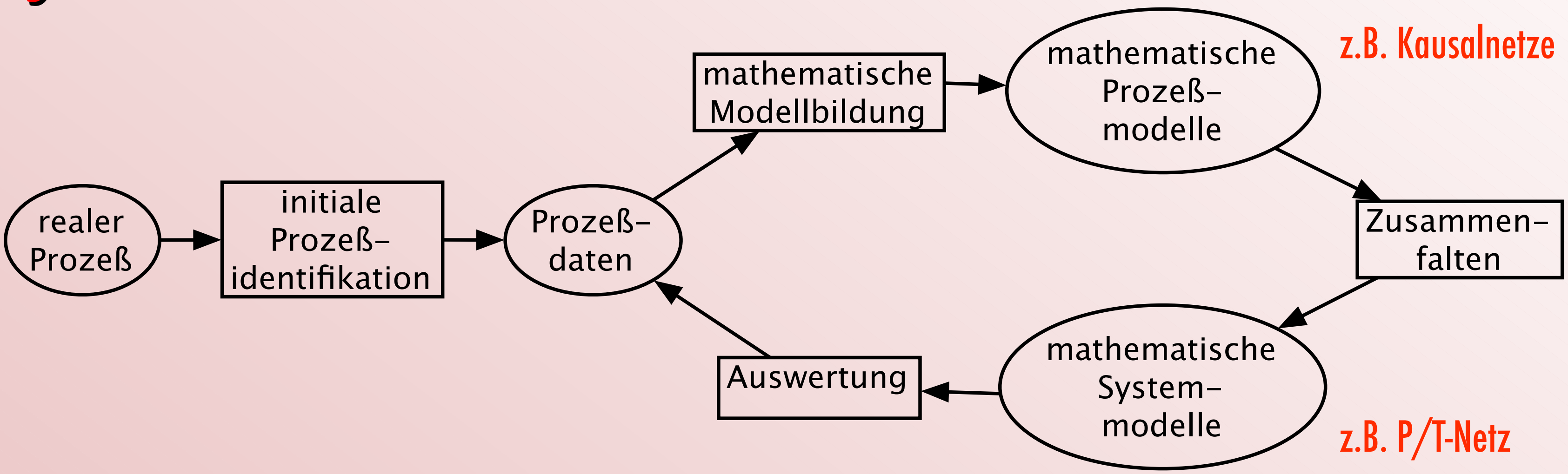


Variante mit Betriebsmittel bm und zugehöriger Prozess



- Das Auftreten von a, d und a liegt in Linie, entspricht damit eindeutig dem seriellen Prozeß ada.
- Solche Kausalnetze nennen wir **asynchrone Prozessdarstellung** oder einfach **Prozess des P/T-Netzes**.

Bildung mathematischer Prozeß- und Systemmodelle



- Nach *DIN 66201*:
  - ▷ Ein **Prozess** ist eine Gesamtheit von aufeinander einwirkenden Vorgängen in einem System, durch die Materie, Energie oder Information umgeformt, transportiert oder gespeichert wird.
  - ▷ Ein **Prozessmodell** ist die Darstellung eines Prozesses aufgrund einer Prozessidentifikation oder aufgrund bekannter physikalischer Gesetze oder getroffener Annahmen.
- Unsere Prozesse entsprechen diesen Vorgaben aus *DIN 66201*.

Asynchrone Prozesse

Definition 6.12. *Sei $N = (P, T, F, W, m_0)$ ein P/T-Netz.*

Ein **asynchroner Prozess** *von N, kurz ein* **Prozess** *von N, ist ein Paar (N_K, φ), bestehend aus einem markierten Kausalnetz $N_K = (P_K, T_K, F_K, m_{0K})$ und einer Abbildung $\varphi : P_K \cup T_K \Rightarrow P \cup T$ mit folgenden Eigenschaften :*

a) $\varphi(P_K) \subset P$, $\varphi(T_K) \subset T$ *und* $(x, y) \in F_K \Rightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in F$
(die Struktur von N_K „paßt" zu N)

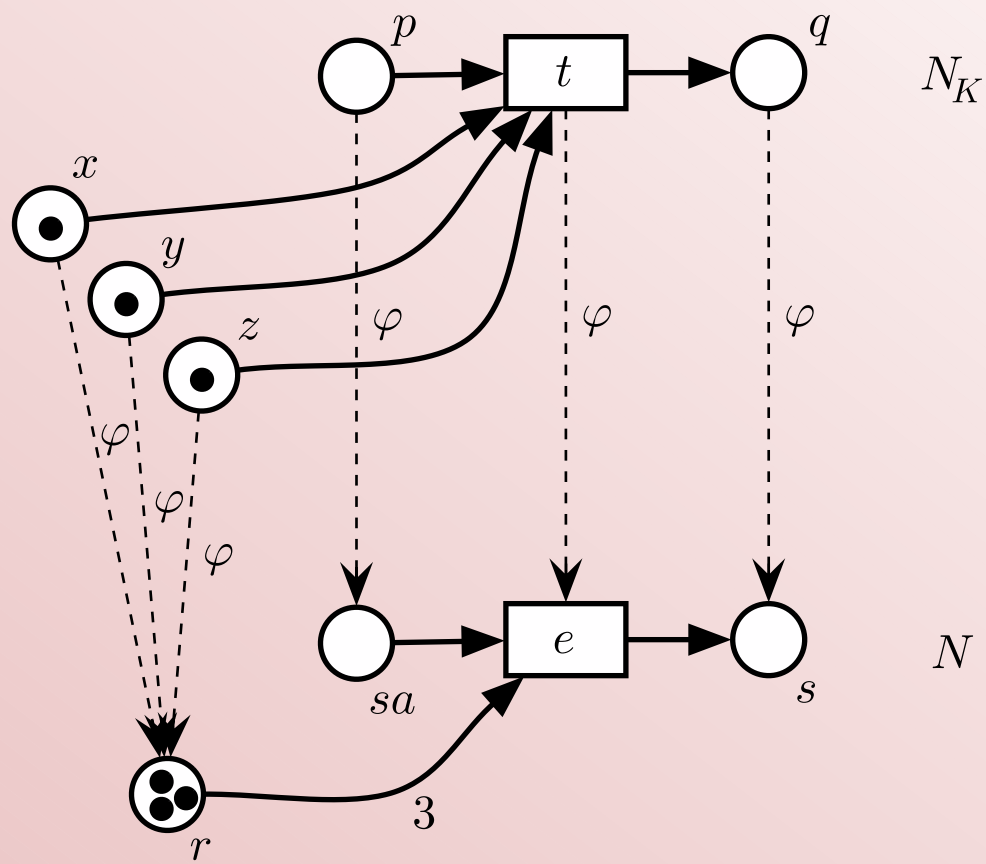
b) $^\circ N_K$ *ist ein Schnitt von* N_K *und* m_{0K} *enthält genau in den Stellen von* $^\circ N_K$ *je eine Marke, sowie*

$$m_0(p) = |\varphi^{-1}(p) \cap^\circ N_K| \text{ für alle } p \in P \qquad (m_{0K} \text{ stellt } m_0 \text{ dar})$$

c) $\forall t \in T_K \ \forall p \in {}^\bullet\varphi(t) : W(p, \varphi(t)) = |\varphi^{-1}(p) \cup {}^\bullet t|$
$\forall t \in T_K \ \forall p \in \varphi(t)^\bullet : W(\varphi(t), p) = |\varphi^{-1}(p) \cup t^\bullet|$
(Anzahl der Marken in p = Anzahl der Kopien von p in N_K.)

▷ $Proz(N)$ *bezeichne die* **Menge aller Prozesse** (N_K, φ) *von N.*

Ein Beispiel



Konstruktive (iterative) Prozeßdefinition

- **Konstruktion** eines Prozesses (N_K, φ) zu einem P/T-Netz $N = (P, T, F, W, m_0)$.

Schritt 1: Für jede Stelle $p \in P$ mit $\mathbf{m}_0(p) = r$ Marken zeichne r Plätze in n_K und markiere sie jeweils mit einer Marke.

Konstruktive (iterative) Prozeßdefinition

- **Konstruktion** eines Prozesses (N_K, φ) zu einem P/T-Netz $N = (P, T, F, W, m_0)$.

Schritt 1: Für jede Stelle $p \in P$ mit $\mathbf{m}_0(p) = r$ Marken zeichne r Plätze in n_K und markiere sie jeweils mit einer Marke.

Schritt 2: Betrachte N_K° für das bis jetzt konstruierte Netz N_K.

▷ Enthält für eine Transition $t \in T$ die Menge N_K° jeden der Eingangsplätze $p \in {}^\bullet t$ mindestens $W(p, t)$-mal,

dann zeichne t als neue Transition mit diesen $W(p, t)$ Plätzen als Eingangplätze und

für jedes $p \in t^\bullet$ genau $W(t, p')$ neue Kopien von p' als Ausgangsplätze.

Konstruktive (iterative) Prozeßdefinition

- **Konstruktion** eines Prozesses (N_K, φ) zu einem P/T-Netz $N = (P, T, F, W, m_0)$.

Schritt 1: Für jede Stelle $p \in P$ mit $\mathbf{m}_0(p) = r$ Marken zeichne r Plätze in n_K und markiere sie jeweils mit einer Marke.

Schritt 2: Betrachte N_K° für das bis jetzt konstruierte Netz N_K.

▷ Enthält für eine Transition $t \in T$ die Menge N_K°
jeden der Eingangsplätze $p \in {}^\bullet t$ mindestens $W(p,t)$-mal,

dann zeichne t als neue Transition mit diesen $W(p,t)$ Plätzen als Eingangplätze und

für jedes $p \in t^\bullet$ genau $W(t,p')$ neue Kopien von p' als Ausgangsplätze.

Schritt 3: Höre auf oder wiederhole Schritt 2.

Nebenläufigkeit in Prozessen

- Zwei Transitionen eines Prozesses heißen **nebenläufig**, wenn sie in der Relation co liegen, ansonsten heißen sie **sequentiell**.
- Nebenläufige Transitionen in asynchronen Prozessen $\Rightarrow$ ihr Schalten steht in keinerlei Beziehung zueinander.

Nebenläufigkeit in Prozessen

- Zwei Transitionen eines Prozesses heißen **nebenläufig**, wenn sie in der Relation co liegen, ansonsten heißen sie **sequentiell**.
- Nebenläufige Transitionen in asynchronen Prozessen $\Rightarrow$ ihr Schalten steht in keinerlei Beziehung zueinander.
- Häufig können/müssen Schaltbeginn und Schaltende eindeutig **Zeitpunkten** zugeordnet werden, die bezüglich einer **zentralen Uhr** gemessen werden.
  - ▷ Solche Prozesse nennen wir synchron.
    - ◇ Formal wird dies definiert durch . . .

Nebenläufigkeit/Sequentialität

Definition 6.13. *Gegeben sei ein P/T-Netz* $N = (P, T, F, W, m_0)$ *und ein asynchroner Prozess* (N_K,φ) *mit* $N_K = (P_K, T_K, F_K, W_K, m_{0K})$ *von N.*

a) *Zwei Transitionen* $t_1, t_2 \in t_K$ *heißen* **nebenläufig** *(concurrent), wenn gilt* $t_1 \text{ co } t_2$*. und* **sequentiell** *(sequential), falls* $t_1 \text{ li } t_2$

b) (N_K, φ) *heißt* **sequentiell**, *falls alle Elemente* $t \in T_K$ *in Linie liegen.*

c) (N_K, φ) *heißt* **synchron** *(synchronous), falls es Abbildungen*

$$a : T_K \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{und} \qquad e : T_K \to \mathbb{R}^+$$

gibt mit

$$a(t_1) \leq e(t_1)$$

und

$$t_1 < t_2 \Rightarrow e(t_1) \leq a(t_2)$$

für alle $t_1, t_2 \in T_K$.

$a(t)$ *heißt* **Anfangszeitpunkt**, $e(t)$ *heißt* **Endzeitpunkt** *von* t.

d) *Zwei Transitionen t_1, t_2 eines synchronen Prozesses heißen* **kollateral**, *falls*

$$]a(t_1); e(t_1)[\ \cap\ ]a(t_2); e(t_2)[\ \neq \emptyset,$$

d.h. $\exists z \in \mathbb{R}^+ : a(t_1) < z < e(t_1) \wedge a(t_2) < z < e(t_2)$,

- ▷ *Ansonsten gilt* $e(t_1) \leq a(t_2)$ *und* t_1 *und* t_2 *sind* **seriell**.

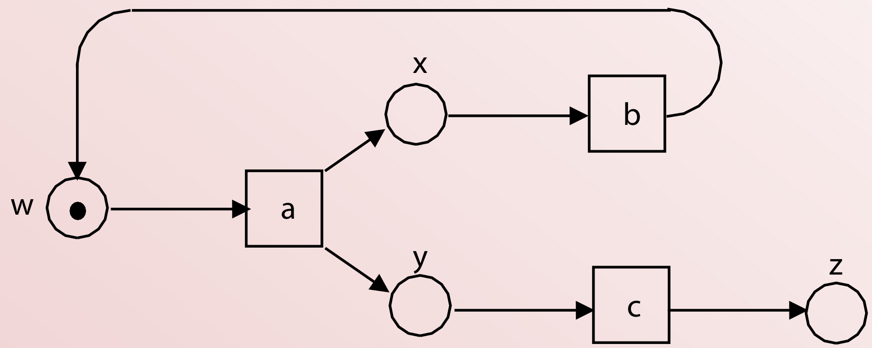
e) *Ein synchroner Prozess* (n_K, φ) *heißt* **seriell** *(serial), falls je zwei Transitionen aus* T_K *seriell sind.*

- ▷ *In diesem Fall kann der Prozess auch als endliche oder unendliche Folge* $t_{i_1}t_{i_2}t_{i_3}\ldots$ *von Transitionen aus* T_K *dargestellt werden.*

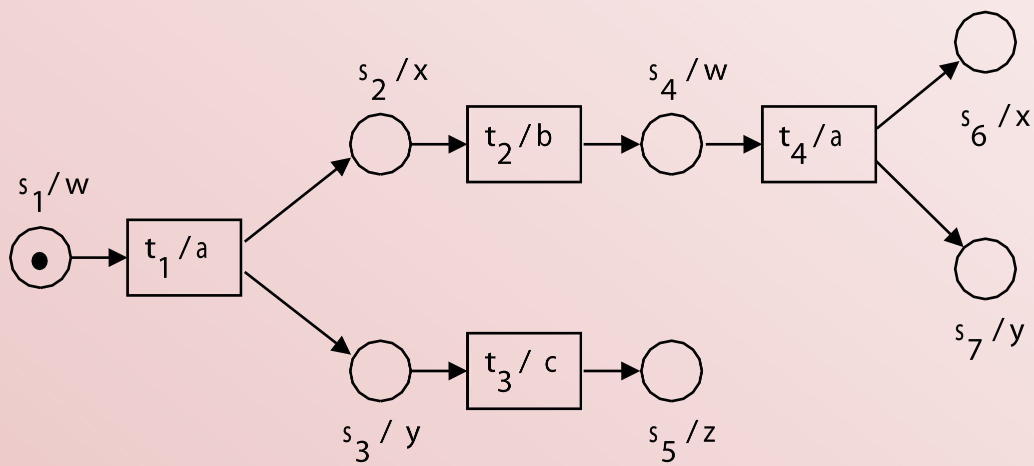
- ▷ *Die Folge*

$$\varphi(t_{i_1}t_{i_2}t_{i_3}\ldots) := \varphi(t_{i_1})\varphi(t_{i_2})\varphi(t_{i_3})\ldots$$

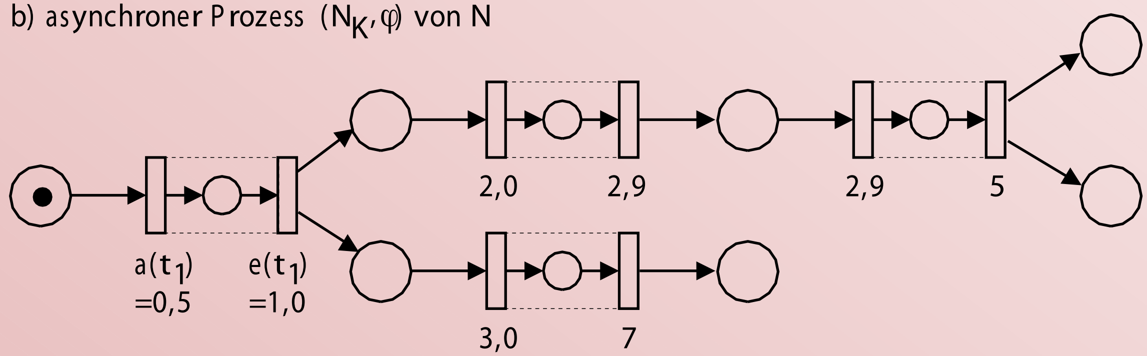
heißt dann **serieller Prozess** *oder* **Schaltfolge** *von* N.



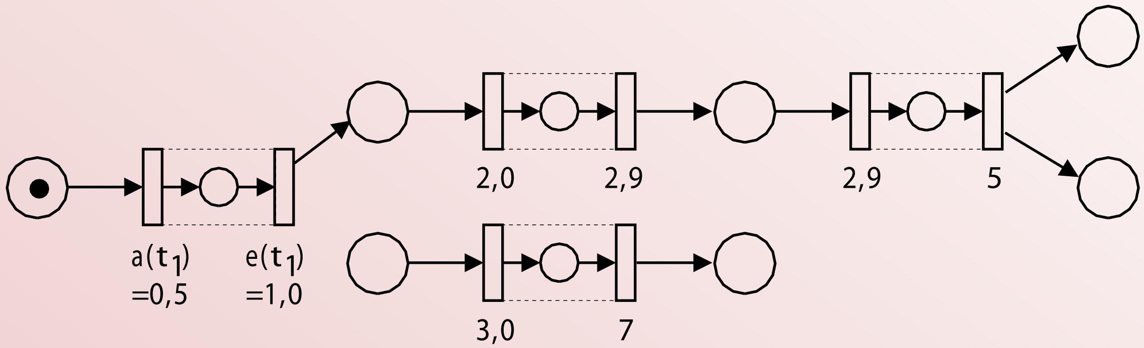
a) P/T-Netz N



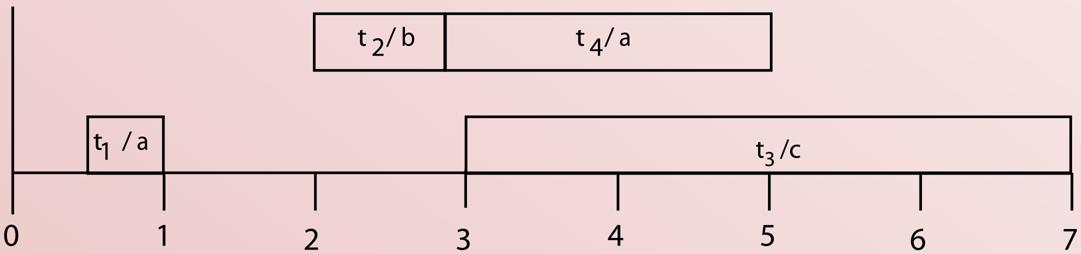
b) asynchroner Prozess (N_K, φ) von N



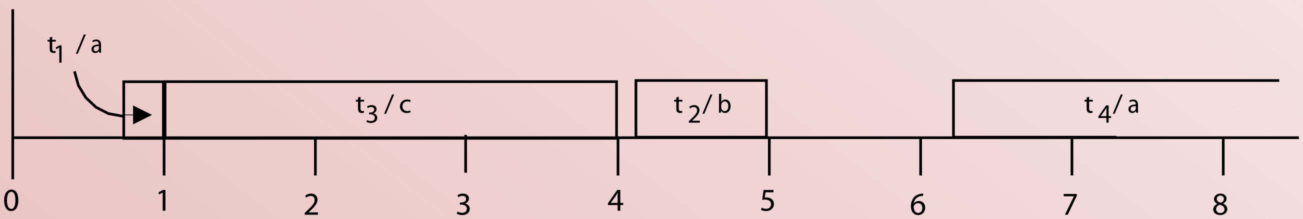
c) synchroner Prozess von N mit Anfangs- und Endzeitpunkten



c) synchroner Prozess von N mit Anfangs- und Endzeitpunkten



d) synchroner Prozess von N in Balkendarstellung



e) serieller Prozess von N in Balkendarstellung

$a\ c\ b\ a \in F(N)$

f) derselbe serielle Prozess als Schaltfolge

Logische und vektorielle Zeitstempel

- Kausalität und Zeit spielen eine wichtige Rolle beim Entwurf verteilter Systeme.
  - ▷ relative Ordnung von Ereignissen und Aktionen
  - ▷ meist keine zentrale einheitliche Zeitmessung möglich

Logische und vektorielle Zeitstempel

- Kausalität und Zeit spielen eine wichtige Rolle beim Entwurf verteilter Systeme.
  - relative Ordnung von Ereignissen und Aktionen
  - meist keine zentrale einheitliche Zeitmessung möglich
- Einführung *logischer Uhren* und *logischer Zeitstempel* für versandte Nachrichten.

Logische und vektorielle Zeitstempel

- Kausalität und Zeit spielen eine wichtige Rolle beim Entwurf verteilter Systeme.
  - ▷ relative Ordnung von Ereignissen und Aktionen
  - ▷ meist keine zentrale einheitliche Zeitmessung möglich
- Einführung *logischer Uhren* und *logischer Zeitstempel* für versandte Nachrichten.

Definition 6.14. *Ein* **Modell** *ist ein System von n Funktionseinheiten bzw. Prozessoren $p_0, \ldots, p_{n-1}$, die*

- *lokale Rechenschritte ausführen (sequentiell) und*
- *Nachrichten an andere versenden (Möglichkeit der Beeinflussung $\Rightarrow$ kausale Abhängigkeiten zwischen Ereignissen auf unterschiedlichen Prozessoren).*

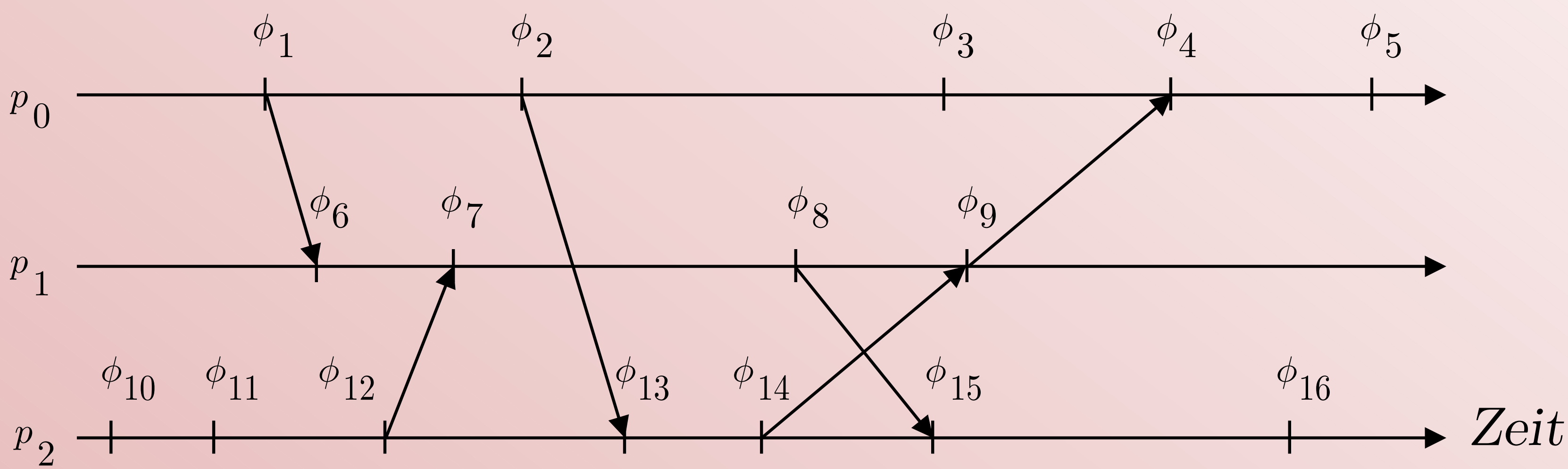
Ereignisse

- Ein **Ereignis** ist das Absenden bzw. Empfangen von Nachrichten.
  - ▷ Diese internen Schritte sind in der Ereignismenge $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ einer Ausführung auf einem Modell enthalten.

Ereignisse

- Ein **Ereignis** ist das Absenden bzw. Empfangen von Nachrichten.
  - Diese internen Schritte sind in der Ereignismenge $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ einer Ausführung auf einem Modell enthalten.
  - **Beispiel:**

    Darstellung eines Modells mit $n = 3$ Prozessoren durch lokale Zeitskalen



Relation vor

Definition 6.15. *Die Relation* $\mathbf{vor} \subseteq \Phi \times \Phi$ *sei wie folgt gegeben:*
Für $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$ *gelte* ϕ_1 $\mathbf{vor}$ ϕ_2, *falls eine der folgenden Aussagen zutrifft:*

a) ϕ_1 *und* ϕ_2 *sind Ereignisse eines Prozessors und* ϕ_1 *liegt vor* ϕ_2 *bezüglich dessen lokaler Zeit.*

b) ϕ_1 *ist Absende-Ereignis einer Nachricht* m, *die Prozessor* p_i *an* p_j *sendet und* ϕ_2 *ist das zu* m *gehörige Empfangs-Ereignis des Prozessors* p_j.

c) Es gibt ein Ereignis ϕ *mit* $(\phi_1\ \mathbf{vor}\ \phi)$ *und* $(\phi\ \mathbf{vor}\ \phi_2)$ *(transitiver Abschluss).*

Relation vor

Definition 6.15. *Die Relation* $\mathbf{vor} \subseteq \Phi \times \Phi$ *sei wie folgt gegeben:*
Für $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$ *gelte* ϕ_1 $\mathbf{vor}$ ϕ_2*, falls eine der folgenden Aussagen zutrifft:*

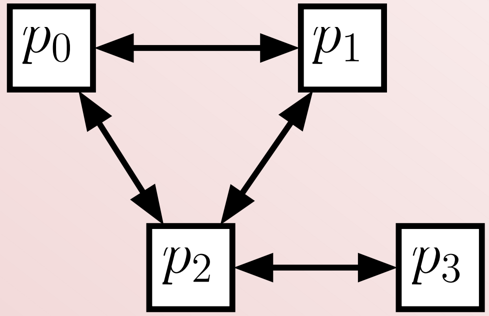
a) ϕ_1 *und* ϕ_2 *sind Ereignisse eines Prozessors und* ϕ_1 *liegt vor* ϕ_2 *bezüglich dessen lokaler Zeit.*

b) ϕ_1 *ist Absende-Ereignis einer Nachricht* m*, die Prozessor* p_i *an* p_j *sendet und* ϕ_2 *ist das zu* m *gehörige Empfangs-Ereignis des Prozessors* p_j*.*

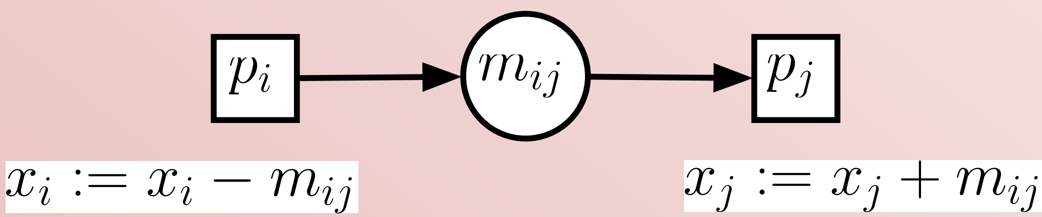
c) Es gibt ein Ereignis ϕ *mit* $(\phi_1\ \mathbf{vor}\ \phi)$ *und* $(\phi\ \mathbf{vor}\ \phi_2)$ *(transitiver Abschluss).*

- $(\Phi, \mathbf{vor})$ ist Striktordung.
  - Für Anwendungen in realen Systemen:
    - Erweiterung von $(\Phi, \mathbf{vor})$ zu einer linearen Ordnung, d.h. eine lineare Vervollständigung, welche die $\mathbf{vor}$-Relation nicht verletzt
    - Transformation lokaler Zeitskalen in konsistente globale Zeitskalen

Banksystem mit 4 Filialen $p_0, \ldots p_3$



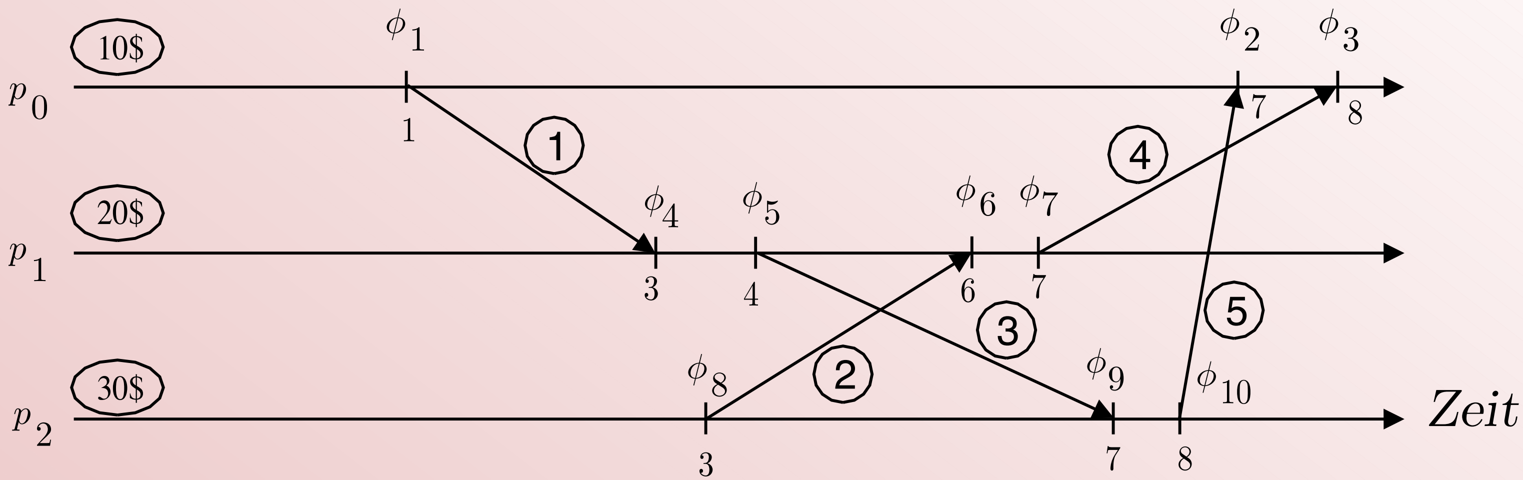
- Funktionseinheiten (Filialen) p_i enthalten lokale Variablen x_i mit aktuellem Kontostand.
- Über die Kanäle wird als Nachricht eine Geldmenge m_{ij} von p_i nach p_j transferiert:



Annahmen über das System

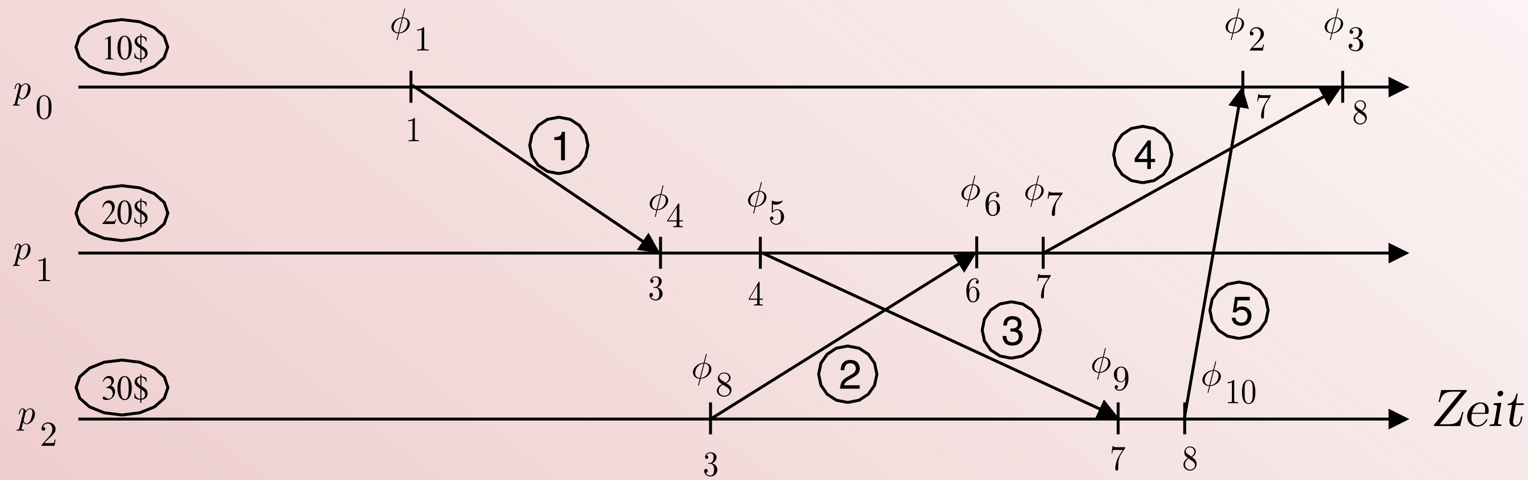
- fortwährende Aktivität, d.h. jede FE versendet unendlich oft eine Nachricht an jede andere FE.
- Termination einer FE: ständig werden Nachrichten mit $m = 0$ abgesandt.
- Anfangszustand: $(x_0, \ldots, x_{n-1}) = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ und keine Nachricht ist unterwegs.
- $c := \sum_{i=0}^{n-1} a_i$ ist die Gesamtgeldmenge.

Lokale Zeitskalen

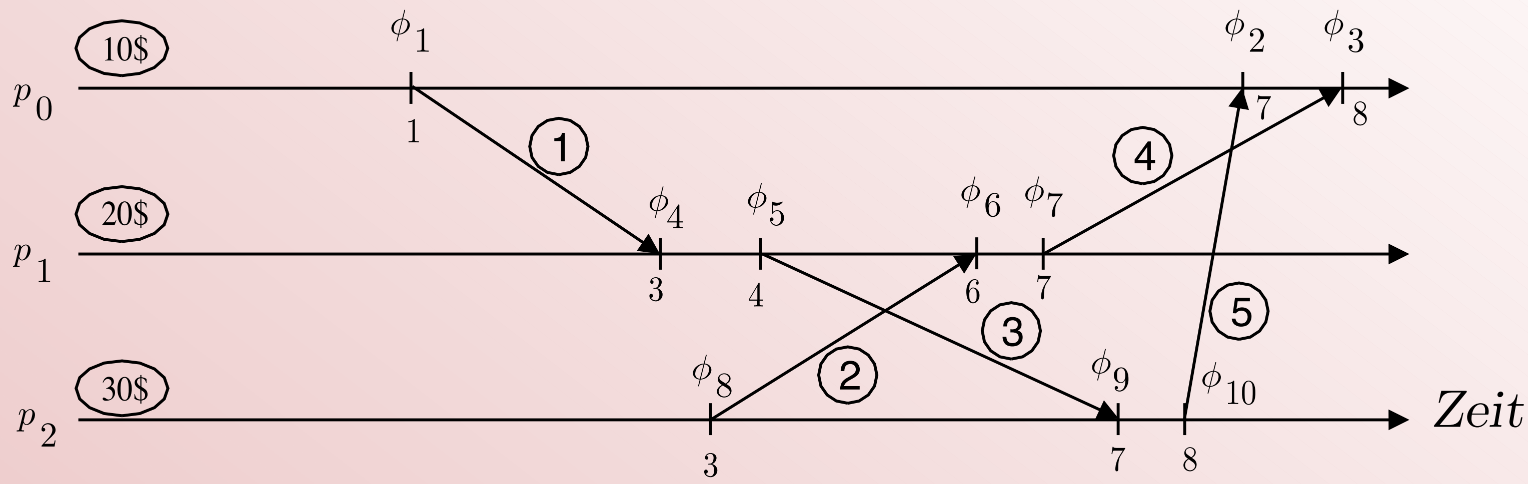


- Beispielsweise ist:
  - **Gesamtgeldmenge:** $10 + 20 + 30 = 60$
  - $m(\phi_8, \phi_6) = 2$
  - $1, 2, 3, \ldots$ sind die Zeitzustände der lokalen Uhren

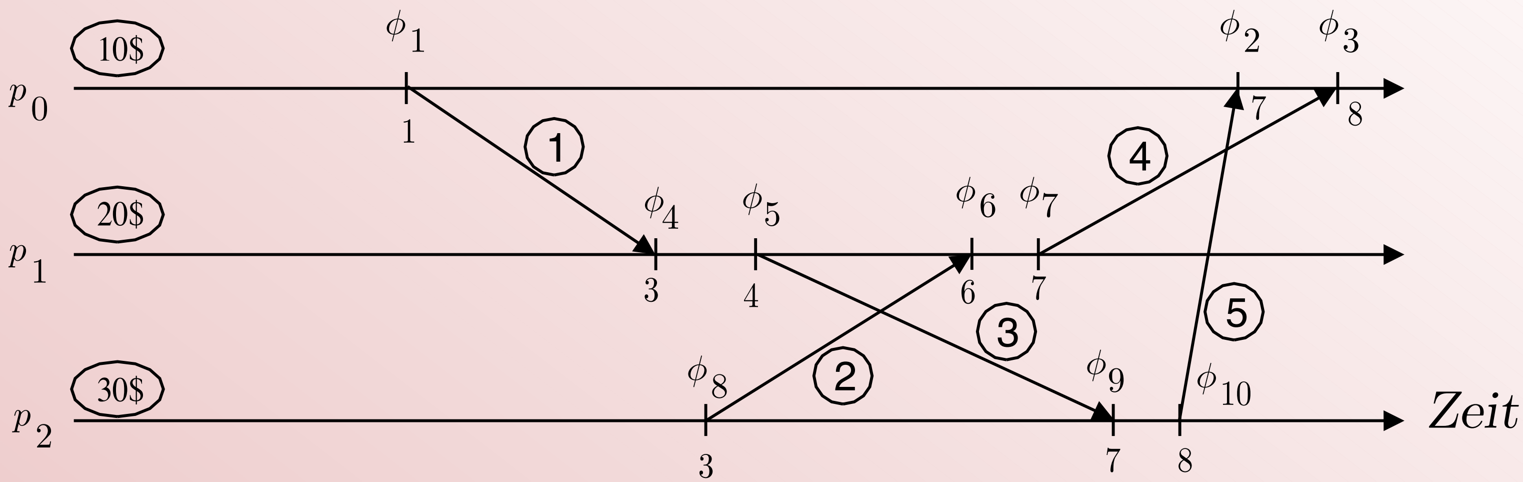
Lokale Zeitskalen



- Beispielsweise ist:
  - ▷ **Gesamtgeldmenge:** $10 + 20 + 30 = 60$
  - ▷ $m(\phi_8, \phi_6) = 2$
  - ▷ $1, 2, 3, \ldots$ sind die Zeitzustände der lokalen Uhren
- **Problem:** Die Bankleitung möchte in Intervallen immer wieder die insgesamt umlaufende Geldmenge ermitteln.
  - ▷ Diese soll immer gleich 60 sein.



- **Verfahren 1:**
  Die Bankleitung fordert alle Funktionseinheiten auf, die Kontostände zu einem bestimmten Zeitpunkt t ihrer lokalen Zeit mitzuteilen.
  Erwartung : $\sum x_i = 60$.

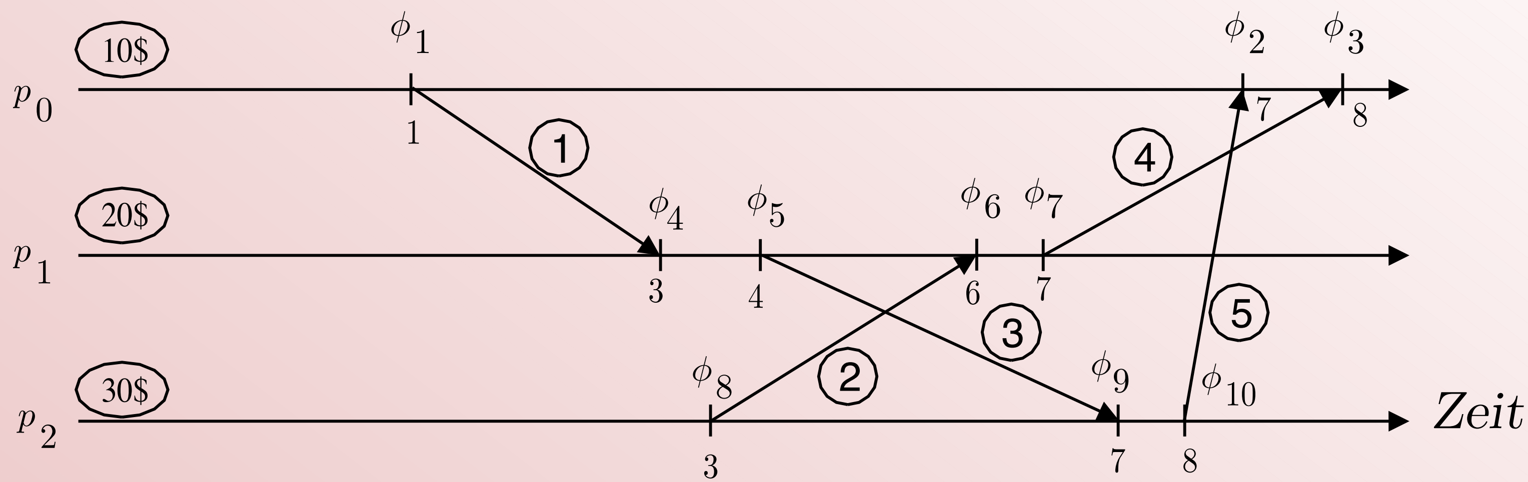


- **Verfahren 1:**
  Die Bankleitung fordert alle Funktionseinheiten auf, die Kontostände zu einem bestimmten Zeitpunkt t ihrer lokalen Zeit mitzuteilen.
  Erwartung : $\sum x_i = 60$.

  ▷ **Beispiel:** Zeitpunkt $t = 5$

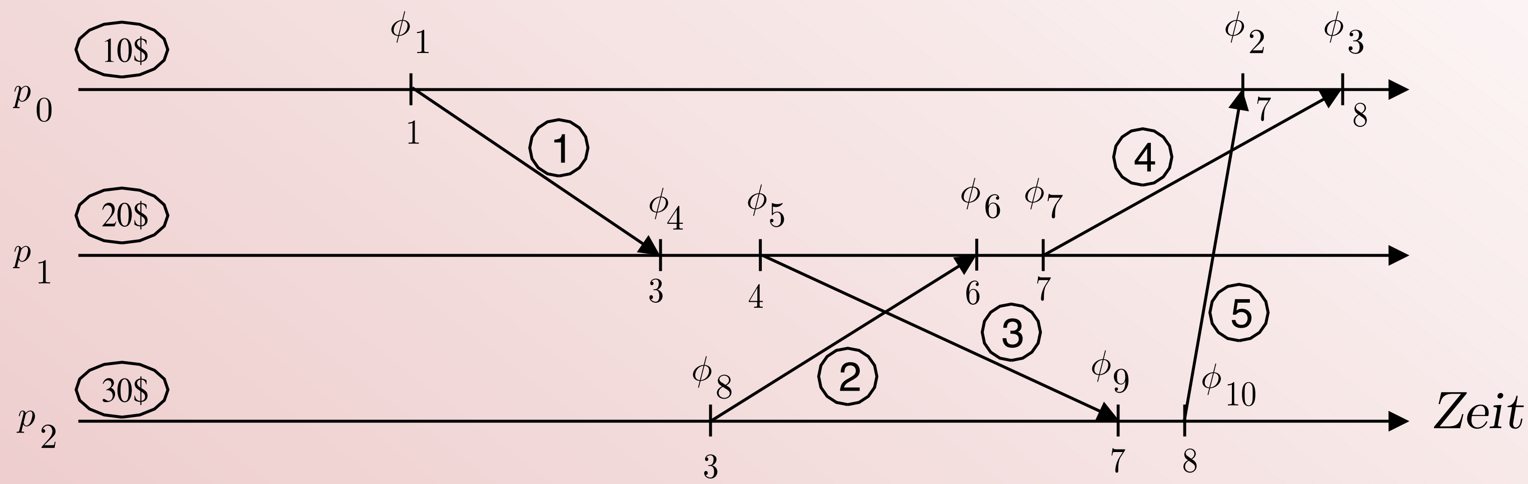
$$
\begin{array}{lllll}
p_0 & : & x_0 = & 10 - 1 & = & 9 \\
p_1 & : & x_1 = & 20 + 1 - 3 & = & 18 \\
p_2 & : & x_2 = & 30 - 2 & = & 28 \\
\hline
 & & & \sum x_i & = & \mathbf{55}
\end{array}
$$

  ◇ . . . nicht das erwartete Ergebnis!



- **Verfahren 2:**
  Die Bankleitung bittet, jeweils die Summe der abgesandten (positiv) und der Summe der eingegangenen Beträge (negativ) zu x_i hinzuzuzählen.

  ▷ Erwartung : $\sum x_i = 60$.



- **Verfahren 2:**
  Die Bankleitung bittet, jeweils die Summe der abgesandten (positiv) und der Summe der eingegangenen Beträge (negativ) zu x_i hinzuzuzählen.
  - ▷ Erwartung : $\sum x_i = 60$.
  - ▷ **Beispiel:** Zeitpunkt $t = 5$

$$
\begin{array}{lcllcl}
p_0 & : & x_0 = & 9+1 & = & 10 \\
p_1 & : & x_1 = & 18-1+3 & = & 20 \\
p_2 & : & x_2 = & 28+2 & = & 30 \\
\hline
 & & & \sum x_i & = & \mathbf{60}
\end{array}
$$

Wie können die Prozessoren die Relation vor bestimmen?

- Bestimmen einer *logischen Uhr* $LT(\phi)$ mit

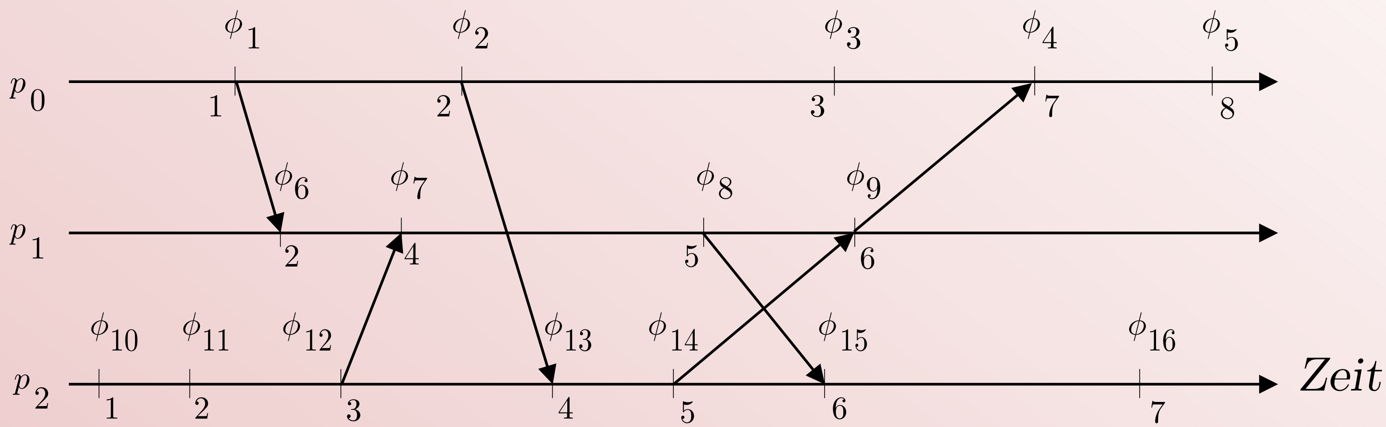
$$\phi_1 \textbf{ vor } \phi_2 \Rightarrow LT(\phi_1) < LT(\phi_2).$$

▷ Jede Funktionseinheit p_i erhält eine Variable LT_i mit Anfangswert $LT_i = 0$.

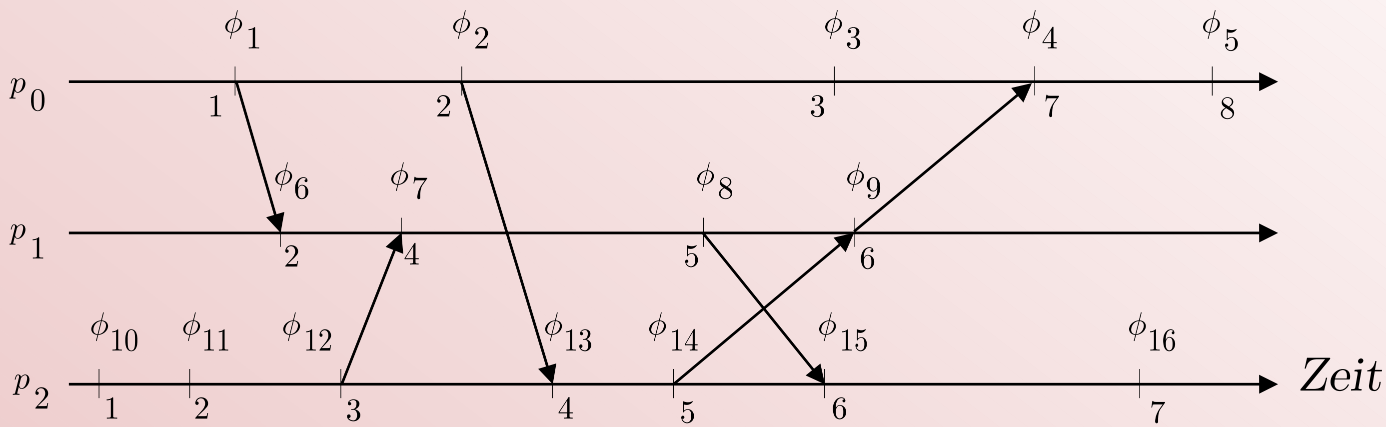
▷ Nachrichten wird der neue Wert des Sendeereignisses beigefügt („logischer Zeitstempel").

▷ Bei einem Ereignis ϕ von p_i wird LT_i auf einen um 1 größeren Wert als das Maximum des alten Wertes und jedes ggf. in ϕ empfangenen Zeitstempels gesetzt.

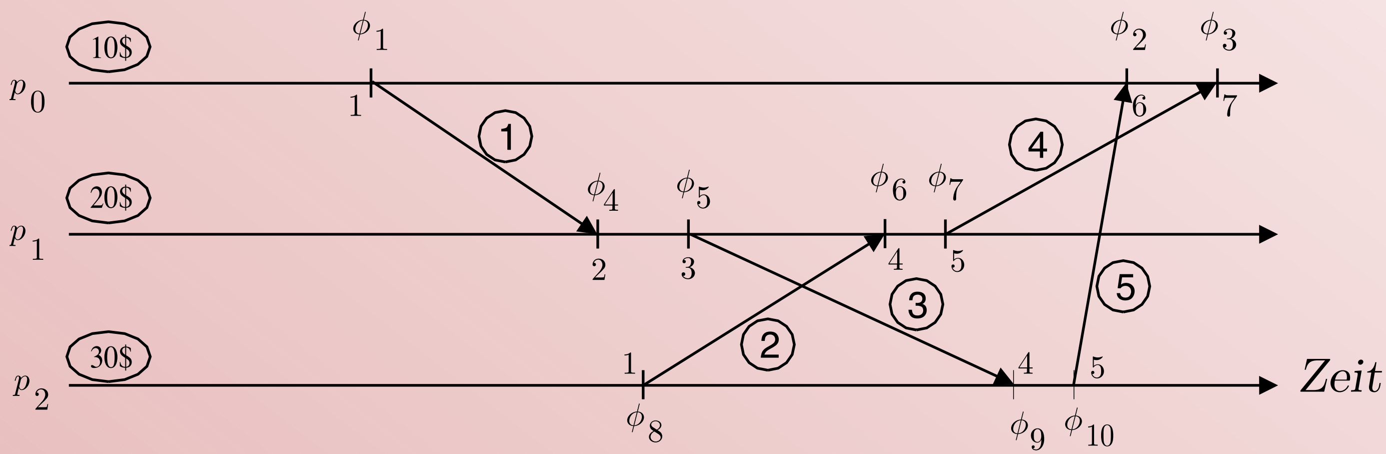
Beispiele: logische Zeitstempel



Beispiele: logische Zeitstempel



. . . und noch einmal das Banken-System:



Formal bedeutet das . . .

Definition 6.19. *Sei ϕ ein Ereignis von p_i und LT_i die aktuelle Zeit der logischen Uhr von p_i. Sei ferner*

$$LT_\phi := \{LT_m \mid m \text{ ist empfangene Nachricht in } \phi \text{ mit Zeitstempel } LT_m\}.$$

Dann ist $LT(\phi) := \max(\{LT_i\} \cup LT_\phi) + 1$ die neue von p_i berechnete lokale Zeit.

Satz 6.20. *Für die Ereignisse $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$ gilt :*

$$\phi_1 \textbf{ vor } \phi_2 \Rightarrow LT(\phi_1) < LT(\phi_2)$$

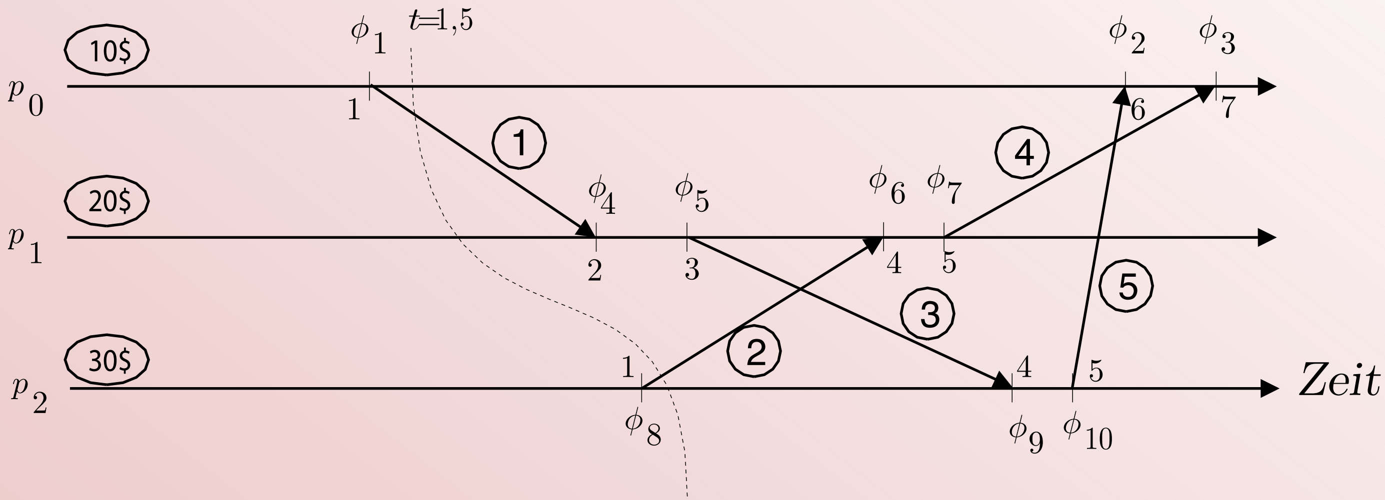
- **Wichtig:** Bei Einführung logischer Uhren für die Filialen (Prozessoren) wird die logische Zeit aller Uhren initialisiert: $LT_i := 0$.

Algorithmus Verfahren der Bankleitung

1. Man führe logische Uhren ein.
2. Man lege ein $t \in \mathbb{R}$ fest.
3. Für jede Funktionseinheit p_i :
   - Bestimme aufeinanderfolgende Ereignisse ϕ **vor** ϕ' von p_i mit $LT(\phi) \leq t < LT(\phi')$.
   - Setze $c_i := x_i$ für den Wert von x_i zwischen ϕ und ϕ'. Sende c_i an Leitung.
   - Sende den Wert jeder Geldsendung an Leitung, die ab ϕ' ankommt, aber einen Zeitstempel $\leq LT(\phi)$ hat.

Beispiel

- Zeitskala:



- Zeitpunkt $t = 1,5$

$$\begin{array}{lcll} p_0 & : & x_0 = & 9 \\ p_1 & : & x_1 = & 20 \\ p_2 & : & x_2 = & 28 \\ \hline & & \sum x_i = & \mathbf{57} \end{array}$$

- Noch zu berücksichigen: 1 in ϕ_4 und 2 in ϕ_6.

- Die Summe ist $57 + 3 = 60$.

Problem

- Woher weiß die Leitung, ob alle Nachrichten angekommen sind?
- Die Funktionseinheiten werden aufgefordert, mitzuteilen, wieviele Nachrichten an welche andere Funktionseinheit abgesandt bzw. von solchen empfangen wurden.
  - zum Zeitpunkt t=1,5 :
    p_0 : eine an p_1
    p_1 : keine
    p_2 : eine an p_1

Problem

- Woher weiß die Leitung, ob alle Nachrichten angekommen sind?
- Die Funktionseinheiten werden aufgefordert, mitzuteilen, wieviele Nachrichten an welche andere Funktionseinheit abgesandt bzw. von solchen empfangen wurden.
  - zum Zeitpunkt t=1,5 :
    p_0 : eine an p_1
    p_1 : keine
    p_2 : eine an p_1
- Wir haben gesehen, daß gilt :

$$\phi_1 \textbf{ vor } \phi_2 \Rightarrow LT(\phi_1) < LT(\phi_2)$$

Problem

- Woher weiß die Leitung, ob alle Nachrichten angekommen sind?
- Die Funktionseinheiten werden aufgefordert, mitzuteilen, wieviele Nachrichten an welche andere Funktionseinheit abgesandt bzw. von solchen empfangen wurden.
  - zum Zeitpunkt t=1,5 :
    p_0 : eine an p_1
    p_1 : keine
    p_2 : eine an p_1
- Wir haben gesehen, daß gilt :

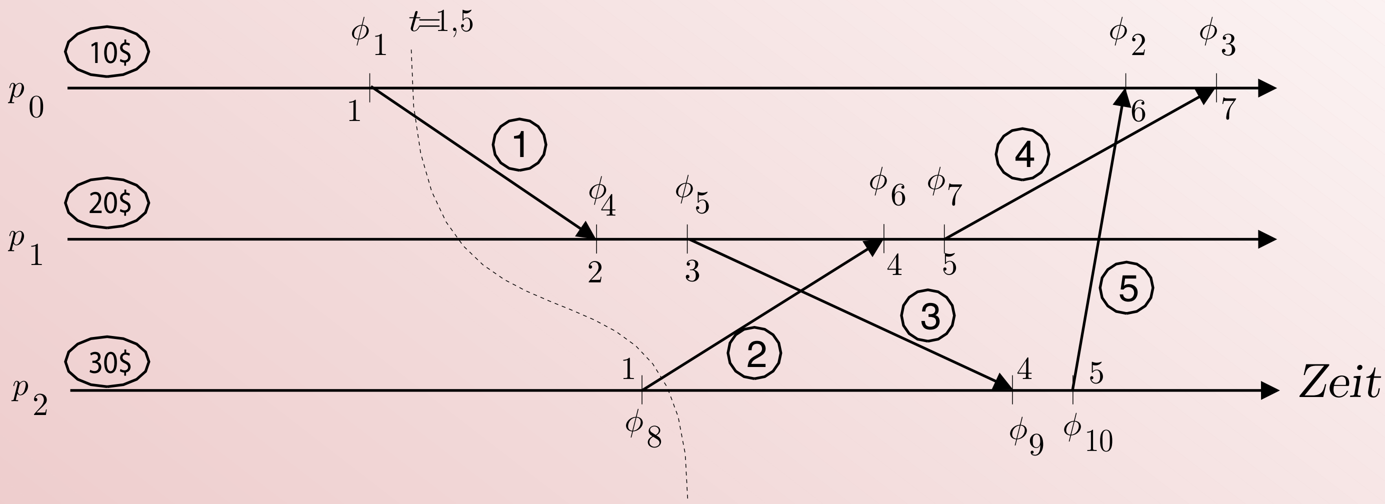
$$\phi_1 \textbf{ vor } \phi_2 \Rightarrow LT(\phi_1) < LT(\phi_2)$$

- Stellt die Relation $<$ die **vor**-Relation exakt dar, d.h. gilt auch die folgende Umkehrung ?

$$LT(\phi_1) < LT(\phi_2) \Rightarrow \phi_1 \textbf{ vor } \phi_2$$

▷ Die Umkehrung gilt nicht!

◇ **Gegenbeispiel:**



▷ In der Zeitskala ist folgendes zu sehen:

Es gilt $LT(\phi_8) = 1 < LT(\phi_4) = 2$ aber nicht ϕ_8 **vor** ϕ_4.

◇ **Grund:** $LT(\phi) \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ ist linear – und somit total – geordnet!

◇ **Lösungsansatz:** Statt $\mathbb{N}$ wählen wir die nicht linear geordnete Menge $\mathbb{N}^n$ mit $n > 1$ und n ist die **Anzahl der Prozessoren** im Modell.

Unabhängigkeit/Nebenläufigkeit

Definition 6.22. ϕ_1 *heißt* **unabhängig** *von* ϕ_2 *bzw.* ϕ_1 *heißt* **nebenläufig** *zu* ϕ_2*, geschrieben als* $\phi_1 \parallel \phi_2$*, falls gilt:*

$$\phi_1 \parallel \phi_2 \Leftrightarrow \neg(\phi_1 \textbf{ vor } \phi_2) \wedge (\phi_2 \textbf{ vor } \phi_1)$$

Unabhängigkeit/Nebenläufigkeit

Definition 6.22. ϕ_1 *heißt* **unabhängig** *von* ϕ_2 *bzw.* ϕ_1 *heißt* **nebenläufig** *zu* ϕ_2*, geschrieben als* $\phi_1 \parallel \phi_2$*, falls gilt:*

$$\phi_1 \parallel \phi_2 \Leftrightarrow \neg(\phi_1 \textbf{ vor } \phi_2) \wedge (\phi_2 \textbf{ vor } \phi_1)$$

- Gesucht ist eine strikte Ordnung auf Φ, welche $\parallel$ darstellt.

Vektorzeit, vektorielle Zeitstempel

Definition 6.23.

- *Jede Funktionseinheit p_i führt eine Variable $\vec{v}_i$ mit Werten in $\mathbb{N}^n$ und dem Nullvektor $\vec{0}$ als Anfangswert.* *(lokale Vektorzeit)*
- *Falls p_i ein Ereignis ϕ bearbeitet, wird der Zeitstempel aktualisiert:* *(vektorieller Zeitstempel)*
  - ▷ $\vec{v}_i[i] \mapsto \vec{v}_i[i] + 1$ *(inkrementieren des eigenen Stempels)*
  - ▷ *Sei ϕ ein Ereignis von p_i und $\vec{v}_i \in \mathbb{N}^n$ die aktuelle Zeit der Vektoruhr von p_i. Sei ferner*

    $\vec{VT}_\phi := \{\vec{VT}_m \mid m$ *ist empfangene Nachricht in* ϕ *mit Stempel* $\vec{VT}_m\}$.

    Dann ist für $0 \leq j \leq n-1$ und $j \neq i$

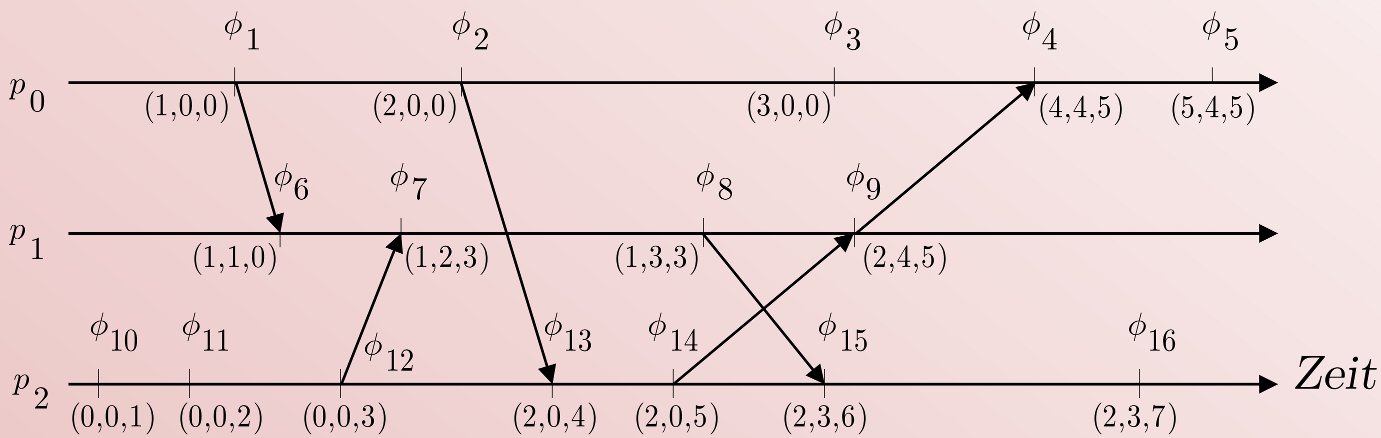
    $$\vec{v}_i[j] \mapsto \max(\{\vec{v}_i[j]\} \cup \vec{VT}_\phi[j]) + 1$$

    die neue von p_i berechnete Vektorzeit.

Vektor-Uhr

Definition 6.24. *Die Vektoruhr-Abbildung $VC : \Phi \to \mathbb{N}^n$ ist definiert durch $VC(\phi) := \vec{v}_i$, wobei $\vec{v}_i$ die von p_i für ϕ berechnete Vektorzeit ist.*

- **Beispiel:**



▷ Anschrift an ϕ ist $VC(\phi)$

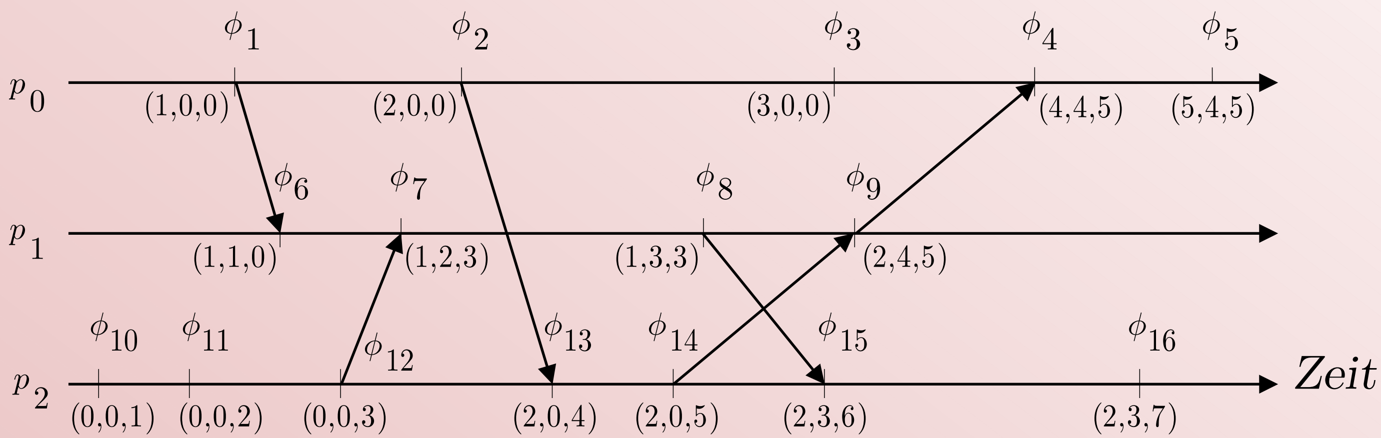
partielle Ordnung auf $\mathbb{N}^n$: $\quad v \leq v' \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} : v[i] \leq v'[i]$

strikte Ordnung auf $\mathbb{N}^n$: $\quad v < v' \quad \Leftrightarrow \quad v \leq v' \wedge v \neq v'$

Vektor-Uhr

Definition 6.24. *Die Vektoruhr-Abbildung* $VC : \Phi \to \mathbb{N}^n$ *ist definiert durch* $VC(\phi) := \vec{v}_i$, *wobei* $\vec{v}_i$ *die von* p_i *für* ϕ *berechnete Vektorzeit ist.*

- **Beispiel:**



▷ Anschrift an ϕ ist $VC(\phi)$

partielle Ordnung auf $\mathbb{N}^n$: $v \leq v' \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : v[i] \leq v'[i]$
strikte Ordnung auf $\mathbb{N}^n$: $v < v' \Leftrightarrow v \leq v' \wedge v \neq v'$

▷ v, v' heißen **unvergleichbar**, falls $\neg(v \leq v') \wedge \neg(v' \leq v)$ gilt.

Satz zur Unvergleichbarkeit

Satz 6.26.

$$VC(\phi_1) < VC(\phi_2) \;\Leftrightarrow\; \phi_1 \textbf{ vor } \phi_2$$

$$VC(\phi_1), VC(\phi_2) \textit{ unvergleichbar} \;\Leftrightarrow\; \phi_1 \parallel \phi_2$$

Satz zur Unvergleichbarkeit

Satz 6.26.

$$VC(\phi_1) < VC(\phi_2) \;\Leftrightarrow\; \phi_1 \textbf{ vor } \phi_2$$

$$VC(\phi_1), VC(\phi_2) \textit{ unvergleichbar } \;\Leftrightarrow\; \phi_1 \parallel \phi_2$$

- **Aufgabe:**

  Angenommen, der Bankleitung werden ständig alle Vektor-Zeiten $VC(\phi)$ gesandt.

  ▷ Kann Sie darauf ein Verfahren aufbauen, um das Bilanz-Problem zu lösen?