F3 – Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabenzettel 13 : Reduktionen, $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Besprechung in der Zeit vom 02.02. bis zum 05.02.2004.

Präsenzaufgabe 13 :

Sie wissen von der NP-Vollständigkeit der Menge X und vermuten dies auch für die Menge U. Was müssen Sie tun, um dieses mit einem Reduktionsverfahren zu zeigen?

Übungsaufgabe 13.1 :

von
4

Mit PAR sei wie im Skript folgendes NP-vollständige Partitionsproblem bezeichnet:
Partition

Gegeben: Eine endliche Menge A und eine Funktion $g : A \to I\!N$.

Frage: Gibt es eine Teilmenge $B \subsetneq A$ derart, dass $\sum\limits_{a \in B} g(a) = \sum\limits_{a \in A \setminus B} g(a)$?

Sei ferner RP das ebenfalls im Skript definierte Rucksackproblem:

Allgemeines Rucksackproblem (RP)(*knapsack*)

Gegeben: Eine endliche Menge S, eine Gewichtsfunktion $m : S \to I\!N$, eine Werte- oder Nutzenfunktion $w : S \to I\!N$, eine Gewichtsbeschränkung $M \in I\!N$ (die "Rucksackkapazität") und ein erwünschter Nutzen $W \in I\!N$.

Frage: Gibt es eine Teilmenge $S' \subseteq S$ derart, dass:
1. $\sum\limits_{s \in S'} w(s) \geq W$ und **2.** $\sum\limits_{s \in S'} m(s) \leq M$?

Aufgabe:
Geben Sie eine deterministische Polynomzeit-Reduktion von PAR auf RP an.
(Tipp: Sie können das Partitions-Problem als ein Teilproblem von RP identifizieren!)

Übungsaufgabe 13.2 :

Das NP-vollständige Problem des Hamilton-Kreises für ungerichtete Graphen ist hier wie im Skript wiedergegeben:

von
6

Hamilton-Kreis ($\mathrm{H_c}$) (*Hamilton-Circuit*)

> **Eingabe:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
>
> **Frage:** Gibt es einen geschlossenen Kreis in G, bei dem jeder Knoten genau einmal durchlaufen wird, d.h. existiert eine Folge von Knoten $v_1, v_2, \ldots, v_n$ mit $n = |V|, V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ und $\{v_n, v_1\} \in E$ für alle $i \in I\!N$ mit $1 \leq i < n$?

Das Problem TSP des Handlungsreisenden ist gegeben durch:
Handlungsreisender (*traveling salesperson*)

> *Gegeben*: Ein ungerichteter Graph $G := (V, E)$, eine Gewichtsfunktion $g : E \to I\!N$ und eine Beschränkung $k \in I\!N$.
>
> *Frage*: Gibt es einen Hamilton-Kreis p in G mit $g(p) \leq k$?

Aufgabe:

a) Reduzieren sie $\mathrm{H_c}$ deterministisch in Polynomzeit auf TSP. (4 Pkt.)

b) Zeigen Sie, unter Verwendung von a), dass das Problem TSP NP-vollständig ist, indem Sie TSP $\in \mathcal{NP}$ nachweisen. (2 Pkt.)

(Es genügt dazu, eine nichtdeterministische Turing-Maschine zu entwerfen, die in einer ersten Phase eine Struktur „rät“, die ein Lösungskandidat ist (das kostet oft nur linear, manchmal auch quadratisch oder kubisch viel Zeit). Dieser beliebige Lösungskandidat muss dann in einer deterministischen Phase in Polynomzeit auf das Erfüllen der erforderlichen bzw. einschränkenden Bedingungen überprüft werden. Wenn es solch eine NTM gibt ist alles gezeigt!)

Bisher erreichbare Punktzahl: 150