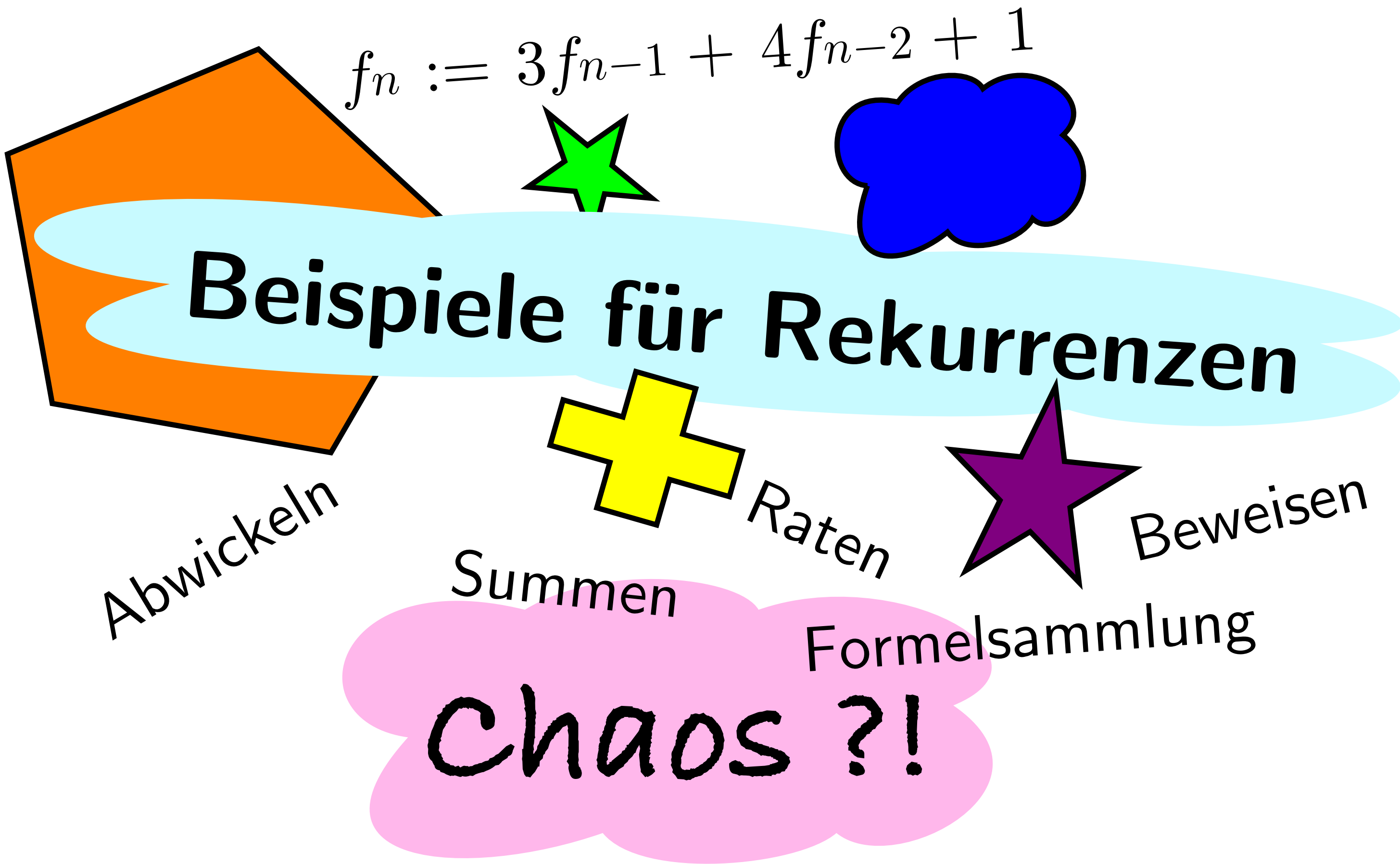
Überblick



$\Rightarrow$ **Suche nach einer Systematik**

Allgemeines Verfahren

Bestimmung einer **geschlossenen Formel** für durch **lineare Rekurrenzgleichung** definierte Folge $\langle g_n \rangle_{n \geq 0}$:

1. Bilde eine **einzige Gleichung**, in der g_n durch andere Terme der Folge $\langle g_n \rangle_{n \geq 0}$ ausgedrückt wird.
2. Multipliziere die beiden Seiten der Gleichung mit z^n und summiere für alle n. Die linke Seite wird zu $G(z) = \sum_n^\infty g_n z^n$. Man erhält eine **erzeugende Funktion** für $\langle g_n \rangle_{n \geq 0}$.
3. Löse diese Gleichung nach $G(z)$ auf, um eine **geschlossene Formel** für $G(z)$ zu bekommen.
4. Entwickle $G(z)$ in eine **formale Potenzreihe**, um den Koeffizienten von z^n zu bestimmen.

Beispiel

Finde eine geschlossene Formel für die **Fibonacci-Zahlen**!

Fibonacci-Zahlen sind durch folgende Rekurrenzgleichung definiert:

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

Dies ist offensichtlich **keine** geschlossene Formel!

Was kann nun getan werden, um eine solche zu finden?

Prädikate als Zahlenfunktionen

Definition: [K. Iverson, 1962]

Sei $P(n)$ ein **Prädikat**. Dann ist $[P(n)]$, folgendermaßen definiert:

$$[P(n)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } P(n) \text{ wahr ist} \\ 0 & \text{falls } P(n) \text{ nicht wahr ist} \end{cases}$$

Beispiel:

$$f_n := \begin{cases} 2 & \text{falls } n = 0 \\ 3 & \text{falls } n = 1 \\ 2f_{n-1} + f_{n-2} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_n := 2f_{n-1} + f_{n-2} + 2[n = 0] - [n = 1]$$

1. Zusammenfassen

- Bilde eine einzige Gleichung, in der g_n durch andere Terme der Folge $\langle g_n \rangle_{n \geq 0}$ ausgedrückt wird.
- Diese Gleichung soll für alle n gültig sein.
- Wir setzen fest: $g_n = 0$ falls $n < 0$.

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

Finde eine **einzige Gleichung** für f_n, die für alle n gilt (auch für $n < 0$!).

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + [n = 1]$$

2. Erzeugende Funktion

- **Multipliziere Gleichung mit z^n und summiere für n.**
- **Erzeugende Funktion** für $\langle g_n \rangle_{n\geq 0}$: $G(z) = \sum_n^\infty g_n z^n$
- Rechte Seite manipulieren $\Rightarrow$ Ausdruck von $G(z)$.

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

Transformiere $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + [n = 1]$:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_n f_n z^n \\ &= \sum_n \left(f_{n-1} + f_{n-2} + [n = 1]\right) z^n \\ &= \sum_n f_{n-1} z^n + \sum_n f_{n-2} z^n + \sum_n [n = 1] z^n \\ &= zF(z) + z^2 F(z) + z \end{aligned}$$

3. Gleichung nach $G(z)$ auflösen

- **Löse diese Gleichung nach $G(z)$ auf**, um eine geschlossene Formel für $G(z)$ zu bekommen.

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

Löse die Gleichung nach $F(z)$ auf:

$$\begin{aligned}
F(z) &= zF(z) + z^2F(z) + z \\
\iff \quad F(z) - zF(z) - z^2F(z) &= z \\
\iff \quad F(z) \cdot (1 - z - z^2) &= z \\
\iff \quad F(z) &= \tfrac{z}{1-z-z^2}
\end{aligned}$$

4. Formale Potenzreihe

- **Entwickle $G(z)$ in eine formale Potenzreihe**, um den Koeffizienten von z^n zu bestimmen.
  (Dieser Schritt ist im allgemeinen der schwierigste!)

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

- Versuch $\frac{z}{1-z-z^2}$ als Summe zweier Brüche in der Form $z\left(\frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z}\right)$ zu schreiben.
- Dies bedeutet, den Nenner $(1 - z - z^2)$ in der Form $(1 - \alpha z)(1 - \beta z)$ zu schreiben und danach die Größen a und b zu suchen.

4. Schritt (Forts.)

- Wenn dies geschafft ist, so wissen wir, dass $\frac{a}{1-\alpha z}$ erzeugende Funktion für $a\sum_{n\geq 0}(\alpha z)^n$ ist, also

$$
\begin{aligned}
F(z) &= z\left(a\sum_{n\geq 0}(\alpha z)^n + b\sum_{n\geq 0}(\beta z)^n\right) \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}\right) z^n
\end{aligned}
$$

- Mit $[z^n]F(z) = f_n = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}$ erhalten wir also die n-te Fibonacci-Zahl in **geschlossener Form**!

Faktorisierung des Polynoms

- Die **Faktorisierung** von $(1 - z - z^2)$ in die Form $(1 - \alpha z)(1 - \beta z)$ gelingt vielleicht noch direkt.
- Allgemeine Methode für beliebige Polynome:

Definition: Sei $q(z)$ ein Polynom über $\mathbb{C}$ vom Grad d, so heißt $q^R(z) := z^d \cdot q(\frac{1}{z})$ das **reflektierte Polynom** von q.

Satz: Sei $q(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3 + \cdots + q_d z^d$ ein Polynom über $\mathbb{C}$ vom Grad d und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ die Nullstellen des reflektierten Polynoms $q^R(z)$, dann gilt:

$$q(z) = (1 - \alpha_1 z)(1 - \alpha_2 z) \cdot \ldots \cdot (1 - \alpha_d z)$$

Fast am Ziel (Fibonacci)

- Bei der noch zu analysierenden Fibonacci-Zerlegung sind also die Nullstellen von $(1-z-z^2)^R = z^2 - z - 1 = (z-\alpha)(z-\beta)$ zu finden. Es ergeben sich die Nullstellen

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

die wir auch schon vom **goldenen Schnitt** kennen.

- Es sind jetzt noch a und b in

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)} = \frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z}$$

zu bestimmen.

Noch ein wenig rechnen ...

- Wir bringen die Summe auf den Hauptnenner $(1-\alpha z)(1-\beta z)$ und es folgt

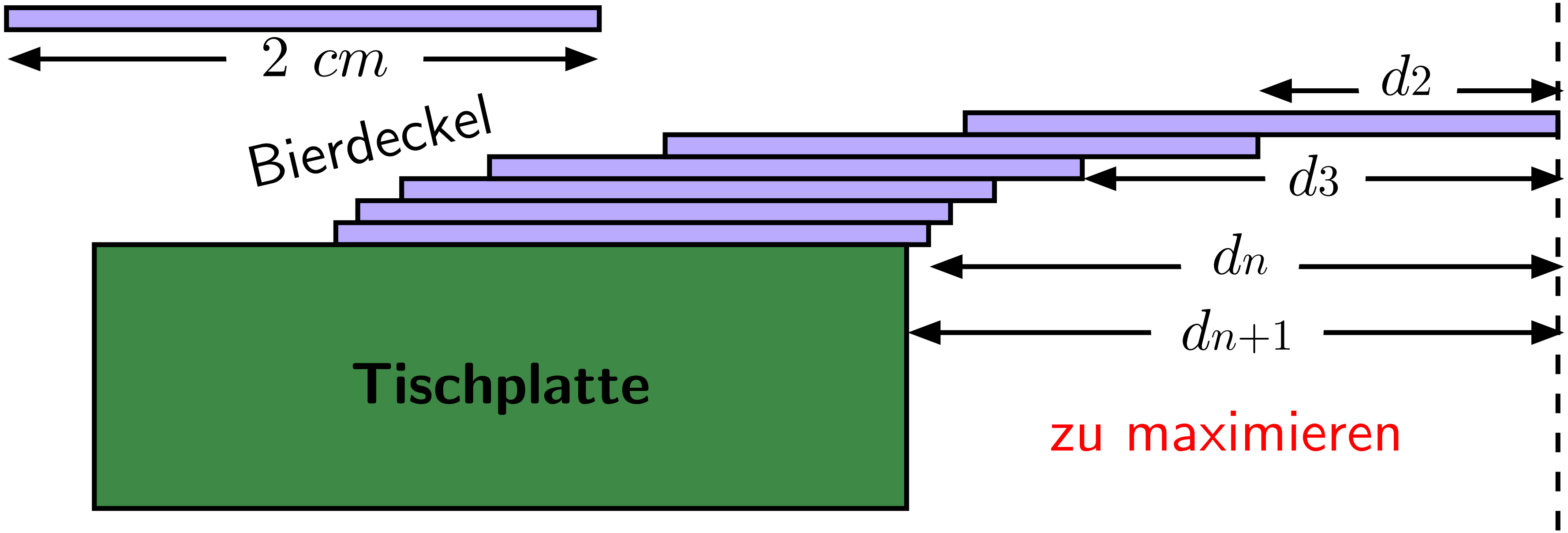
$$(a+b)-(a\beta+b\alpha)z = 1 = (a+b)-\frac{a(1-\sqrt{5})+b(1+\sqrt{5})}{2}z.$$

- Also $a+b=1$ sowie $a\beta+b\alpha=0$ (*warum?!*), woraus $a=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ und $b=-\frac{\beta}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.
- Mit $f_n = a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1}$ finden wir letztendlich

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Weitere Beispiele ...

...sind im Skript zu finden!



Offensichtlich gilt

- $d_1 = 0$
- $d_2 = 1 = \frac{d_1+1}{1}$
- $d_3 = \frac{(d_1+1)+(d_2+1)}{2}$

Bierdeckel

- …und allgemein

$$
\begin{aligned}
d_{k+1} &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} (d_i + 1) \\
&= \frac{1}{k} \left(k + \sum_{i=1}^{k} d_i \right) \\
&= 1 + \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} d_i
\end{aligned}
$$

- Somit ist $\quad k \cdot d_{k+1} = k + \sum_{i=1}^{k} d_i$.

Bierdeckel (Forts.)

- Einsetzen von $k-1$ statt k in $kd_{k+1} = k + \sum_{i=1}^{k} d_i$ ergibt:

$$(k-1)\, d_k = k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} d_i$$

- Durch Subtraktion beider Gleichungen:

$$kd_{k+1} - (k-1)\, d_k = 1 + d_k$$

- Umgerechnet die einfache Rekurrenz

$$d_{k+1} = d_k + \frac{1}{k}$$

mit der Lösung $\quad d_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.

Problem

- **ABER:** Kann man zu jeder Summenformel auch eine geschlossenen Formel finden?
- **Antwort:** Nein, z.B. nicht für das Bierdeckelproblem!
- Bei der Analyse von Algorithmen trifft man oft auf die **harmonischen Zahlen**: (H_n: ist n-te Harmonische Zahl)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

- H_n kann für jedes n exakt berechnet werden!
- Das reicht jedoch nicht aus, denn es gibt keine geschlossene Formel für H_n. Deshalb wird eine gute **Approximation** für H_n benötigt.

Abschätzung durch Integrale

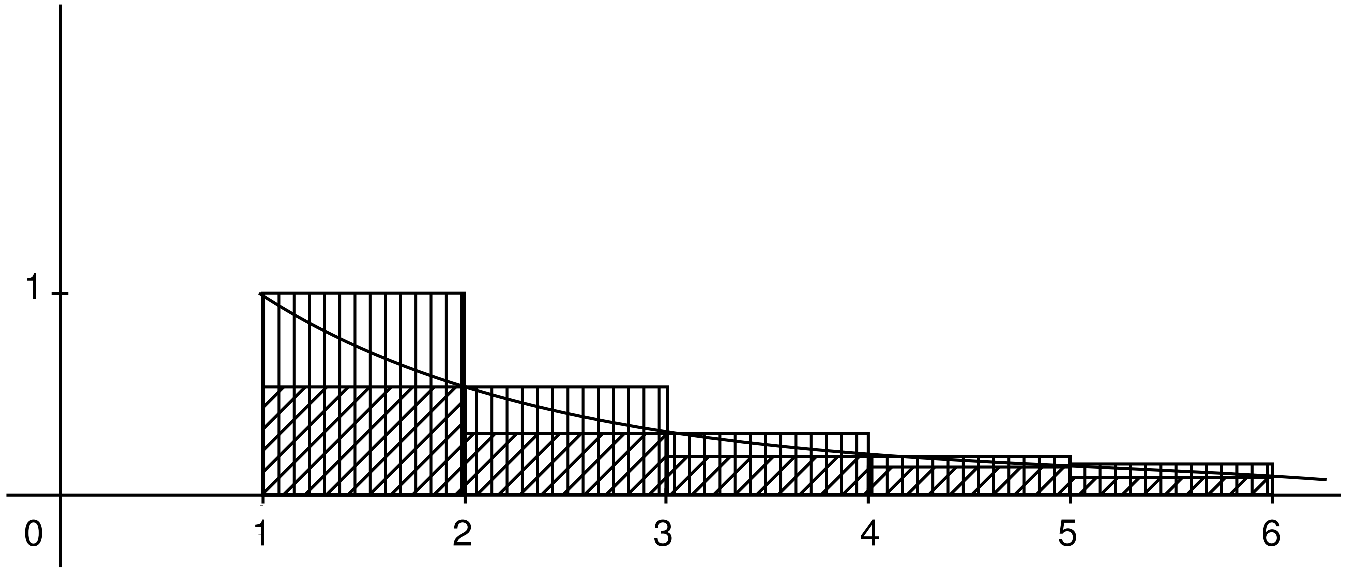
- **Summenformeln** können oft nach oben und unten durch **Integrale** abgeschätzt werden.
- **Satz** Für $G(n) := \sum_{i=1}^{n} g(i)$ mit $g(i) \leq g(i+1)$ gilt:

$$\int_0^n g(x)dx \leq G(n) \leq \int_1^{n+1} g(x)dx$$

- Ist eine Funktion $g(x)$ **monoton fallend**, aber gilt stets $g(x) > 0$, so läßt sich das Verfahren der Abschätzung von $G(n) := \sum_{i=1}^{n} g(i)$ mit Hilfe von Integralen immer noch gut anwenden.

Harmonische Zahlen

- $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, so dass $g(x) = \frac{1}{x}$ ist monoton fallend.
- Wegen $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$ kann mit dieser Methode eine Abschätzung von H_n vorgenommen werden.
- Für $g(x) = \frac{1}{x}$ ergibt sich:



- Die Rechtecke stellen die Flächen $\frac{1}{x}$ dar.

Approximation von H_n

- Es folgt nun $\int_1^n \frac{1}{x}dx < H_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx$ und somit

$$\ln n < H_n < \ln n + 1 \qquad \text{falls } n > 1$$

  und diese **Approximation** ist schon nicht schlecht.

- Viel besser aber ist die Approximation

$$H_n = \ln n + 0.5772156649 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \underbrace{\Theta(n^{-4})}_{\text{„wächst wie } n^{-4}\text{“}}$$

Schriftliches Multiplizieren

- *Wieviel Zeit braucht ein Mensch (ein Computer), um zwei n-stellige ganze Zahlen zu multiplizieren, wenn er den gewöhnlichen Schulalgorithmus benutzt?*

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & a_1 & a_2 & \dots & a_n & \times & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\
 & & & & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & & & & & \\
 & & & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & & & & & & \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & & n \text{ Zeilen} & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & \dots & \bullet & \bullet & & & 2n \text{ Stellen} & &
\end{array}
$$

- Die exakte Antwort ist wenig aussagekräftig, aber es gilt: *Für k-mal größere Zahlen wird k^2-mal mehr Zeit benötigt.*
- Daher braucht man $O(n^2)$ Zeit, um n-stellige ganze Zahlen mit dem Schulalgorithmus zu multiplizieren.

Optimalitätsfrage

- **Gibt es einen schnelleren Algorithmus?**
- x, y: zwei n-stellige ganze Zahlen (n gerade) in Binärdarstellung.
- $x = x_1 2^{\frac{n}{2}} + x_2$ und $y = y_1 2^{\frac{n}{2}} + y_2$, wobei x_1, x_2, y_1, y_2 $\frac{n}{2}$-stellige Binärdarstellungen ganzer Zahlen sind
- Dann ist $xy = x_1 y_1 2^n + (x_1 y_2 + x_2 y_1) 2^{\frac{n}{2}} + x_2 y_2$
- **vier Multiplikationen** der $\frac{n}{2}$-stelligen Zahlen, **drei Additionen** und **zwei Shifts** um n und $\frac{n}{2}$ Positionen.
- Mit dem Schulagorithmus: Komplexität in $O(n^2)$.

Multiplikation anders

- Andere Methode, die oben benötigten drei Werte $x_1y_1,\ x_1y_2 + x_2y_1$ und x_2y_2 zu berechnen:

$$x_1y_1, \quad x_2y_2$$

$$z_1 = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

$$z_1 - x_1y_1 - x_2y_2 = x_1y_2 + x_2y_1$$

- Reduktion des Problems der Multiplikation n-stelliger Zahlen auf das Problem von drei Multiplikationen $\frac{n}{2}$-stelliger Zahlen in $O(n)$ Zeit.
- Analyse der Zeitkomplexität von *divide-and-conquer*: Zeitkomplexität $O\left(n^{1.58}\right)$ ist!
  Das ist besser als die Schulmethode!!!

Strukturelle Komplexitätstheorie

- systematisches Studium der Komplexität von Problemen (nicht konkreten Algorithmen!)
  - Probleme als Mengen
  - Problemlösung entspricht Akzeptierung von Wörtern
  - Modell ist die Turing-Maschine (DTM vs. NTM)
  - Zeit- und Platzbedarfe werden abgeschätzt
  - untere und obere Schranken
  - in Abhängigkeit der Eingabegröße
- Eingabelänge zählt nicht zum Platzbedarf!

Probleme als Mengen

- Berechenbarkeit einer beliebigen Funktion ist manchmal umständlich zu zeigen!
- Idee: Akzeptierung verwenden, um die Komplexität von Problemen zu untersuchen.
  - intern wird etwas berechnet
  - das Ergebnis muss nicht (standardisiert) ausgegeben werden
  - auch NTM einsetzbar
  - damit ist ein Vergleich zwischen deterministischen und nichtdeterministischen Problemlösungen direkt möglich
- *Wie codiere ich ein Problem als Menge?*

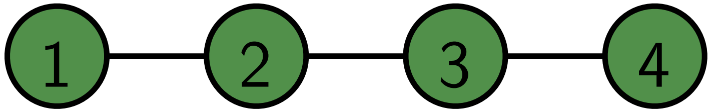
Probleme als Mengen (2)

- Probleme bestehen aus:
  - Fragestellung
  - Eingaben/Voraussetzungen
  - Lösung
- Problemstellung & Lösung(svorschlag) stellen die **Probleminstanz** dar.
- Bestandteile werden als Wörter über einem endlichen Alphabet codiert.
- Genau die Probleminstanzen, die eine Lösung darstellen sollen akzeptiert werden.

Hamilton-Kreis

Gegeben:	Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Gesucht:	Gibt es einen geschlossenen Kreis in G, bei dem jeder Knoten genau einmal durchlaufen wird, d.h. existiert eine Folge von Knoten $v_1, v_2, \ldots, v_n$ mit $n = \|V\|, V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ und $\{v_n, v_1\} \in E$ für alle $i \in I\!N$ mit $1 \leq i < n$?
Antwort:	JA / NEIN

Hamilton-Kreis als Menge

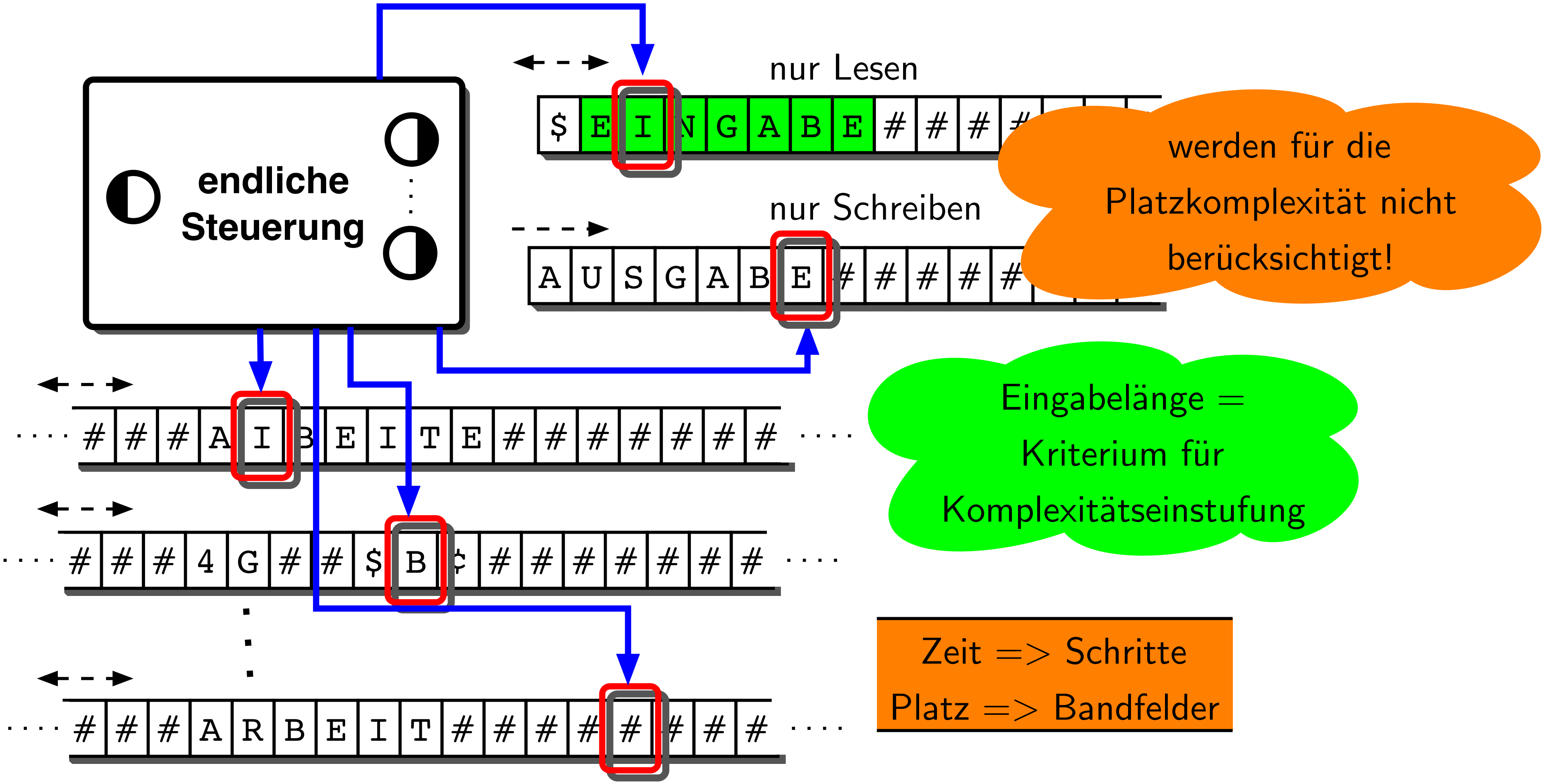


$G = (\{1,2,3,4\},\{(1,2),(2,3),(3,4)\})$

- Mögliche Darstellung: $1,2,3,4(1,2)(2,3)(3,4)$
  - Problem: kein **endliches** Alphabet
- Alternative: $1,11,111,1111(1,11)(11,111)(111,1111)$
- Darstellung mit den Zeilen der **Adjazenzmatrix**: $0100\#1010\#0101\#0010$
- Länge ist stets $|V|^2+|V|-1$ Zeichen. (obiges Beispiel hat die Länge 19.)

k-Band-offline-Turing-Maschine

- Wir verwenden künftig generell k-Band-offline-TM



Begriffe: Zeit und Platz

Definition: Für eine konkrete Rechnung *benötigt* eine NTM soviel

- **Zeit**, wie Konfigurationenswechsel auftreten.
- **Platz**, wie maximal Felder auf den Arbeitsbändern besucht werden.

Definition Eine NTM A verarbeitet ein Wort w mit der

- **Zeitbeschränkung** t genau dann, wenn die *kürzeste* Rechnung für w höchstens $\lceil t \rceil$ Zeit benötigt.
- **Platzbeschränkung** $s \in I\!R$, wenn die Rechnung mit dem geringsten Platzverbrauch für w höchstens $\lceil s \rceil$ Platz benötigt.

Komplexitätsklassen

- Zusammenfassen ähnlicher Eingaben
  - über die Art des Problems (Semantik) ist in der Regel nur sehr schwer eine Aussage zu machen
  - Kategorisierung nach **Länge des Eingabewortes**.

Definition: Seien $s : I\!R \longrightarrow I\!R$, $t : I\!R \longrightarrow I\!R$. Eine NTM A ist

- t**-zeitbeschränkt** gdw. sie für **jedes akzeptierte** Eingabewort der Länge n mit der Zeitbeschränkung $t(n)$ arbeitet.
- s**-platzbeschränkt** genau dann, wenn sie für *jedes akzeptierte* Eingabewort der Länge n mit der Platzbeschränkung $s(n)$ arbeitet.

Beispiele von Komplexitätsklassen

Definition Für $s, t : I\!N \to I\!R$ mit $t(n) \geq n + 1$ und $s(n) \geq 1$, bezeichne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\mathit{Time}(t) &:= \{L \mid L = L(A) \text{ für eine } t\text{-zeitbeschr. DTM } A\} \\
\mathcal{N}\mathit{Time}(t) &:= \{L \mid L = L(A) \text{ für eine } t\text{-zeitbeschr. NTM } A\} \\
\mathcal{D}\mathit{Space}(s) &:= \{L \mid L = L(A) \text{ für eine } s\text{-platzbeschr. DTM } A\} \\
\mathcal{N}\mathit{Space}(s) &:= \{L \mid L = L(A) \text{ für eine } s\text{-platzbeschr. NTM } A\} \\
\mathcal{P} &:= \{L \mid \text{ Es gibt ein Polynom } p : I\!N \to I\!R \text{ und eine} \\
&\qquad p\text{-zeitbeschränkte DTM } A \text{ mit } L = L(A)\} \\
\mathcal{NP} &:= \{L \mid \text{ Es gibt ein Polynom } p : I\!N \to I\!R \text{ und eine} \\
&\qquad p\text{-zeitbeschränkte NTM } A \text{ mit } L = L(A)\}
\end{aligned}$$