

2 Digitale Darstellung von Mediendaten

2.1 Gesetze von Fechner und Weber

2.2 ASCII, DIN 66003, ISO 646 und ISO 8859

2.3 Unicode

2.4 UTF-8 und UTF-7

2.5 Digitalisierung

2.6 Fourier-Darstellung

2.7 Nyquist-Theorem

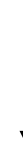
2.8 Pulscode-Modulation

Allgemeine Situation:

Sinneseindrücke
(analoge Größen)



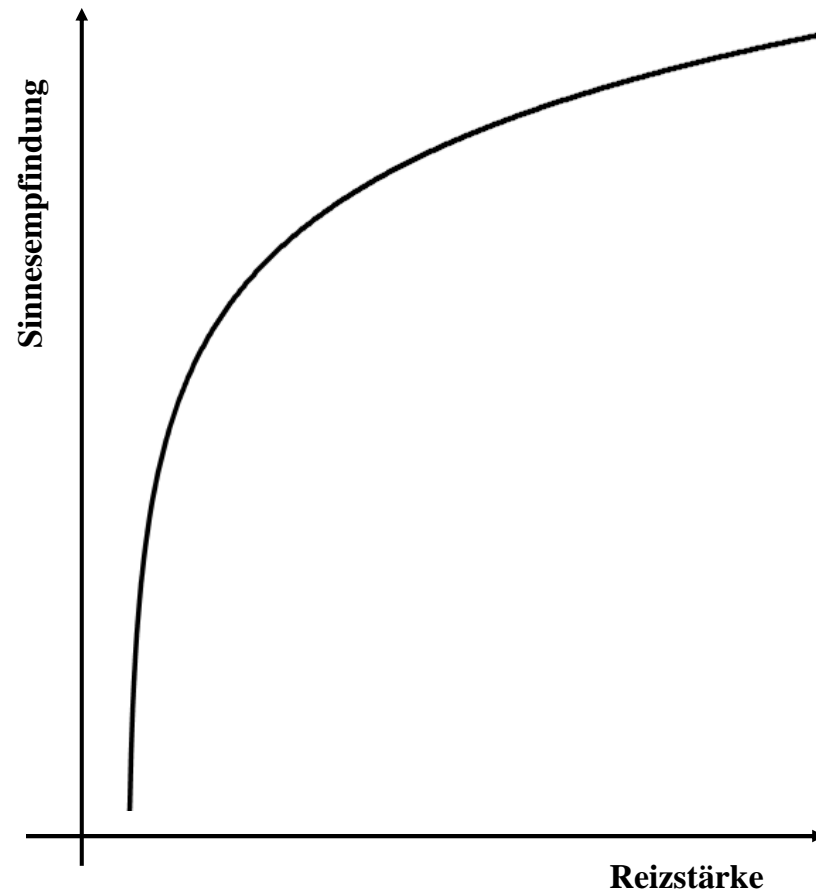
Rechenanlage
(digitale Werte)



Sinneseindrücke
(analoge Größen)

Fragen: Wie wandelt man analoge Werte in digitale und zurück?
Wie viele unterschiedliche Werte sollte man berücksichtigen?

Allgemeines Schaubild zum Zusammenhang von Reizstärke und Wahrnehmung:



Beobachtungen:

Es existieren ein unterer Schwellwert und ein oberer Schwellwert der Wahrnehmung. Änderungen des Reizes im unteren Wahrnehmungsbereich werden relativ stärker empfunden als Reizänderungen im oberen Wahrnehmungsbereich.

Fechner (1850):

Die Stärke einer Sinnesempfindung ist proportional dem Logarithmus der Reizstärke.

$$S = \text{Konst} * \log(R)$$

(für $R > R_0$, $R_0 = \text{Reizschwelle}$)

Weber (1834):

Das Auflösungsvermögen für Reizunterschiede ist proportional der Reizstärke.

$$\delta R = k * R$$

Die Werte für den Proportionalitätsfaktor k streuen über einen weiten Bereich. Als typische Werte können angesehen werden für

die Helligkeit	$k = 0,016,$
die Lautstärke	$k = 0,088,$
die Tonhöhe	$k = 0,003.$

Bereiche zwischen Reizschwelle und Schmerzgrenze sind

für die Helligkeit $1 : 10^{10}$,
für die Lautstärke $1 : 10^{12}$,
für die Tonhöhe $1 : 10^3$.

Für zwei gerade noch unterscheidbare Reizstärken Ra und Rb gilt:

$$R_b = (1 + k) * R_a.$$

Gemäß der Formel

$$\text{Schmerzgrenze} = (1 + k)^{\text{Stufen}} * \text{Reizschwelle}$$

berechnet man etwa

**1450 unterscheidbare Helligkeitsstufen,
330 unterscheidbare Lautstärken,
2300 unterscheidbare Tonhöhen.**

Bemerkung: Ein Klavier verfügt im allgemeinen über 88 Tasten und deckt einen Tonumfang von $7\frac{1}{4}$ Oktaven ab. Der niedrigste Ton liegt bei 27,5 Hz und der höchste bei 4186 Hz.

Bemerkungen zum Weber-Fechnerschen Gesetz:

- (i) **Die algorithmische Beziehung des Weber-Fechnerschen Gesetzes gilt nur für den Mittelteil des Beobachtungsintervall.**
- (ii) **Ursprünglich formulierte Herr Ernst Heinrich Weber seine Beobachtungen für Gewichtsempfindungen.**

Gewicht P in Gramm	Gewichtsdiff. = 0,04*P	Gewichtsdiff. = 0,08 * P
300	612	714
500	586	701
1000	629	747
1500	638	811
2000	661	828
3000	685	839

Zahl der richtigen Fälle bei zweihändigen Gewichtsvergleichen, jeweils 1024 Versuche.

Zahlen aus G. Th. Fechner: Elemente der Psychophysik, Leipzig (1889).

- (iii) **S. S. Stevens formulierte 1957 ein Potenzgesetz:
 $S = \text{const} * R^x$; seiner Meinung nach beschreibt es die psychophysikalischen Gegebenheiten besser als das Weber-Fechnersche Gesetz.**

Codierungen:

Als Code betrachtet man eine Abbildung von Zahlen in einen Zeichenraum.

Beispiel: Auszug aus Microsoft Windows Codepage 1250

33	EXCLAMATION MARK	!
34	QUOTATION MARK	"
35	NUMBER SIGN	#
⋮		
133	HORIZONTAL ELLIPSIS	⋯
134	DAGGER	†
135	DOUBLE DAGGER	‡
137	PER MILLE SIGN	‰
138	LATIN CAPITAL LETTER S WITH CARON	Š
⋮		
233	LATIN SMALL LETTER E WITH ACUTE	é
234	LATIN SMALL LETTER E WITH OGONEK	ė
235	LATIN SMALL LETTER E WITH DIAERESIS	ë
235	LATIN SMALL LETTER E WITH DIAERESIS	ë
237	LATIN SMALL LETTER I WITH ACUTE	í

Tabelle des American Standard Code for Information Interchange (ASCII):

$b_3b_2b_1b_0$	$b_6b_5b_4$	000	001	010	011	100	101	110	111
0 0 0 0		NUL	DLE	SP	0	@	P	'	P
0 0 0 1		SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0 0 1 0		STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0 0 1 1		ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0 1 0 0		EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
0 1 0 1		ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0 1 1 0		ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0 1 1 1		BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1 0 0 0		BS	CAN	(8	H	X	h	x
1 0 0 1		HT	EM)	9	I	Y	i	y
1 0 1 0		LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1 0 1 1		VT	ESC	+	;	K	[k	{
1 1 0 0		FF	FS	,	<	L	\	l	
1 1 0 1		CR	GS	-	=	M]	m	}
1 1 1 0		SO	RS	.	>	N	^	n	~
1 1 1 1		SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Zeichentabelle nach DIN 66003:

$b_3b_2b_1b_0$		$b_6b_5b_4$	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	NUL	(TC ₇) DLE	SP	0	P	'	P
0	0	0	1	(TC ₁) SOH	DC1	!	1	Q	a	q
0	0	1	0	(TC ₂) STX	DC2	"	2	R	b	r
0	0	1	1	(TC ₃) ETX	DC3	#	3	S	c	s
0	1	0	0	(TC ₄) EOT	DC4	\$	4	T	d	t
0	1	0	1	(TC ₅) ENQ	(TC ₈) NAK	%	5	U	e	u
0	1	1	0	(TC ₆) ACK	(TC ₉) SYN	&	6	V	f	v
0	1	1	1	BEL	(TC ₁₀) ETB	'	7	W	g	w
1	0	0	0	FE ₀ (BS)	CAN	(8	X	h	x
1	0	0	1	FE ₁ (HT)	EM)	9	Y	i	y
1	0	1	0	FE ₂ (LF)	SUB	*	:	Z	j	z
1	0	1	1	FE ₃ (VT)	ESC	+	;	Ä	k	ä
1	1	0	0	FE ₄ (FF)	IS ₄ (FS)	,	<	Ö	l	ö
1	1	0	1	FE ₅ (CR)	IS ₃ (GS)	-	=	Ü	m	ü
1	1	1	0	SO	IS ₂ (RS)	.	>	<	n	ß
1	1	1	1	SI	IS ₁ (US)	/	?	_	o	DEL

Abkürzungen:

SOH	Start Of Heading
STX	Start Of Text
ETX	End Of Text
EOT	End Of Transmission
ENQ	Enquiry
ACK	Acknowledge
BS	Backspace
HT	Horizontal Tab
LF	Line Feed
VT	Vertical Tab
FF	Form Feed
CR	Carriage Return
SO	Shift Out
SI	Shift In
DLE	Data Link Escape
DCi	Device Control i ($1 \leq i \leq 4$)
NAK	Negative Acknowledge
SYN	Synchronous Idle (SYNC)
ETB	End Of Transmission Block
CAN	Cancel
EM	End Of Medium
SUB	Substitute
ESC	Escape
FS	File separator
GS	Group separator
RS	Record separator
US	Unit separator
DEL	Delete
TC	Transmission Control
IS	Information Separator
FE	Format Effector

Internationales Referenzalphabet:

Das internationale Referenzalphabet ist unter mehreren Namen bekannt, z. B. unter
ISO 646-1972,
ECMA-6,
IA5 (internationales Telegraphie Alphabet No. 5).

Bis auf die Codepositionen 35, 36, 64, 91, 92, 93, 94, 96, 123, 124, 125, 126 ist das internationale Referenzalphabet gleichwertig zum ASCII-Code, wobei der semantische Inhalt einiger Kontrollcodes durchaus geändert wurde.

Den Positionen 35 und 36 können jeweils zwei unterschiedliche Zeichen zugeordnet werden, £ oder # bzw. \$ oder ¤.

Die zehn Positionen 64, 91, 92, 93, 94, 96, 123, 124, 125 und 126 sind für nationale oder anwendungsspezifische Belegungen reserviert.

Beispiele:

	64	91	92	93	94	96	123	124	125	126
US	@	[\]	^	`	{		}	~
DE	§	Ä	Ö	Ü	^	`	ä	ö	ü	ß
DK	@	Æ	Ø	Å	^	`	æ	ø	å	~
ES	§	ı	Ñ	ı	^	`	ı	ñ	ç	~
FR	à	ı	ç	§	^	μ	é	ù	è	¨

Tabelle von ISO/IEC 8859-1, genannt Latin 1 (erster Teil):

$b_3b_2b_1b_0$	$b_7b_6b_5b_4$	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
0 0 0 0		SP	0	@	P	P	'		P
0 0 0 1		!	1	A	Q	Q	a		q
0 0 1 0		"	2	B	R	R	b		r
0 0 1 1		#	3	C	S	S	c		s
0 1 0 0		\$	4	D	T	T	d		t
0 1 0 1		%	5	E	U	U	e		u
0 1 1 0		&	6	F	V	V	f		v
0 1 1 1		'	7	G	W	W	g		w
1 0 0 0		(8	H	X	X	h		x
1 0 0 1)	9	I	Y	Y	i		y
1 0 1 0		*	:	J	Z	Z	j		z
1 0 1 1		+	;	K	[[k		{
1 1 0 0		,	<	L	\	\	l		
1 1 0 1		-	=	M]`]`	m		}
1 1 1 0		.	>	N	~	~	n		~
1 1 1 1		/	?	O			o		

Tabelle von ISO/IEC 8859-1, genannt Latin 1 (zweiter Teil):

$b_3b_2b_1b_0$	$b_7b_6b_5b_4$	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0 0 0 0		NBSP	°	À	°	À	Đ	à	đ
0 0 0 1		ı	±	Á	±	Á	Ñ	á	ñ
0 0 1 0		¢	²	Â	³	Â	Ò	â	ò
0 0 1 1		£	³	Ã	´	Ã	Ó	ã	ó
0 1 0 0		¤	´	Ä	µ	Ä	Ô	ä	ô
0 1 0 1		¥	µ	Å	¶	Å	Õ	å	õ
0 1 1 0		¦	¶	Æ	·	Æ	Ö	æ	ö
0 1 1 1		§	·	Ç	'	Ç	×	ç	ø
1 0 0 0		¨	'	È	ı	È	Ø	è	ù
1 0 0 1		©	ı	É	°	É	Ù	é	ú
1 0 1 0		ª	°	Ê	»	Ê	Û	ê	û
1 0 1 1		«	»	Ë	¼	Ë	Ü	ë	ü
1 1 0 0		¬	¼	Ì	½	Ì	Ý	ì	ý
1 1 0 1		SHY	½	Í	¾	Í	Þ	í	þ
1 1 1 0		®	¾	Î	¿	Î	ß	î	ÿ
1 1 1 1		¯	¿	Ï		Ï		ï	

Unterteilung von ISO 8859:

ISO/IEC 8859-1 (Latin 1): Westeuropäische Sprachen

ISO/IEC 8859-2 (Latin 2): Osteuropäische Sprachen

ISO/IEC 8859-3 (Latin 3): Südeuropäische Sprachen

ISO/IEC 8859-4 (Latin 4): Nordeuropäische Sprachen

ISO/IEC 8859-5: Kyrillisch

ISO/IEC 8859-6: Arabisch

ISO/IEC 8859-7: Griechisch

ISO/IEC 8859-8: Hebräisch

ISO/IEC 8859-9 (Latin 5): Türkisch

ISO/IEC 8859-10 (Latin 6): Nordische Sprachen

ISO/IEC 8859-11: Thai

ISO/IEC 8859-13 (Latin 7): Baltische Ergänzungen

ISO/IEC 8859-14 (Latin 8): Keltisch

**ISO/IEC 8859-15 (Latin 9): Latin 1 mit Ligaturen
und Euro-Symbol**

**ISO/IEC 8859-16 (Latin 10): Ergänzungen zu
Rumänisch und anderen Sprachen**

UNICODE:

Zuweisung von Zeichen zu Codepunkten aus dem Raum

0x000000 .. 0x10FFFF.

**Der Coderaum 0x0000 .. 0xFFFF, genannt Basic
Multilingual Plane, umfaßt die gängigsten Zeichen.**

Teilmengen:

0x0020 .. 0x00FE : Druckbare ASCII-Zeichen

0x0020 .. 0x024F : Lateinische Zeichen

0x20A0 .. 0x20CF : Währungssymbole

0x2700 .. 0x27BF : Dingbats

0x4E00 .. 0x9FFF : CJK vereinheitlichte Ideogramme

0xE000 .. 0xF8FF : Privater Bereich

Bemerkungen:

- (i) CJK ist Abkürzung für Chinese, Japanese, and Korean.**
- (ii) Die Norm ISO-10646, Universal Multiple-Octet Coded Character Set, und Unicode werden gemeinsam weiterentwickelt. Im USC stehen 31 Bit für die Zeichenzuweisung zur Verfügung.**
- (ii) Unter der Internetadresse <http://www.unicode.org> findet man die aktuelle Version des Unicode.**

Beispiele aus Unicode:

Nummer	Zeichenname	Zeichenbild
192	LATIN CAPITAL LETTER A WITH GRAVE	À
193	LATIN CAPITAL LETTER A WITH ACUTE	Á
913	GREEK CAPITAL LETTER ALPHA	Α
914	GREEK CAPITAL LETTER BETA	Β
8473	DOUBLE-STRUCK CAPITAL P	ℙ
8474	DOUBLE-STRUCK CAPITAL Q	ℚ
8475	SCRIPT CAPITAL R	℞
12353	HIRAGANA LETTER SMALL A	ぁ
12354	HIRAGANA LETTER A	あ
12355	HIRAGANA LETTER SMALL I	ぃ
12356	HIRAGANA LETTER I	い
19993	"namenloser Ideograph"	丙

UTF-8: (UTF = Universal Transformation Format, beschrieben u. a. in RFC 3629)

Transformationsbeschreibung:

UCS-4 Bereich (sedezimal)	UTF-8 Oktett Sequenz (binär)
0000 0000 - 0000 007F	0xxxxxxx
0000 0080 - 0000 07FF	110xxxxx 10xxxxxx
0000 0800 - 0000 FFFF	1110xxxx 10xxxxxx 10xxxxxx
0001 0000 - 001F FFFF	11110xxx 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx
0020 0000 - 03FF FFFF	111110xx 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx
0400 0000 - 7FFF FFFF	1111110x 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx
	10xxxxxx 10xxxxxx

Beispiel:

Die UCS-2 Folge "A<NOT IDENTICAL TO><ALPHA>." (0041, 2262, 0391,002E) wird in UTF-8 wie folgt codiert: 41 E2 89 A2 CE 91 2E

UTF-7:

Einführung zweier Alphabete, ein Teilalphabet T von ASCII und ein 64-Zeichen-Alphabet.

Das Teilalphabet T besteht aus folgenden ASCII-Zeichen:

den Großbuchstaben A .. Z,
den Kleinbuchstaben a .. z,
den Ziffern 0 .. 9,
dem Zeichen ' (dezimal 39),
dem Zeichen ((dezimal 40),
dem Zeichen) (dezimal 41),
dem Zeichen , (dezimal 44),
dem Zeichen - (dezimal 45),
dem Zeichen . (dezimal 46),
dem Zeichen / (dezimal 47),
dem Zeichen : (dezimal 58),
dem Zeichen ? (dezimal 63).

Ein 64-Zeichen-Alphabet:

Wert	Zeichen	Wert	Zeichen	Wert	Zeichen	Wert	Zeichen
0	A	17	R	34	i	51	z
1	B	18	S	35	j	52	0
2	C	19	T	36	k	53	1
3	D	20	U	37	l	54	2
4	E	21	V	38	m	55	3
5	F	22	W	39	n	56	4
6	G	23	X	40	o	57	5
7	H	24	Y	41	p	58	6
8	I	25	Z	42	q	59	7
9	J	26	a	43	r	60	8
10	K	27	b	44	s	61	9
11	L	28	c	45	t	62	+
12	M	29	d	46	u	63	/
13	N	30	e	47	v		
14	O	31	f	48	w		
15	P	32	g	49	x		
16	Q	33	h	50	y		

Codiervorschrift:

Die Zeichen des Alphabetes T werden unverändert übernommen. Die sonstigen Zeichen werden im 64-Zeichen-Alphabet codiert, wobei das Zeichen "+" als Einleitungszeichen dient. Das Ende einer im 64-Zeichen-Alphabet codierten Folge wird durch ein nicht diesem Alphabet angehörendes Zeichen markiert, im Zweifelsfalle durch das Zeichen "-".

Beispiele:

Die UCS-2 Folge

"A<NOT IDENTICAL TO><ALPHA>."

(0041, 2262, 0391, 002E)

wird in UTF-7 wie folgt codiert:

A+ImIDkQ.

Die UCS-2 Folge

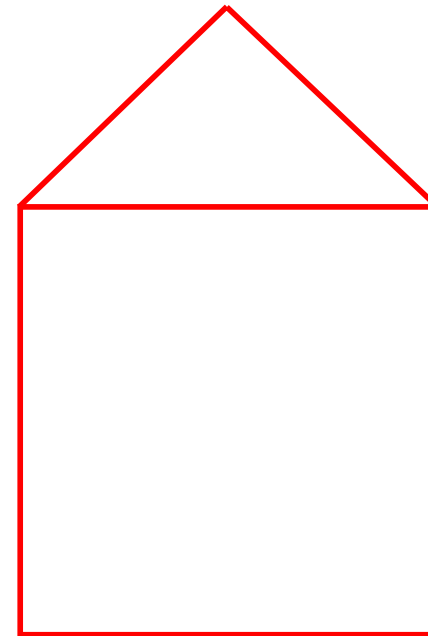
(65E8, 672C, 8A9e)

wird in UTF-7 wie folgt codiert:

+ZeVnLIqe-

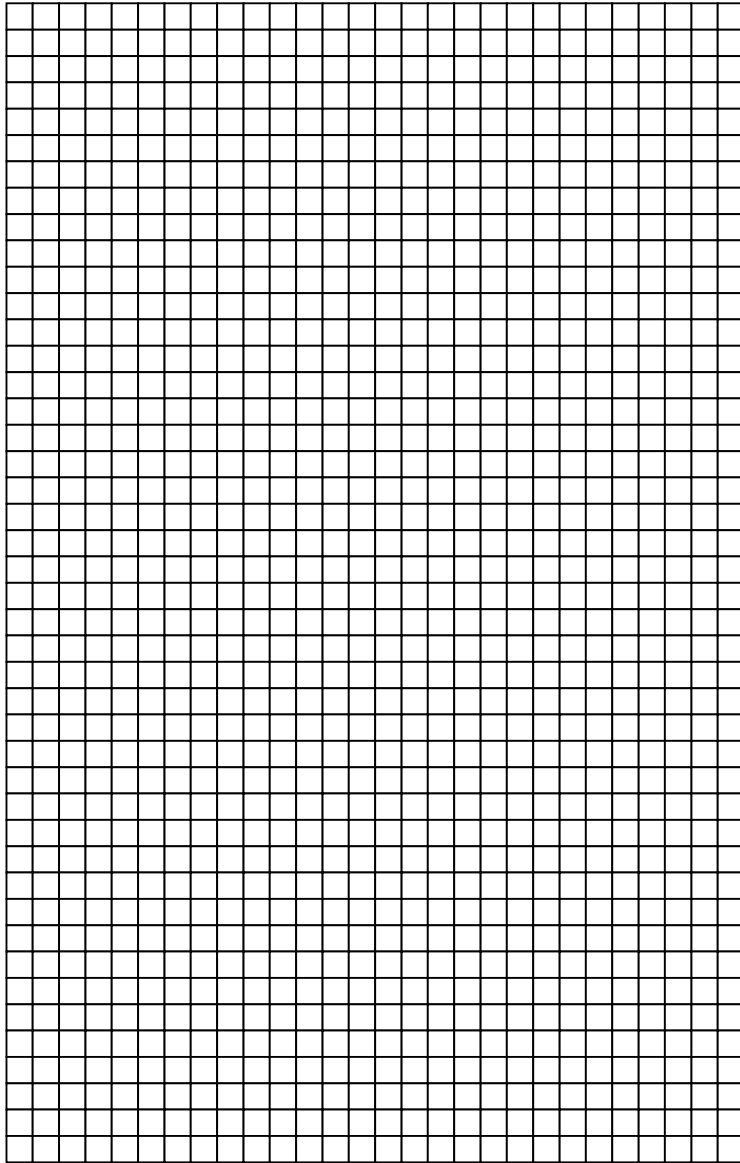
Bemerkung Der vollständige UTF-7-Algorithmus wird in RFC 2152 beschrieben. Dort wird noch ein zusätzliches Unteralphabet von ASCII, "optional direct characters", eingeführt.

Beispiel zur Digitalisierung:

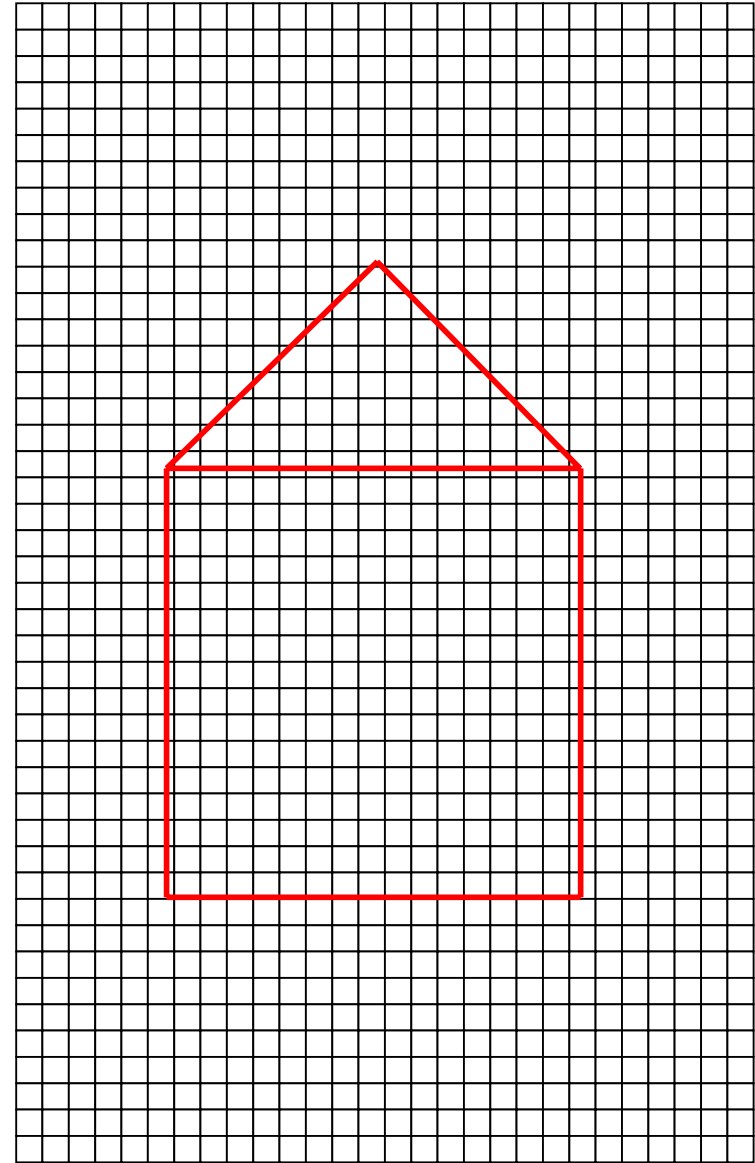


Das Haus des Nikolaus

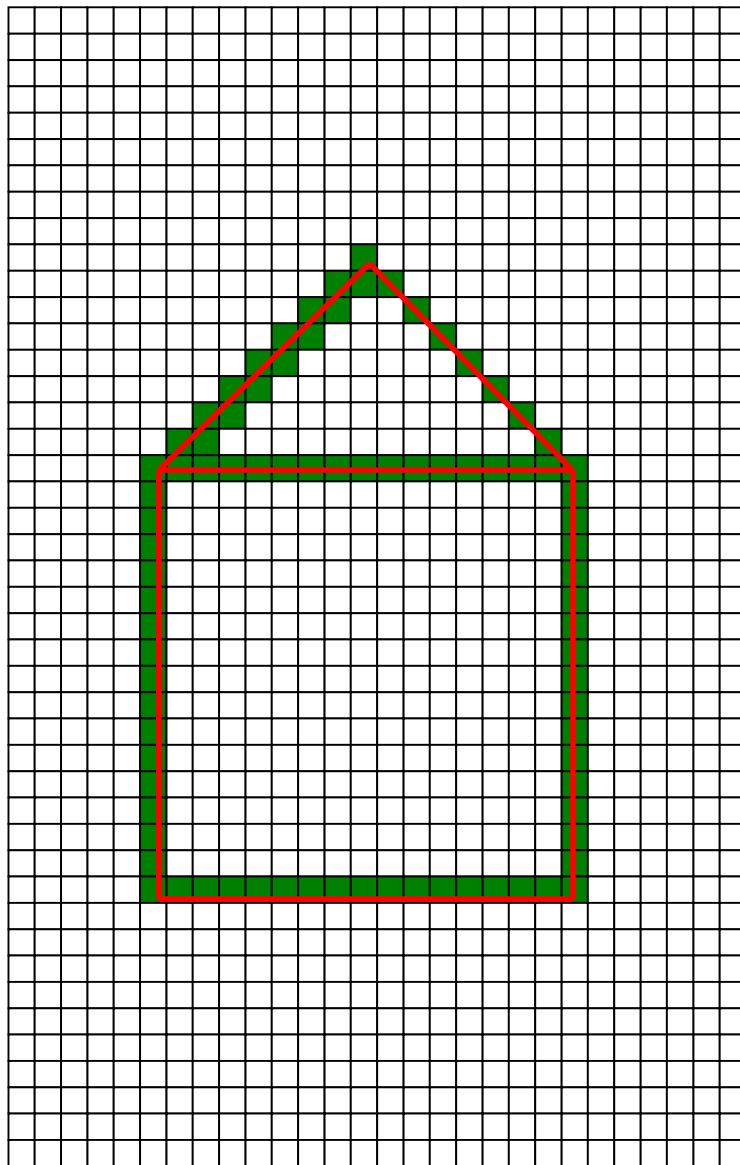
Ein Raster:



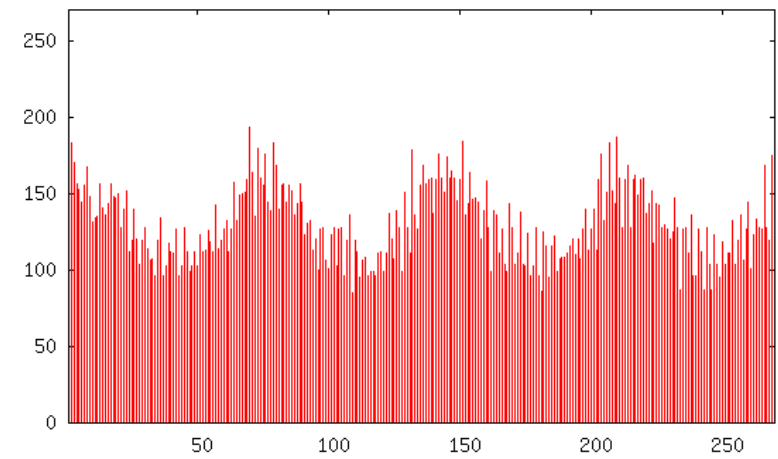
Raster mit Bild:



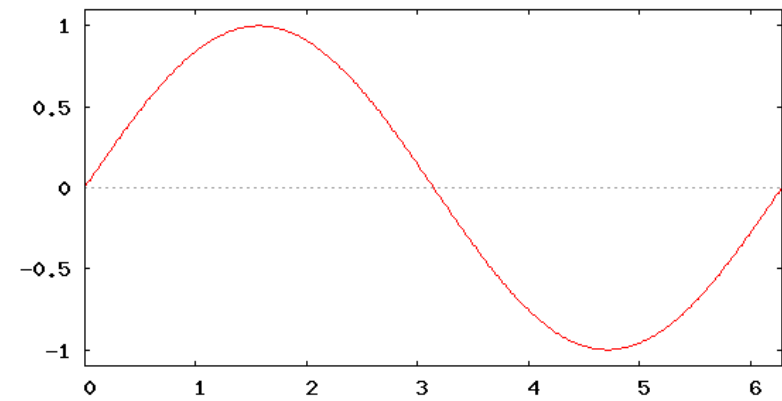
Gerastertes Bild:



Periodennahe Vorgänge:



270 fortlaufende Werte aus einer mit einer Abtastrate von 11 kHz erstellten Sounddatei.



Sinus-Funktion

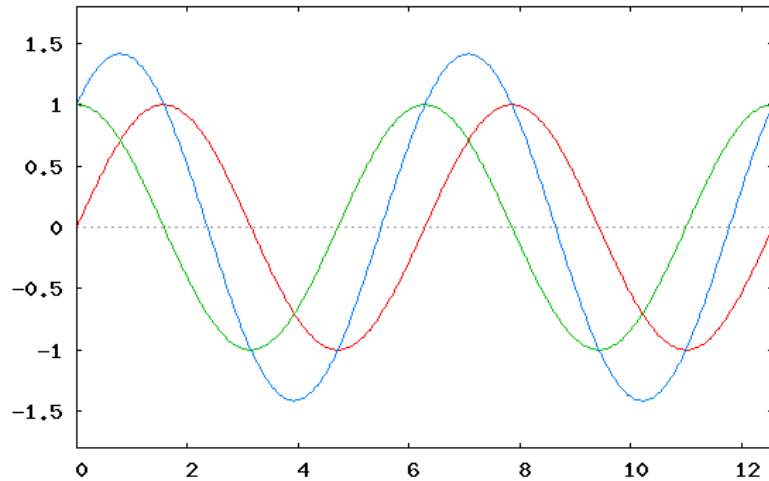


Bild der Funktionen Sinus, Kosinus, Sinus + Kosinus

Bemerkung: Viele Funktionen lassen sich darstellen als Summen von Sinus- und Kosinus-funktionen.

Beispiele sind:

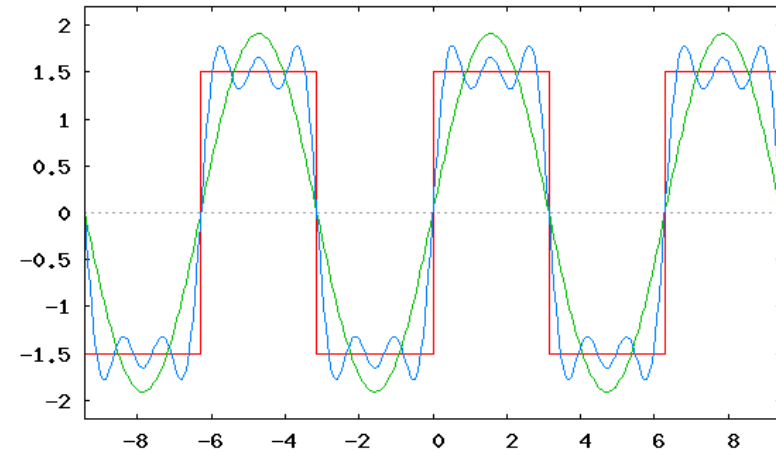
Rechteckkurve der Höhe $2 \cdot h$:

$$f(x) = \frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot (\sin(x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot x) + \dots)$$

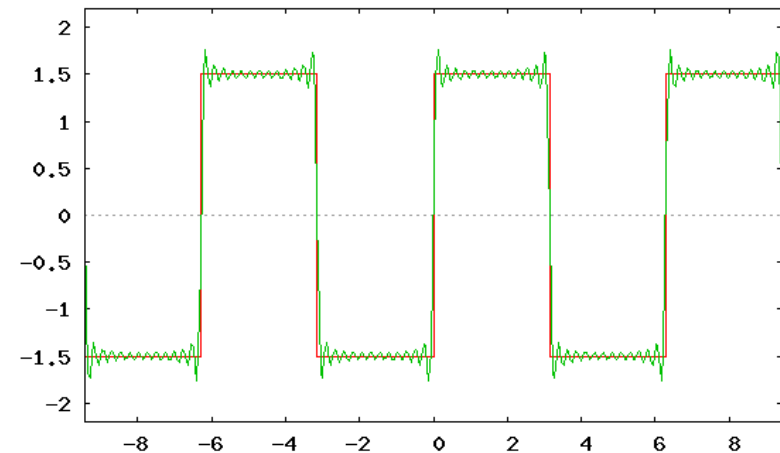
Sägezahnkurve der Höhe $2 \cdot h$:

$$f(x) = -\frac{2 \cdot h}{\pi} \cdot (\sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot x) + \dots)$$

Rechteckkurve:

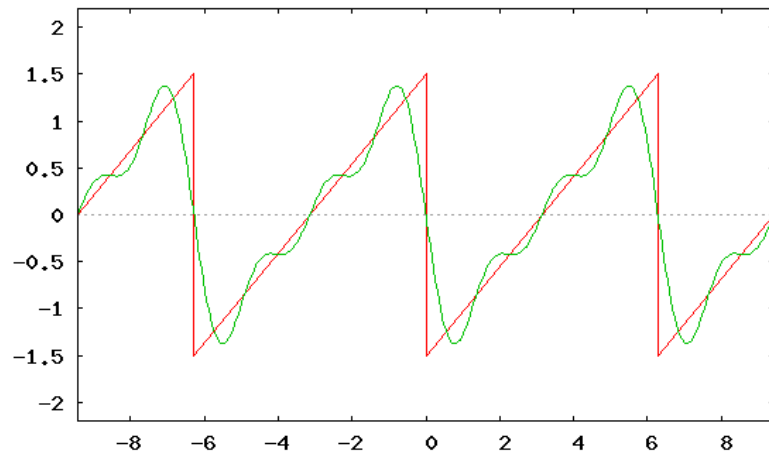


Dreigliedrige Näherung der Rechteckkurve

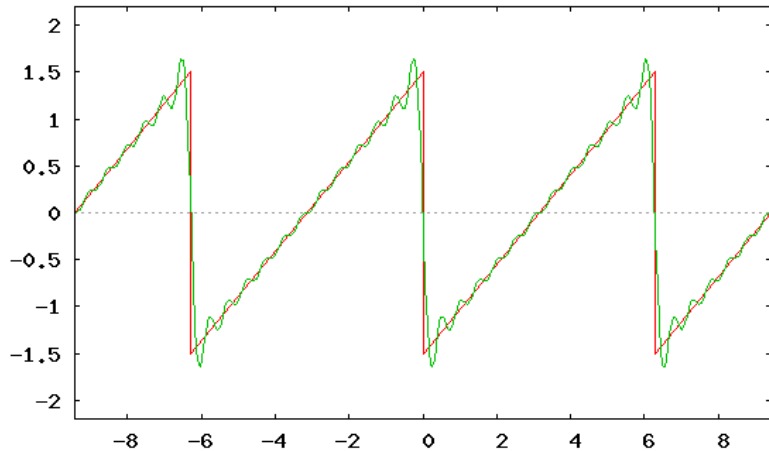


Dreizehngliedrige Näherung der Rechteckkurve, man erkennt gut das Gibbsche Phänomen.

Sägezahnkurve:



Dreigliedrige Näherung der Sägezahnkurve



Zwölfgliedrige Näherung der Sägezahnkurve

Fourier-Darstellung periodischer Funktionen:

Jede hinreichend gutmütige periodische Funktion $f(x)$ der Periode T kann durch ihre Fourierreihe $g(x)$ dargestellt werden:

$$g(x) = \frac{1}{2} * c + \sum_{i=1}^{\infty} a_i * \sin(2\pi i f x) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i * \cos(2\pi i f x)$$

wobei $f = 1/T$ die Grundfrequenz ist.

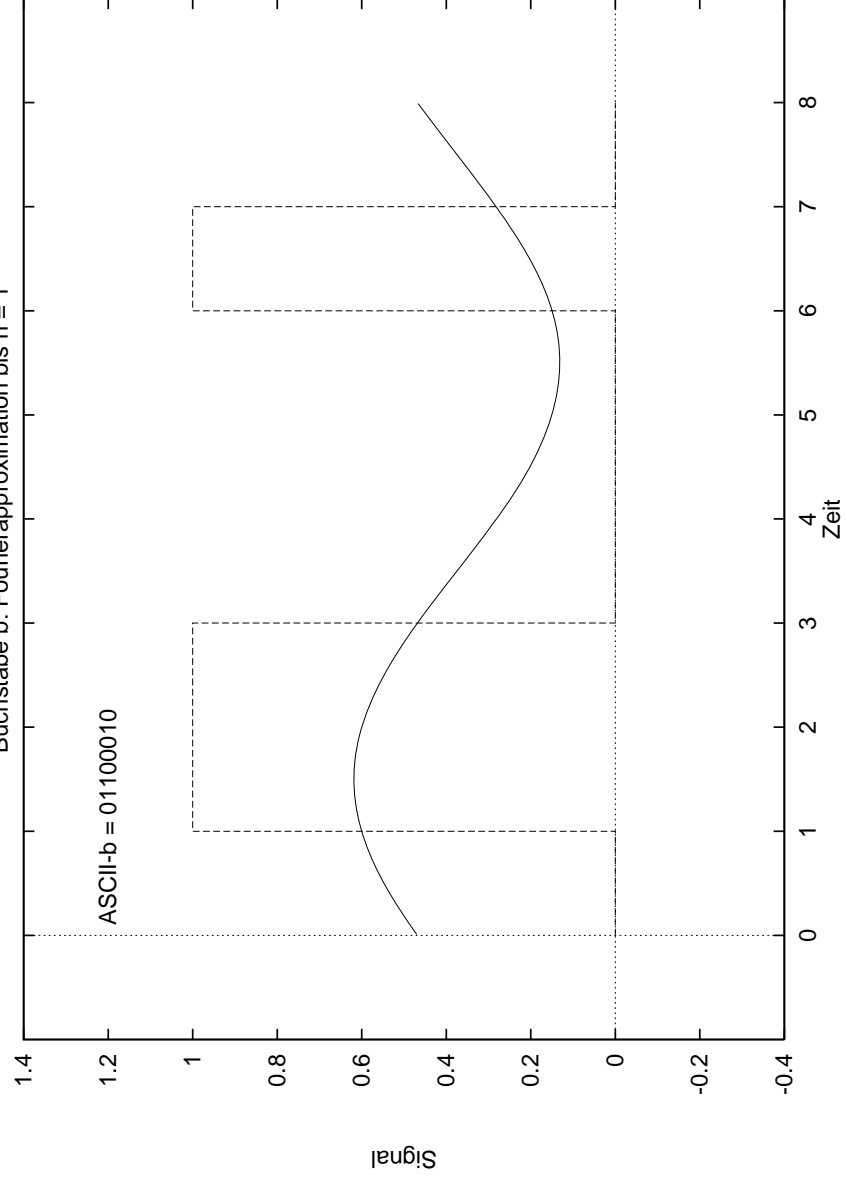
Die Fourier-Koeffizienten c , a_i , b_i ($i = 1, \dots, \infty$) berechnet man gemäß:

$$c = \frac{2}{T} * \int_0^T g(t) dt$$

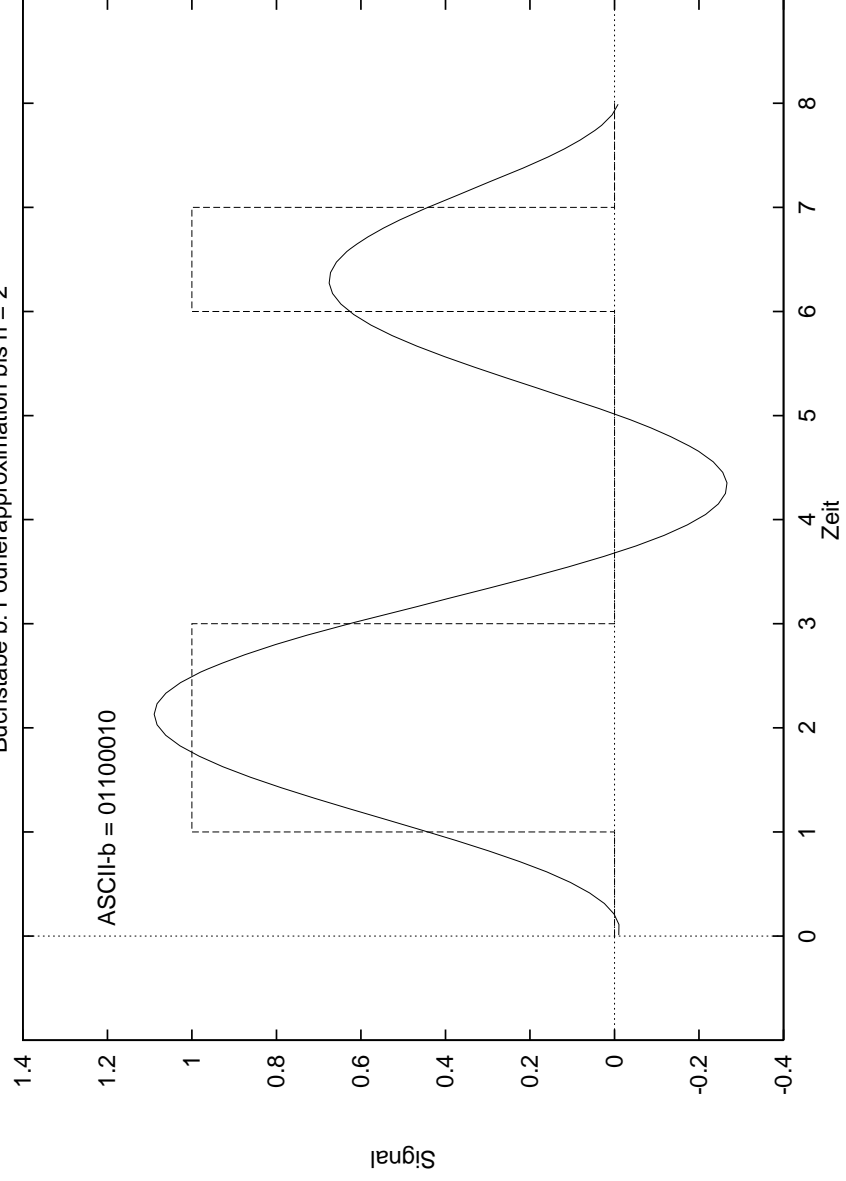
$$a_i = \frac{2}{T} * \int_0^T g(t) * \sin(2\pi i f t) dt \quad (i=1, 2, \dots, \infty)$$

$$b_i = \frac{2}{T} * \int_0^T g(t) * \cos(2\pi i f t) dt \quad (i=1, 2, \dots, \infty)$$

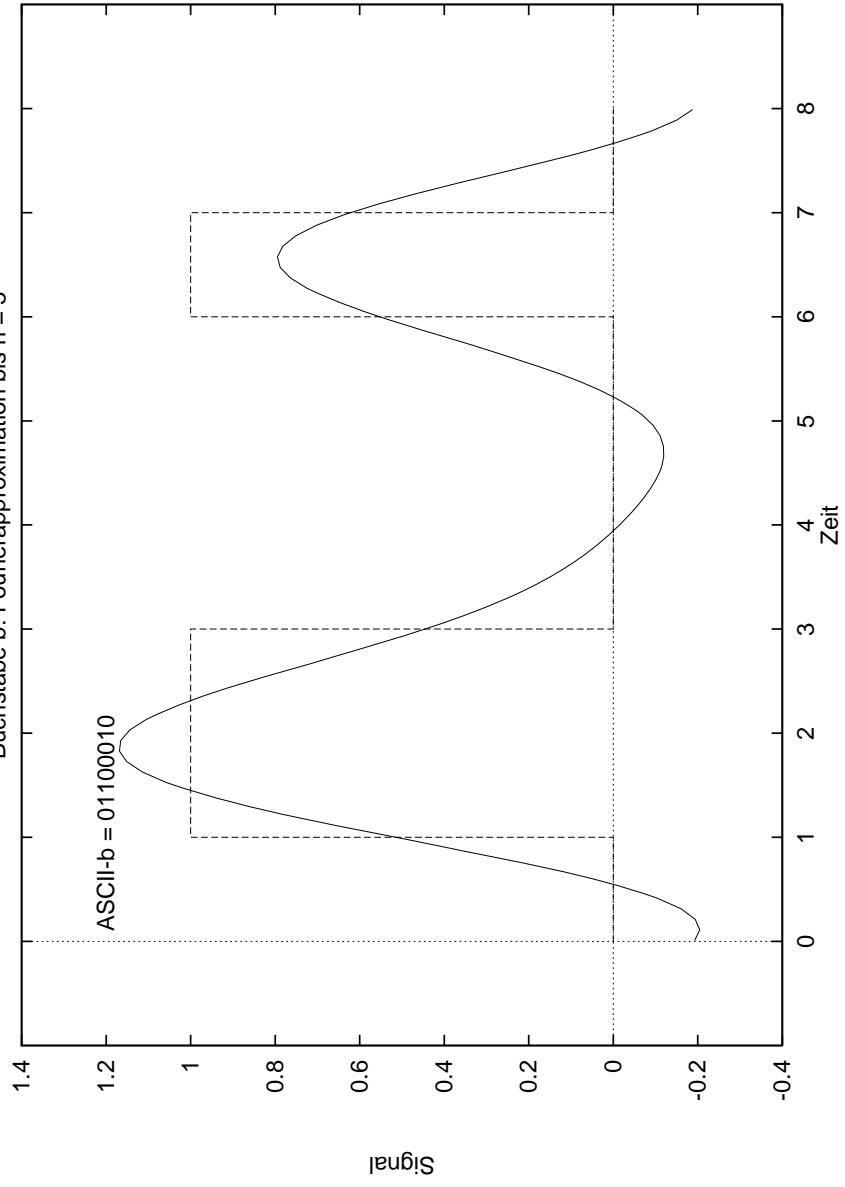
Buchstabe b: Fourierapproximation bis n = 1



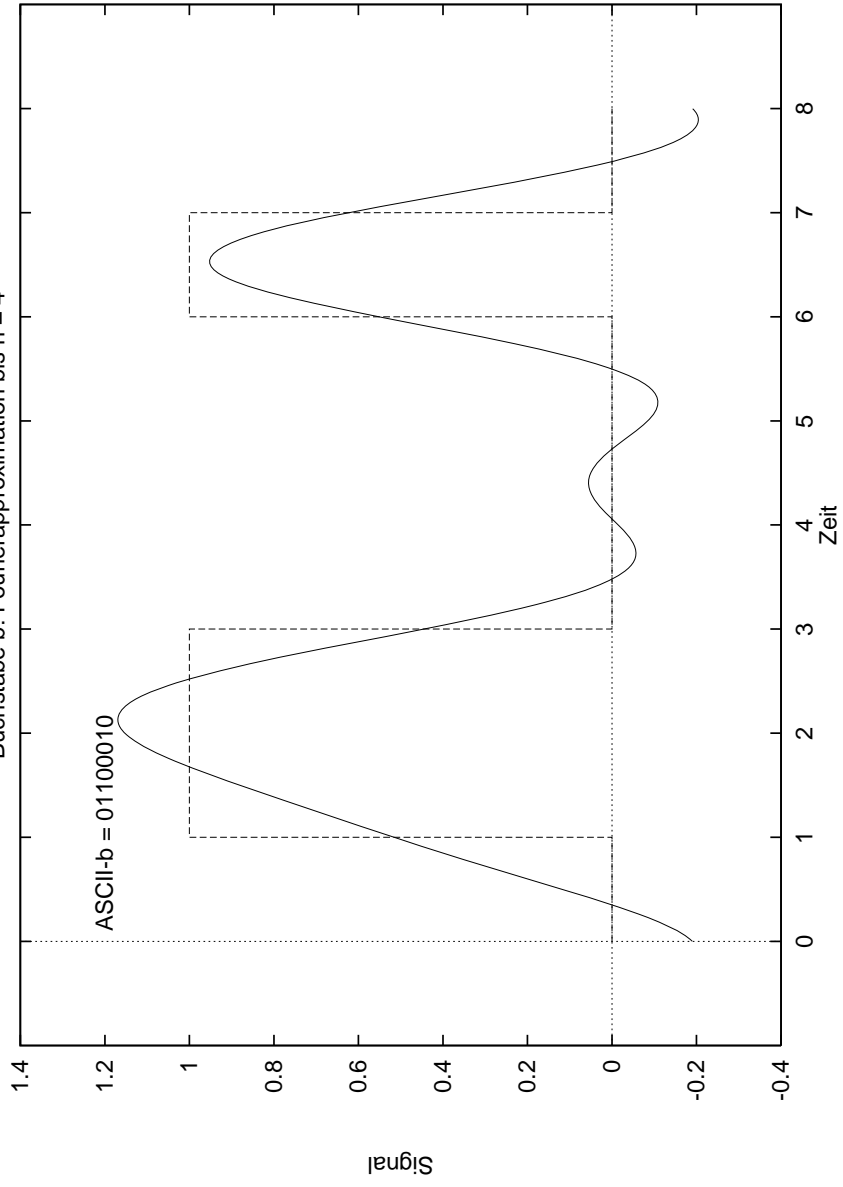
Buchstabe b: Fourierapproximation bis n = 2



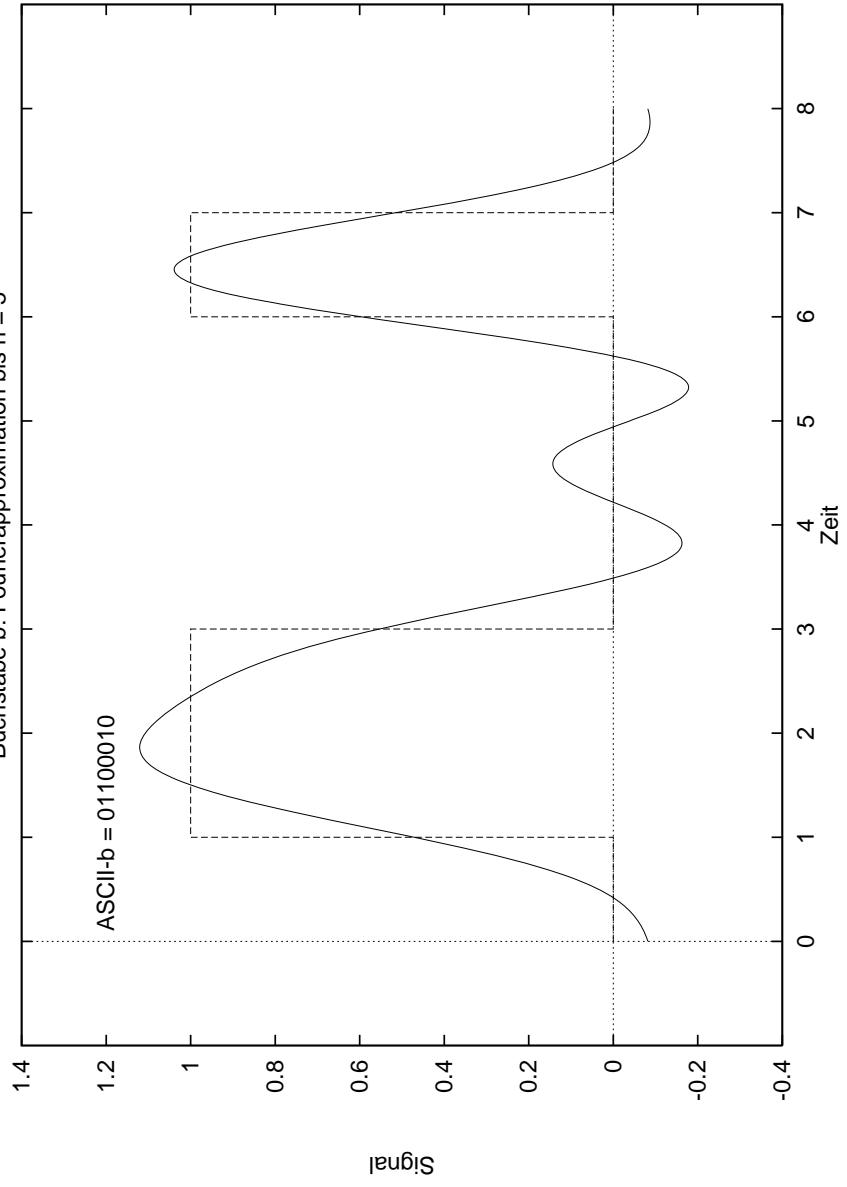
Buchstabe b: Fourierapproximation bis n = 3



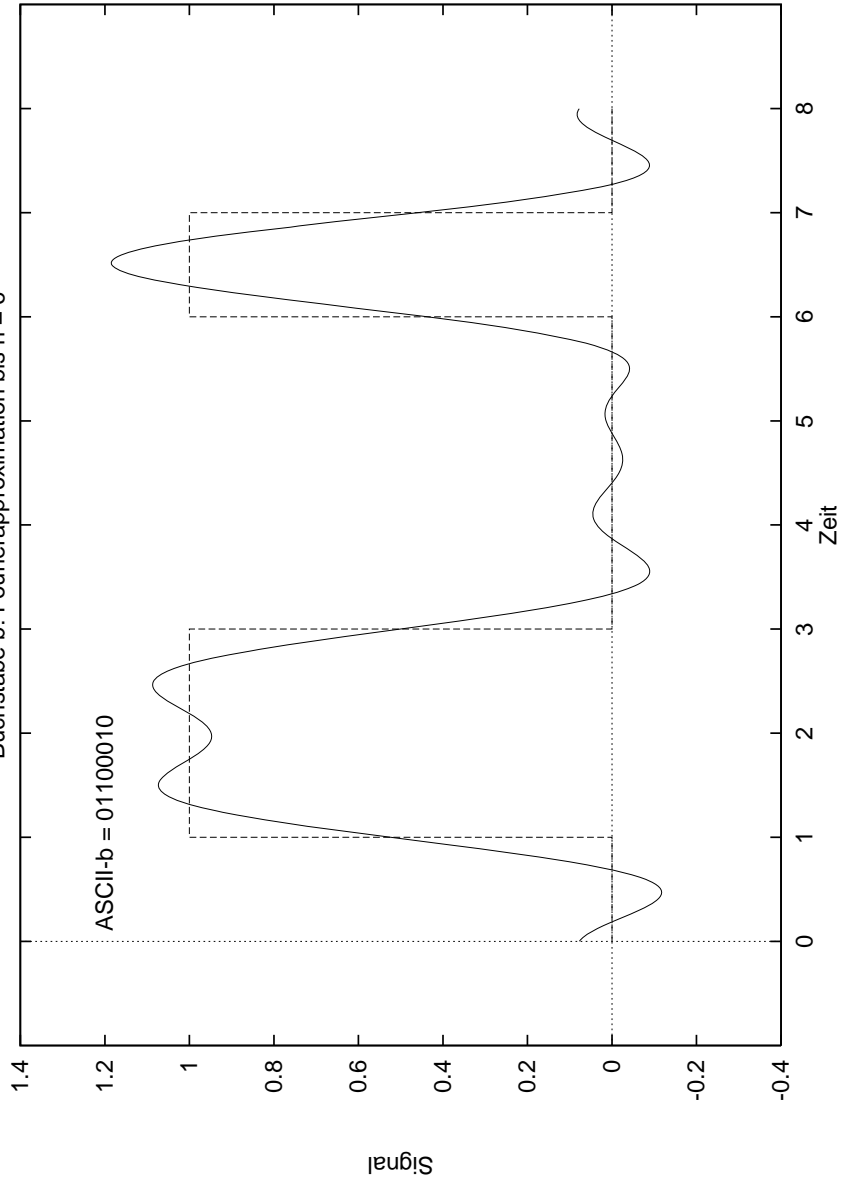
Buchstabe b: Fourierapproximation bis n = 4



Buchstabe b: Fourierapproximation bis n = 5



Buchstabe b: Fourierapproximation bis n = 6



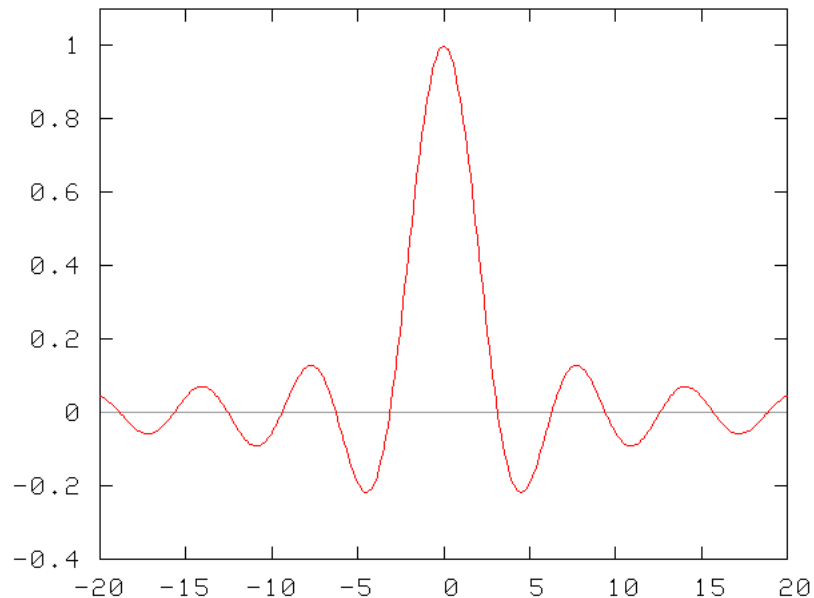
Nyquist-Theorem:

Sei f eine Funktion der Form

$$f(t) = \int_0^g (a(v) * \cos(2 * \pi * v * t) + b(v) * \sin(2 * \pi * v * t)) dv.$$

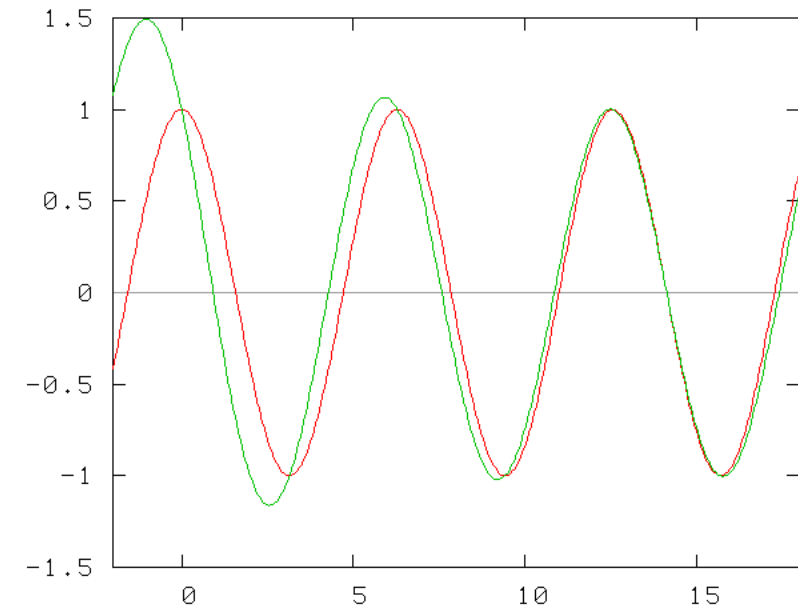
Sei $s \leq 1 / (2 * g)$, dann ist $f(t)$ darstellbar in der Form

$$f(t) = \sum_n f(n * s) * \frac{\sin\left(\frac{\pi * t}{s} - n * \pi\right)}{\frac{\pi * t}{s} - n * \pi}$$



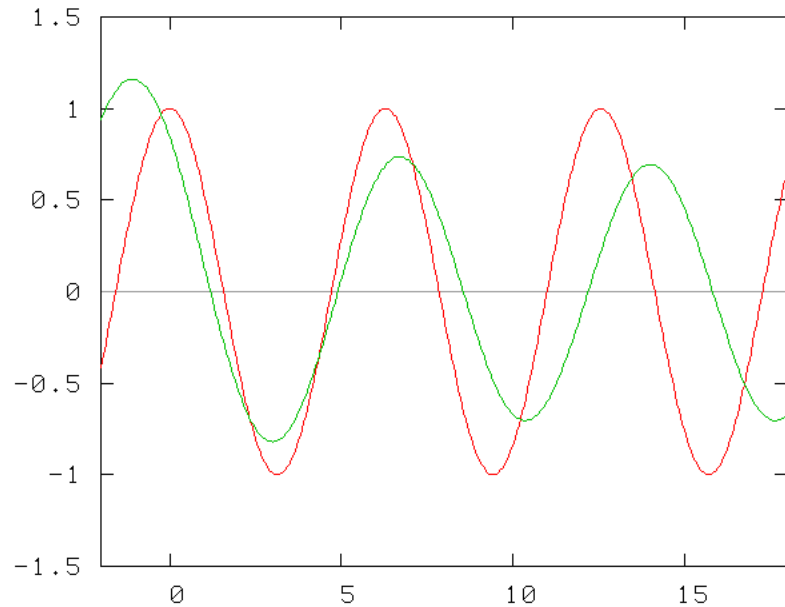
Graph der Funktion $\sin(x)/x$

Demonstration der Nyquist-Formel: Approximation der Funktion Kosinus:



Verwendet wurden 10 Stützstellen, $\cos(0,0)$, $\cos(\pi)$, $\cos(2*\pi)$, $\cos(3*\pi)$, $\cos(4*\pi)$, $\cos(5*\pi)$, $\cos(6*\pi)$, $\cos(7*\pi)$, $\cos(8*\pi)$, $\cos(9*\pi)$; der Approximationsfehler rührt daher, daß die Summenbildung nur über zehn Terme erfolgte.

Demonstration des Aliaseffekts bei zu geringer Abtastrate; statt der Abtastperiode π wurde die Abtastperiode $1,1*\pi$ verwendet.

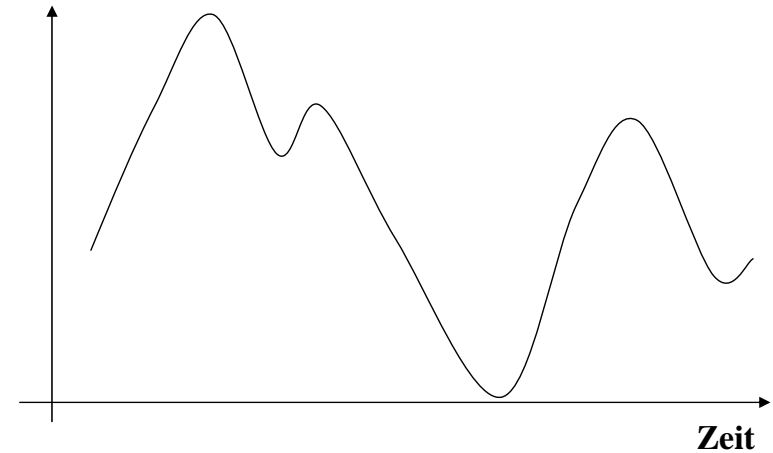


Zur Approximation von $\cos(x)$ wurden zehn Stützstellen verwendet, $\cos(0,0)$, $\cos(1,1*\pi)$, $\cos(2,2*\pi)$, $\cos(3,3*\pi)$, $\cos(4,4*\pi)$, $\cos(5,5*\pi)$, $\cos(6,6*\pi)$, $\cos(7,7*\pi)$, $\cos(8,8*\pi)$, $\cos(9,9*\pi)$; man sieht deutlich den Approximationsfehler.

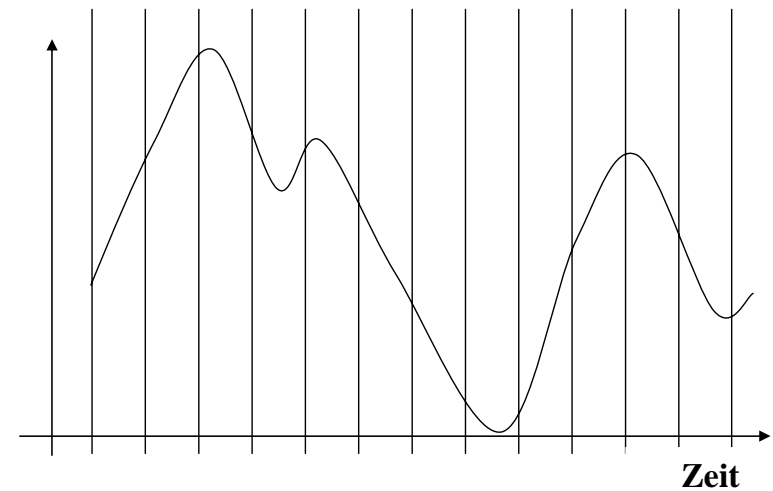
Bemerkung: Man erhält Aliaseffekte, falls die Abtastfrequenz kleiner als die doppelte Grenzfrequenz ist .

Zur Diskretisierung kontinuierlicher Signale:

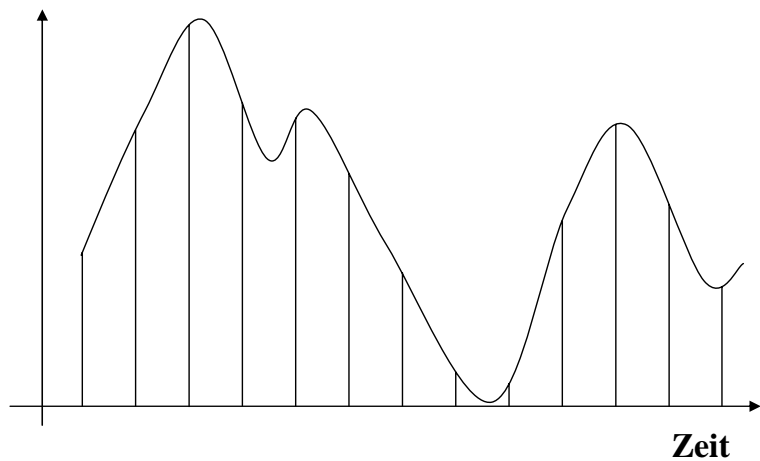
Beispiel eines wert- und zeitkontinuierlichen Signals:



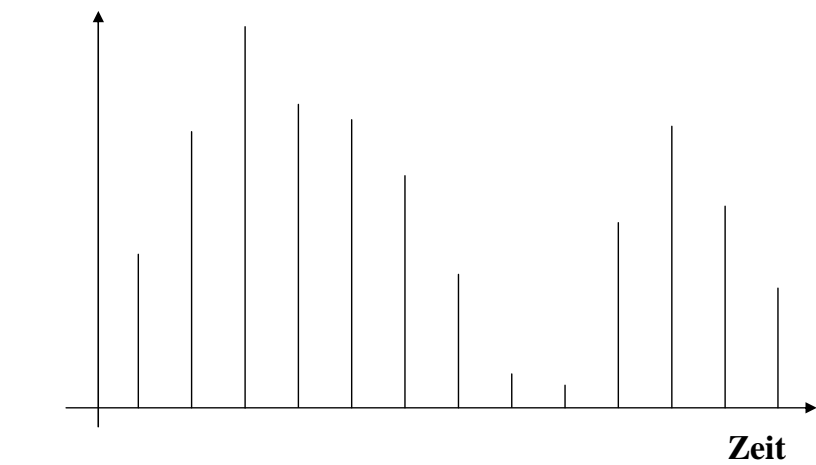
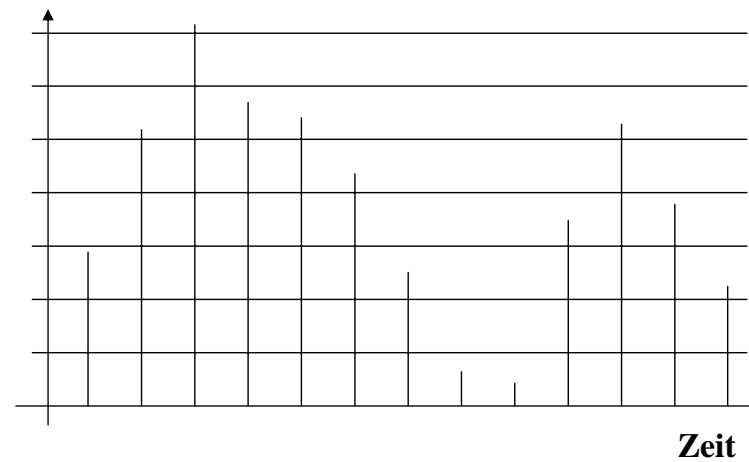
Überlagerung eines äquidistanten Zeitrasters:



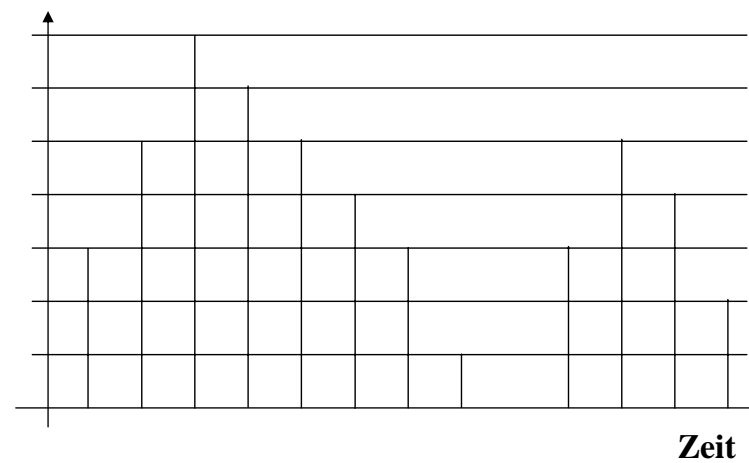
Man erhält ein wertkontinuierliches und zeitdiskretes Signal:



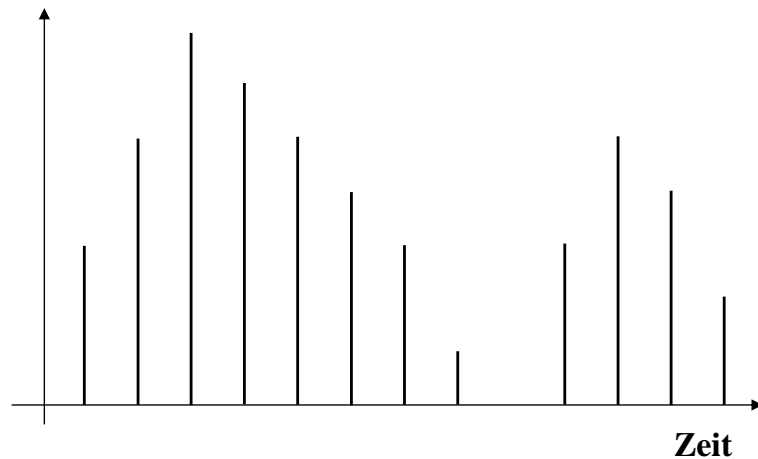
Quantelung der Amplitudenwerte ergibt ein wert- und zeitdiskretes Signal:



Äquidistante Quantelung auf acht Werte:



Das erhaltene Signal ist wert- und zeitdiskret.



Bemerkungen:

- (i) Bei der Zeitdiskretisierung sollte man auf die Einhaltung des Nyquist-Kriteriums achten, sonst erhält man Aliaseffekte.
- (ii) Die Quantisierung führt zu einem Quantisierungsfehler.
- (iii) Zu einer ersten Abschätzung des Quantisierungsrauschens QR:

Repräsentieren die Amplitudenwerte Energien oder Leistungen, dann gilt bei 2^n Linearstufen:

$$\begin{aligned} \text{QR} &\approx 10 * \log_{10} (1/2^n) = 10 * \log_{10} (2^{-n}) \\ &= -10 * n * \log_{10} 2 \approx -3 * n \text{ dB} \end{aligned}$$

Pulscode-Modulation im Zusammenhang mit menschlichem Hören und Telephonie:

Man schätzt, daß die kleinste Bestrahlungsstärke, die der Mensch noch wahrnimmt, $2 * 10^{-12} \text{ Watt/m}^2$ beträgt. Die größte "noch ertragbare" Bestrahlungsstärke ist etwa um den Faktor 10^{12} größer. Ein Telephonkanal stellt einen maximalen Frequenzbereich von 4.000 Hz zur Verfügung. Das Abtasttheorem fordert eine Mindestabtastrate von 8.000 Abtastungen pro Sekunde, damit erfolgt alle 125 μs eine Amplitudenbestimmung. Es bleibt die Festlegung der Zahl der Quantisierungsstufen.

Fordert man für die Quantisierung einen minimalen Signal-Rausch-Abstand von 65 dB, dann gilt:

$$\begin{aligned} 65 &= 20 * \log_{10} x \\ x &= 10^{3,25} \approx 1778 \end{aligned}$$

(Bemerkung: Man verwendet den Faktor 20, weil man auf Telephonleitungen Spannungen oder Stromstärken mißt und nicht Energien oder Leistungen.)

Die Unterscheidung von 1778 Werten erfordert bei einer Bitcodierung 11 Bit. Im Telefonsystem verwendet man nur 8 Bit, indem man kleine Amplitudenwerte relativ genauer als große Amplitudenwerte darstellt. Es sind zwei Kompondierungsfunktionen weit verbreitet, in Europa die A-Kennlinie und in den USA und Japan die μ -Kennlinie.

A-Kennlinie:

Seien $A = 87,56$ und $B = 1 + \ln(A)$.

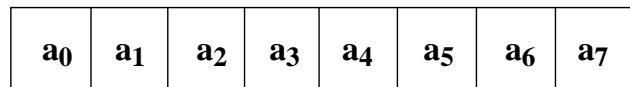
$$y = \begin{cases} (1+\ln(Ax)) / B & \text{für } 1/A \leq x \leq 1 \\ A*x / B & \text{für } -1/A \leq x \leq 1/A \\ (1 + \ln(-Ax)) / B & \text{für } -1 \leq x \leq -1/A \end{cases}$$

μ -Kennlinie:

$y = \text{sgn}(x) * \ln(1 + \mu|x|) / \ln(1 + \mu)$ für $-1 \leq x \leq 1$
mit $\mu = 255$.

Bemerkung: Den Argumentbereich teilt man bei beiden Kompondierungen in einzelne Segmente auf, innerhalb deren man jeweils linear interpoliert. Beide Codierungsvorschriften sind in der ITU-Empfehlung G.711 festgeschrieben.

Format eines PCM-Codeworts:



Segmentangabe, lineare Codierung
Vorzeichen, + = 1, - = 0

Intervalleinteilung für positiven Teil der A-Kennlinie:

Segment +7	{ x = 1	y = 1
Segment +6	{ x = 1/2	y = 0,873336
Segment +5	{ x = 1/4	y = 0,746672
Segment +4	{ x = 1/8	y = 0,620008
Segment +3	{ x = 1/16	y = 0,493343
Segment +2	{ x = 1/32	y = 0,366679
Segment +1b	{ x = 1/64	y = 0,240015
Segment +1a	{ x = 1/128	y = 0,125004
	{ x = 0	y = 0

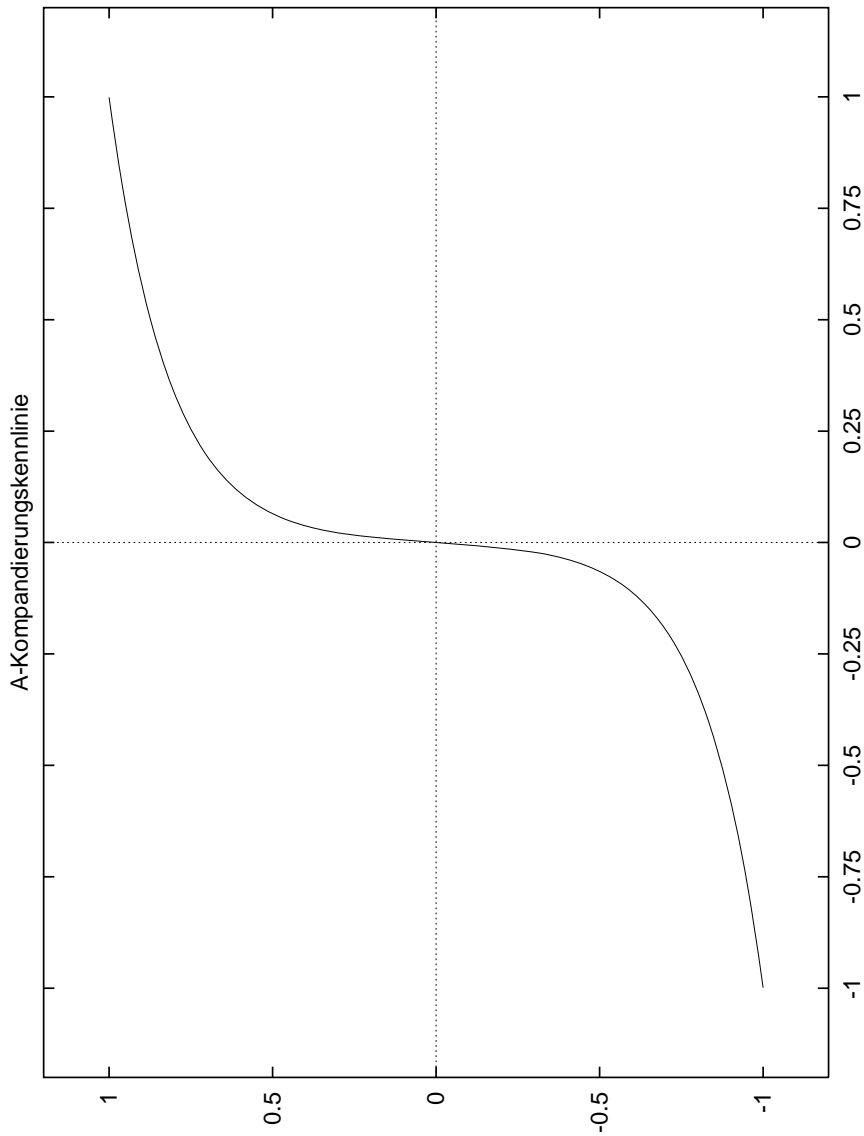
Bemerkung: Innerhalb der einzelnen Segmente interpoliert man linear.

Bemerkung: 8.000 Werte pro Sekunde je zu 8 Bit ergibt einen Telefonkanal von 64 kb/s.

Die Umkehrfunktionen:

für das A-Gesetz: $F^{-1}(x) =$
 $\text{sgn}(x) * |x| * (1 + \ln(A)) / A$
 für $0 \leq |x| \leq 1/(1+\ln(A))$
 $\text{sgn}(x) * \exp(|x|*(1+\ln(A)) - 1) / A$
 für $1 / (1+\ln(A)) \leq |x| \leq 1$

für das μ -Gesetz: $F^{-1}(x) = \text{sgn}(x) * ((1+\mu)^{|x|} - 1) / \mu$



**Reduzierung von 11-Bit-Werten auf 8-Bit-Werte
mittels μ -Gesetz, hier nur nichtnegative Werte:**

0/1024	--	0
1/1024	--	5
2/1024	--	9
3/1024	--	13
4/1024	--	16
5/1024	--	19
6/1024	--	21
7/1024	--	23
8/1024	--	25
	⋮	
256/1024	--	96
257/1024	--	96
258/1024	--	96
259/1024	--	97
	⋮	
512/1024	--	112
513/1024	--	112
514/1024	--	112
515/1024	--	112
	⋮	
1000/1024	--	127
1001/1024	--	127
1002/1024	--	127
1003/1024	--	127

Bemerkung: Bei der Rücktransformation von 8-Bit-Werten zu 11-Bit-Werten tritt ein Informationsverlust auf, z. B. aus dem 8-Bit-Wert 96 wird der 11-Bit-Wert 252 unabhängig vom Originalwert.