

Aufgaben + Lösungen zur Belief-Revision

Özgür Özçep

1

Aufgaben zu den Postulaten

- a) **“Nichts neues“**: Zeige, dass aus (K*1)-(K*5) folgt: Wenn $a \in K$, dann ist $K^*a = K$. Das besagt: Wenn a bereits zu den geglaubten Sätzen gehört, ändert das Revidieren mit a nichts an meinem Meinungssystem. (Forderung nach minimaler Änderung ist erfüllt)
- b) **Nichtkommutativität**: Zeige, dass im allgemeinen nicht gilt: $(K^*_a)^*_b = (K^*_b)^*_a$. Das Ergebnis bedeutet: Die Entwicklung meines Meinungssystems hängt entscheidend davon ab, in welcher Reihenfolge ich Informationen erhalte.
- c) **„Lemma“**: Zeigen Sie: Aus den AGM-Postulaten für Revisionsoperatoren $*$ (einschließlich (K*7) und (K*8)) folgt: $K^*_a = K^*_b$ gdw $a \in K^*_b$ und $b \in K^*_a$
- d) **„Monotonie?“**: Gilt das folgende, das Extensionalitätsaxiom erweiternde „Monotonie“-Prinzip: Wenn $\models a \rightarrow b$, dann $K^*_b \subseteq K^*_a$
- e) **Levi-Identität**: Zeige, dass wenn die Operation $*$ über die Leviidentität $K^*_a = (K^-_{-a})^+_a$ definiert wird, sie die Postulate (K*1)-(K*6) erfüllt, sofern die Expansion $+$ die Postulate (K+1)-(K+6) erfüllt und die Kontraktion die Postulate (K-1)-(K-4) und (K-6).
- f) **Remainder-Sets**: Berechne folgende Restmengen:
- 1) $\{p, b\} \perp p \ \& \ b$
 - 2) $\{p, q, r\} \perp p \ \& \ q$
 - 3) $\{q\} \perp p \ \& \ q$
 - 4) $\{p \vee r, p \vee \neg r, q \ \& \ s, q \ \& \ \neg s\} \perp \{p \ \& \ q\}$
 - 5) $\emptyset \perp p \ \& \ q$

Lösungen zu Postulaten

- a) **Zu „Nichts Neues“:** Da $a \in K$, ist $K_a^+ = \text{Cn}(K \cup \{a\}) = \text{Cn}(K) = K$, also nach (K*3): $K_a^* \subseteq K_a^+ = K$. Falls $\neg a \notin K$, so gilt wegen (K*4) auch das umgekehrte. Der Fall $\neg a \in K$ wird ausgeschlossen, da K sonst widersprüchlich wäre.
- b) **Zu Nichtkommutativität:** Sei $b = \neg a$. Dann ist $b \in (K^*a)^*b$ und $a \in (K^*b)^*a$. Also wäre a und $\neg a$ in $(K^*a)^*b = (K^*b)^*a$ und somit $(K^*a)^*b = (K^*b)^*a = K\perp$. Folglich müssten a und b Kontradiktionen sein, also $\vdash \neg\neg a$ und $\vdash \neg a$ gelten (wegen (K*5), was nicht sein kann).
- c) **Zum Lemma**
- | | | | |
|--------|---|---------------|-----------------------------|
| K^*a | = | $(K^*a) + b$ | <i>nach Def. Von +</i> |
| | = | $K^*(a \& b)$ | <i>nach (K*7) und (K*8)</i> |
| | = | $K^*(b \& a)$ | <i>nach (K*6)</i> |
| | = | $(K^*b) + a$ | |
| | = | K^*b | |
- d) **Zu „Monotonie?“:** Dieses gilt nicht. Formales Gegenbeispiel: Wähle b und c , so dass weder $b \models c$ noch $\models \neg(b \& c)$. Sei $K = \text{Cn}(b \& \neg c)$ und $a = b \& c$. Dann ist $a \models b$. Nun gilt weiter $K^*b = K$, so dass $\neg c \in K^*b$. Andererseits ist $b \& c \in K^*a$ und K^*a konsistent (nach (K*5)) und somit $\neg c \notin K^*a$.

Lösungen zu Postulaten (Forts.)

- d) Ein intuitives Beispiel: a: Dieses Streichholz ist nass oder es wurde angezündet. b: Dieses Streichholz wurde angezündet. Sei K ein Belief-Set, in dem geglaubt wird, dass das Streichholz nicht angezündet wurde, also $\neg b \in K$. K^*b sollte die Meinung enthalten, dass das Streichholz aufleuchten wird, aber K^*a nicht.
- e) (K*1) und (K*2) sind einfach zu beweisen. Postulat (K*3) folgt aus $K-a \subseteq K$. Für (K*4) nimm an $\neg a \notin K$. Dann $K = K_{\neg a}^-$, also $K_a^+ = (K_{\neg a}^-)_a^+ = K_a^*$. (K*5) folgt im wesentlichen aus (K-4) und (K*6) aus (K-6)
- f) Restmengenberechnung
- 1) $\{p, b\} \perp p \& b = \{ \{p\}, \{q\} \}$
 - 2) $\{p, q, r\} \perp p \& q = \{ \{p, r\}, \{q, r\} \}$
 - 3) $\{q\} \perp p \& q = \{ \{q\} \}$
 - 4) $\{p \vee r, p \vee \neg r, q \& s, q \& \neg s\} \perp \{p \& q\} =$
 $\{ \{p \vee r, p \vee \neg r\}, \{p \vee r, q \& s\}, \{p \vee r, q \& \neg s\}, \{p \vee \neg r, q \& s\}, \{p \vee \neg r, q \& \neg s\} \}$
 - 1) $\emptyset \perp p \& q = \{ \emptyset \}$

Aufgaben zu epistemic entrenchment

1. Zeige, dass eine epistemic entrenchment Relation total ist, d.h. dass für alle Sätze a, b gilt: $a \leq b$ oder $b \leq a$. Diskutiere, ob diese Eigenschaft vernünftig ist.
2. Beweise: Eine Konjunktion wird auf demselben Level gerankt wie das Konjunkt mit dem geringsten Rankinglevel.
3. Veranschauliche grafisch für konsistente Belief Sets K den irreflexiven Teil $<$ einer epist. Entr. Relation. Wo sitzen die Theoreme, wo die Kontradiktionen, wo die Elemente außerhalb von K ?
4. Seien in einer propositionallogischen Sprache L Aussagenvariablen $\{a_1, \dots, a_n\}$ gegeben. Eine Formel eines Belief-Set K über L ist ein duales Atom gdw. es logisch äquivalent zu einer maximalen Disjunktion von Literalen ist. Zeigen sie, dass die Definition einer Epistemic-Entrenchment-Relation \leq auf den dualen Atomen aus K die Beziehungen der anderen Formeln aus L bzgl. \leq eindeutig festlegt.
5. Für eine propositionallogische Sprache mit den Aussagenvariablen a und b und das Belief-Set $K = \text{Cn}(\{a \ \& \ b\})$ bestimme man auf der Grundlage der obigen Aufgabe die Menge aller möglichen Epistemic Entrenchment Relationen.

Lösungen zu Epistemic entrenchment

1. **Zur Totalität:** Folgt aus (EE3) (conjunctiveness) und (EE2) (dominance)
2. **Zum Ranking:** Sei $c = a \ \& \ b$. Da \leq total ist, können wir annehmen, dass etwa $a \leq b$ gilt. Zu zeigen ist: $c \leq a$ und $a \leq c$. Da $c = a \ \& \ b \vdash a$, gilt $c \leq a$ wegen (EE2). Wegen (EE3) gilt $a \leq c$ oder $b \leq c$, also in jedem Falle (wegen $a \leq b$ und Transitivität) auch $a \leq c$. Q.E.D.

4. **Zu den dualen Atomen:**

Seien c_1 und c_2 Formeln über L . Für c_i gibt es äquivalente konjunktive Normalformen, deren einzelne Konjunkte o.E. als maximale Disjunkte von Literalen angenommen werden können.

Sei also

$$c_1 = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \bigvee_{1 \leq j \leq m_i} L_{ij}$$

$$c_2 = \bigwedge_{1 \leq i \leq r} \bigvee_{1 \leq j \leq s_i} M_{ij}$$

Da die c_i 's nach dem obigen Aufgabe das gleiche Ranking-Level haben wie das ihrer am geringsten gerankten Konjunkte, gibt es folglich ein k und l , so dass

$$c_1 \leq \bigvee_{1 \leq j \leq m_l} L_{lj}$$

$$c_2 \leq \bigvee_{1 \leq j \leq s_k} M_{kj}$$

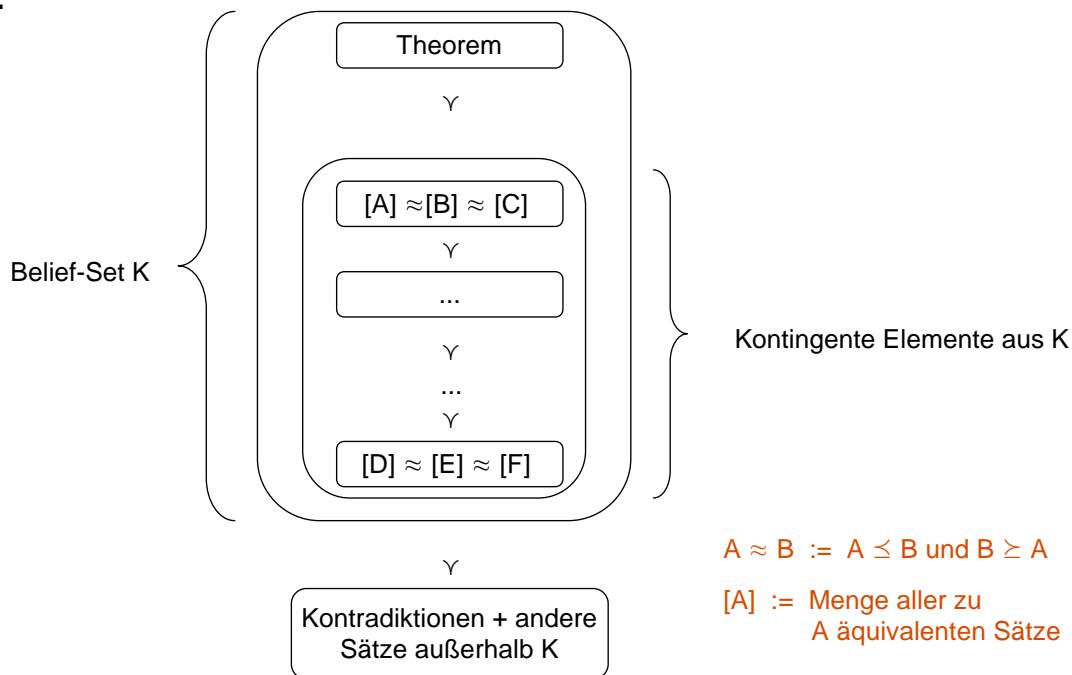
Ist etwa $\bigvee_{1 \leq j \leq m_l} L_{lj}$ bzw. $\bigvee_{1 \leq j \leq s_k} M_{kj}$ nicht im Belief-Set K , so gilt $c_1 \leq c_2$ bzw. $c_2 \leq c_1$. Wir können also o.E. annehmen, dass $\bigvee_{1 \leq j \leq s_l} M_{lj}$ und $\bigvee_{1 \leq j \leq m_l} L_{lj}$ in K enthalten sind.

Die Relation \leq ist aber für solche $\bigvee_{1 \leq j \leq s_k} M_{kj}$ und $\bigvee_{1 \leq j \leq m_l} L_{lj}$ erklärt, also gilt

$$c_1 \leq c_2 \text{ oder } c_2 \leq c_1 \quad \text{Q.E.D.}$$

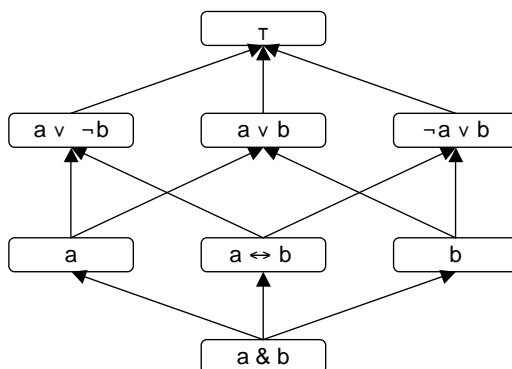
Epistemic entrenchment schematisch

Ad 3.



Epistemic Entrenchment (Forts.)

5. Betrachte das Hassediagramm, das die logischen Beziehungen (Implikation) zwischen Klassen äquivalenter Elemente aus K beschreibt. Die Relationen ergeben sich aus den Ordnungen über den dualen Atomen $a \vee b$, $\neg a \vee b$ und $a \vee \neg b$



Erinnerung: Postulate Expansion

- (K+1) Für jeden Satz α und jedes Belief-Set K ,
ist K^+_α ein Belief-Set. (closure)
- (K+2) $\alpha \in K^+_\alpha$ (success)
- (K+3) $K \subseteq K^+_\alpha$ (inclusion)
- (K+4) Falls $\alpha \in K$, dann $K = K^+_\alpha$ (vacuity)
- (K+5) Falls $H \subseteq K$, dann $H^+_\alpha \subseteq K^+_\alpha$ (monotonicity)
- (K+6) Für alle Belief-Sets K und jeden Satz α ,
ist K^+_α das kleinste Belief-Set, das
(K+1) bis (K+5) erfüllt (minimality)

Erinnerung: Postulate für Revision

- (K*1) Für jeden Satz α und jedes Belief-Set K ,
ist K^*_α ein Belief-Set. (closure)
- (K*2) $\alpha \in K^*_\alpha$ (success)
- (K*3) $K^*_\alpha \subseteq K^+_\alpha$ (inclusion)
- (K*4) Falls $\neg\alpha \notin K$, dann $K^+_\alpha \subseteq K^*_\alpha$ (preservation)
- (K*5) $K^*_\alpha = K_\perp$, gdw. $\vdash \neg\alpha$ (vacuity)
- (K*6) Falls $\vdash\alpha \Leftrightarrow \beta$, dann $K^*_\alpha = K^*_\beta$ (extensionality)

Ergänzende Postulate:

- (K*7) $K^*_{\alpha\wedge\beta} \subseteq (K^*_\alpha)^+_\beta$ (superexpansion)
- (K*8) Falls $\neg\beta \notin K^*_\alpha$, dann $(K^*_\alpha)^+_\beta \subseteq K^*_{\alpha\wedge\beta}$ (subexpansion)

Erinnerung: Postulate Kontraktion

- (K-1) Für jeden Satz α und jedes Belief-Set K ,
ist K_{α}^{-} ein Belief-Set. (closure)
- (K-2) $K_{\alpha}^{-} \subseteq K$ (inclusion)
- (K-3) Falls $\alpha \notin K$, dann $K = K_{\alpha}^{-}$ (vacuity)
- (K-4) Falls $\vdash \alpha$, dann $\alpha \notin K_{\alpha}^{-}$ (success)
- (K-5) Falls $\alpha \in K$, dann $K \subseteq (K_{\alpha}^{-})_{\alpha}^{+}$ (recovery)
- (K-6) Falls $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$, dann $K_{\alpha}^{-} = K_{\beta}^{-}$ (extensionality)

Zusätzliche Postulate

- (K-7) $K_{\alpha}^{-} \cap K_{\beta}^{-} \subseteq K_{\alpha \wedge \beta}^{-}$ (intersection)
- (K-8) Falls $\alpha \notin K_{\alpha \wedge \beta}^{-}$, dann $K_{\alpha \wedge \beta}^{-} \subseteq K_{\alpha}^{-}$ (conjunction)

Erinnerung: Epistemic Entrenchment

Definition: Eine Ordnung \leq_K über \mathcal{L} ist eine *Epistemic-Entrenchment-Ordnung* bzgl. K , falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (EE1) Für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}$ gilt: falls $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \gamma$, dann $\alpha \leq \gamma$
(transitivity)
- (EE2) Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ gilt: falls $\{\alpha\} \vdash \beta$ dann $\alpha \leq \beta$ (dominance)
- (EE3) Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ gilt entweder $\alpha \leq \alpha \wedge \beta$ oder $\beta \leq \alpha \wedge \beta$
(conjunctiveness)
- (EE4) Wenn $K \neq K_{\perp}$, dann: $\alpha \notin K$ gdw. $\alpha \leq \beta$ für alle $\beta \in \mathcal{L}$.
(minimality)
- (EE5) Falls $\beta \leq \alpha$ für alle $\beta \in \mathcal{L}$, $\vdash \alpha$.
(maximality)