Eine 4-wertige Logik

Vortragender:
Michael Haustermann

auf Basis von:

Belnap, N.D. (1992). A useful four-valued logic: How a computer should think. In: Anderson, A.R., Belnap, N.D. und Dunn, J.M. (Hrsg.), Entailmeint: The Logic of Relevance and Necessity, Band 2. Princeton University Press, Abschnitt 8.2.

Inhalt

- Motivation
- Atomare Aussagen
- Epistemische Zustände

Motivation

- Anwendung für spezielle Fälle
- Mehrere Informationsquellen
  - Keine vollständige Zuverlässigkeit der Informationsquellen
  - Gefahr der Inkonsistenz
  - Möglichkeit der sinnvollen Folgerung trotz Kontradiktionen
  - Keine Folgerung von Beliebigem
- Antwort und Folgerung durch den Computer

Wahrheitswerte

4 = {**T**, **F**, **None**, **Both**}

- **T**: nur True wurde abgespeichert
- **F**: nur False wurde abgespeichert
- **None**: keine Information wurde abgespeichert
- **Both**: sowohl True als auch False wurde abgespeichert

Beispiel

- $P \& (P \rightarrow V) \& (V \rightarrow F) \& (P \rightarrow \sim F)$

Atom	Bedeutung
F	kann fliegen
P	Pinguin
V	Vogel

in **4**:

$s_1(F) = \mathbf{T}$, $s_1(P) = \mathbf{T}$, $s_1(V) = \mathbf{Both}$

$s_2(F) = \mathbf{Both}$, $s_2(P) = \mathbf{Both}$, $s_2(V) = \mathbf{Both}$

set-up

- Tabelle, die atomaren Aussagen Wahrheitswerte aus **4** zuordnet.
- Beispiel

  <Pirates, 1971> **T**

  <Orioles, 1971> **F**
- Einfügen von Informationen löscht niemals alte
  - Sam fügt für <Pirates, 1971> False ein
  - Set-up Eintrag wird zu <Pirates, 1971> **Both**
- Bezeichnet als s(A) für eine atomare Aussage A

Unterschied zwischen „told True“ und T

- „told True“:
  - Die Aussage wurde mindestens mit True markiert
  - Schließt **Both** mit ein
- **T**:
  - Die Aussage wurde ausschließlich mit „told True“ markiert

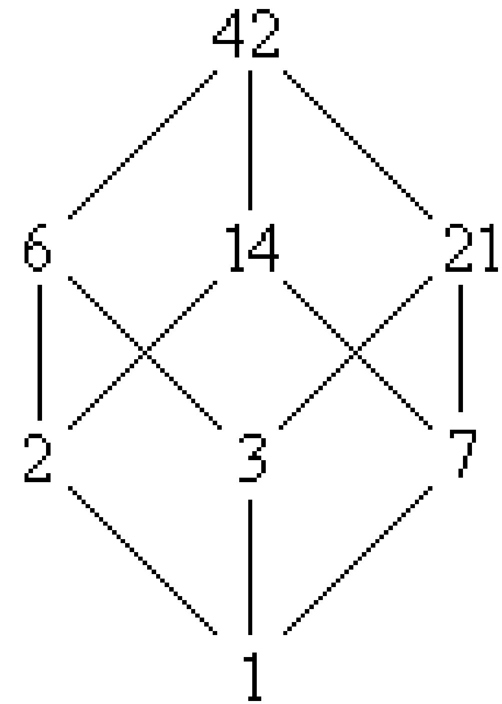
gilt für „told False“ und **F** analog

Inferenz

- Eine Inferenz von A nach B ist valide, wenn folgendes gilt:
  - Die Inferenz führt keinen Zustand, der mit „told True“ markiert ist in einen Zustand über, der nicht mit „told True“ markiert ist.
  - Die Inferenz führt keinen Zustand, der nicht mit „told False“ markiert ist in einen Zustand über, der mit „told False“ markiert ist.

Vollständiger Verband

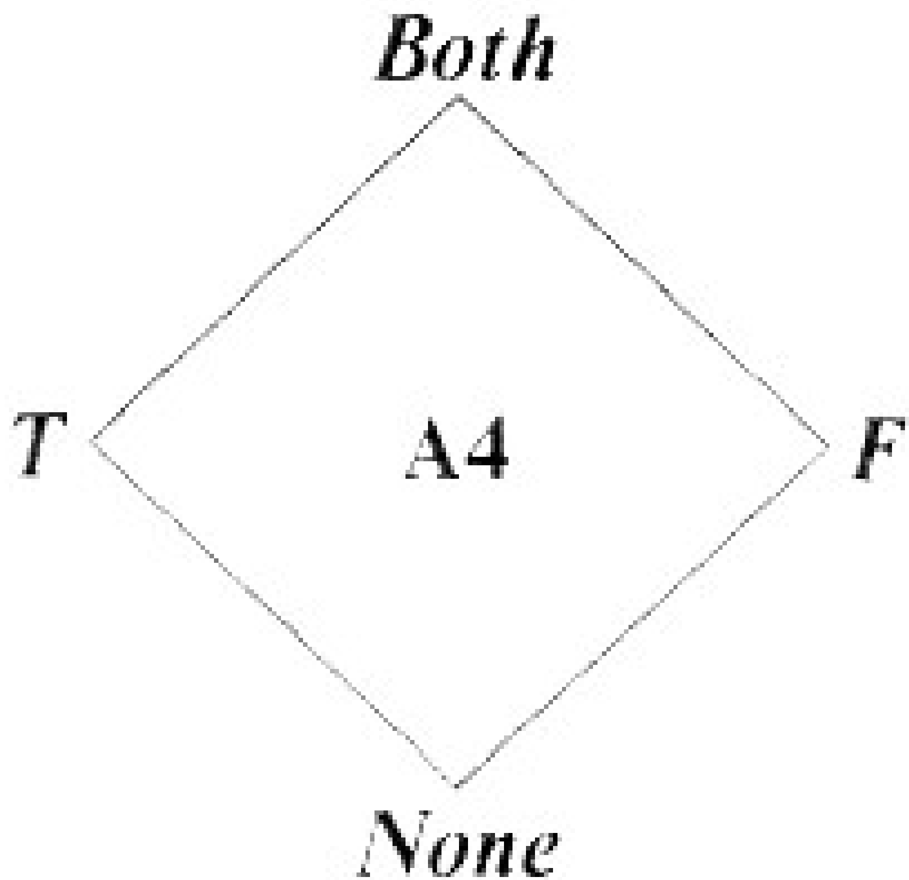
- Nicht-leere Menge
- Halbordnung
- Zwei binäre Verknüpfungen, die bestimmte Bedingungen erfüllen
- Darstellung als Hasse-Diagramm
- Jede Teilmenge hat ein Supremum und ein Infimum



Approximationsverband

(1, 1)

(1, 0)



(0, 1)

(0, 0)

Negation

- Monotonie ist wünschenswert (Scott's thesis)
- Es muss wegen F$\sqsubseteq$ **Both** g(F) $\sqsubseteq$ g(**Both**) gelten auf Grund der Monotonie
- Daher gilt **~None** = **None** und **~Both** = **Both**

	None	*F*	*T*	*Both*
	m	tt	tt	m
~	*None*	*T*	*F*	*Both*

Disjunktion

$\vee$	*None*	*F*	*T*	*Both*
None	*None*	*None*		
F	*None*	*F*	*T*	*Both*
T		*T*	*T*	
Both		*Both*		*Both*

Konjunktion

&	None	F	T	Both
None	None		None	
F		F	F	
T	None	F	T	Both
Both			Both	Both

Annahme

- $a \& b = a$ gdw. $a \vee b = b$
- $a \& b = b$ gdw. $a \vee b = a$

Disjunktion

∨	*None*	*F*	*T*	*Both*
None	*None*	*None*	f *T*	
F	*None*	*F*	*T*	*Both*
T	f *T*	*T*	*T*	f *T*
Both		*Both*	f *T*	*Both*

Konjunktion

&	*None*	*F*	*T*	*Both*
None	*None*	f *F*	*None*	
F	f *F*	*F*	*F*	f *F*
T	*None*	*F*	*T*	*Both*
Both		f *F*	*Both*	*Both*

Wahrheitswerttabelle (Ecken)

- **F** $\sqsubseteq$ **Both**

  (**F** & **None**) $\sqsubseteq$ (**Both** & **None**)

  F $\sqsubseteq$ (**Both** & **None**)
- **None** $\sqsubseteq$ **F**

  (**Both** & **None**) $\sqsubseteq$ (**Both** & **F**)

  (**Both** & **None**) $\sqsubseteq$ **F**
- (**Both** & **None**) = **F** $\vee$ geht ähnlich

Disjunktion

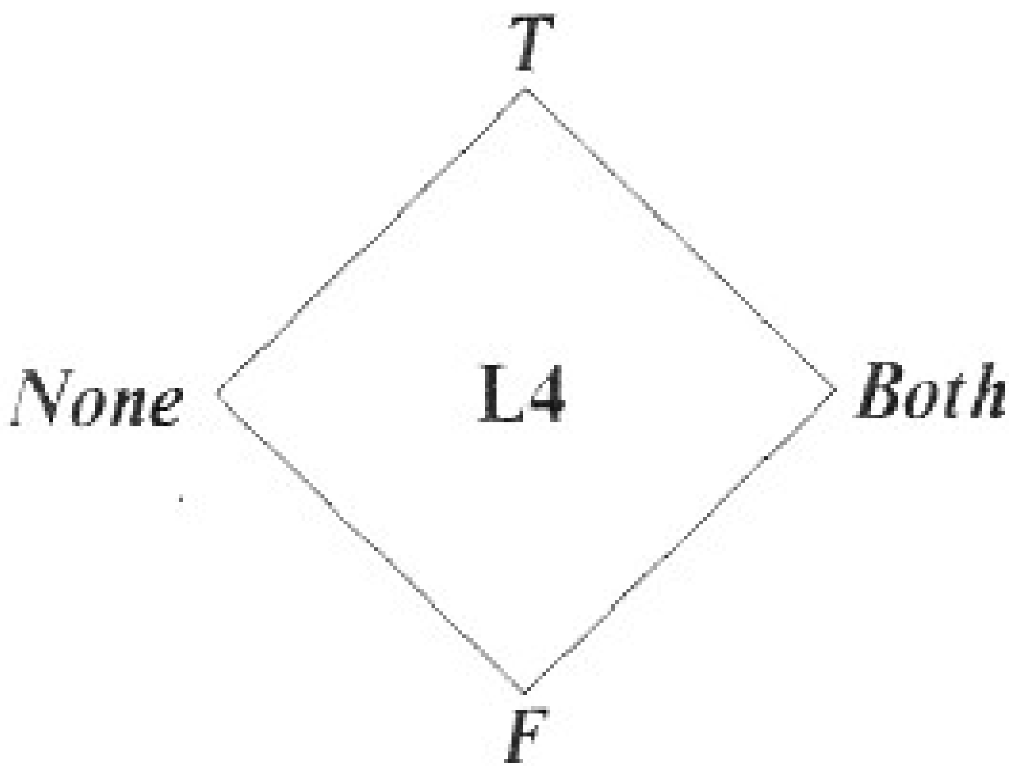
∨	***None***	***F***	***T***	***Both***
None	***None***	***None***	***T*** [f]	***T*** [m]
F	***None***	***F***	***T***	***Both***
T	***T*** [f]	***T***	***T***	***T*** [f]
Both	***T*** [m]	***Both***	***T*** [f]	***Both***

Konjunktion

&	*None*	*F*	*T*	*Both*
None	*None*	f *F*	*None*	m *F*
F	f *F*	*F*	*F*	f *F*
T	*None*	*F*	*T*	*Both*
Both	m *F*	f *F*	*Both*	*Both*

Logischer Verband

- Ergibt sich aus den Wahrheitswerten
- Konjunktion und Disjunktion entsprechen den binären Verknüpfungen des Verbands



Markierung von Aussagen (Konjunktion)

- Markiere (A & B) mit „told True“, gdw. A und B mit „told True“ markiert sind
- Markiere (A & B) mit „told False“, gdw. mindestens eines von beiden mit „told False“ markiert ist

Markierung von Aussagen (Disjunktion)

- Markiere $(A \vee B)$ mit „told True“, gdw. mindestens eines von beiden mit „told True“ markiert ist
- Markiere $(A \vee B)$ mit „told False“, gdw. A und B mit „told False“ markiert sind

Tautologien

- Es gibt keine Formeln, die nur zu **T** ausgewertet werden
- $A \vee \sim A$ ist eine Formel, die niemals zu **F** ausgewertet ist
  - Aber nicht abgeschlossen gegenüber Konjunktion
  - $(A \vee \sim A)$ & $(B \vee \sim B)$ kann zu **F** ausgewertet werden

Auswertung von komplexen Formeln

- Induktiv definiert

$s(A\&B) = s(A) \& s(B)$

$s(A \vee B) = s(A) \vee s(B)$

$s(\sim A) = \sim s(A)$

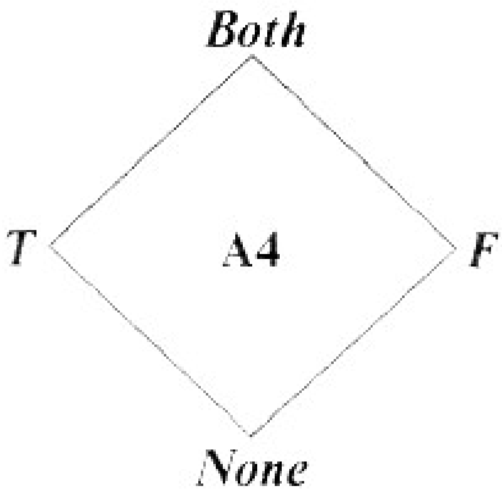
Epistemische Zustände (Motivation)

- P $\vee$ O kann nicht abgespeichert werden, da P und O unabhängige Zustände haben

Epistemische Zustände

- Basis für die Antworten des Computers
- verschiedene set-ups stellen alternative Zustände dar
- Die Anfrage wird mit „told True“ markiert, wenn die Formel in allen set-ups des Epistemischen Zustands mit „told True“ markiert sind.

Epistemische Zustände (Beispiel)



$$\begin{array}{lll} s(P) = T & \left.\begin{array}{r} s'(P) = \mathit{None} \\ s'(O) = T \\ s'(B) = F \\ s'(M) = \mathit{Both} \end{array}\right\} & \text{then:} \left\{\begin{array}{l} E(P) = \mathit{None} \\ E(O) = \mathit{None} \\ E(B) = \mathit{None} \\ E(M) = T \end{array}\right. \\ s(O) = \mathit{None} & & \\ s(B) = T & & \\ s(M) = T & & \end{array}$$

$E(P) = E(O) = \mathit{None}$, clearly $E(P \vee O) = T$.

Weitere Möglichkeiten

- Mapping von epistemischen Zuständen auf andere epistemische Zustände
- Nutzen von Implikationen