

# Modallogik - Modelle

2. Kapitel des Buches von Blackburn et al.

Nico Wilzek

# Motivation (1)

- Semantik in Kapitel 1: *Erfüllbarkeit* einer Formel
- Was können wir über Modelle sagen, wenn wir sie in Modallogik beschrieben haben?
- Welche Modelleigenschaften kann man mit Modallogik ausdrücken, was kann Modallogik nicht?

# Motivation (2)

- Generelles Interesse selten an einzelnen Strukturen sondern an
  - i. Beziehungen zwischen Strukturen
  - ii. Operationen um aus alten Strukturen neue zu formen.

Welche Eigenschaften bleiben erhalten?

# Gliederung

## 0. Wiederholung

### 1. Invarianz Resultate

erhalten Erfüllbarkeit

- a) Disjunkte Vereinigung
- b) Generierte Submodelle
- c) “bounded morphisms”

### 2. Bisimulationen

### 3. Endliche Modelle

- a) Auswahlmethode (endliches Annähern einer Bisimulation)
- b) Filtration (ein Modell in eine endliche Anzahl Äquivalenzklassen falten)

# Was bisher geschah: Frames

- Ein *frame* für die Basis- Modalsprache ist ein Tupel  $F = (\mathcal{W}, \mathcal{R})$ , wobei
- $\mathcal{W}$  ist eine nicht-leere Menge,  
die Welten
- $\mathcal{R}$  ist eine binäre Relation auf  $\mathcal{W}$ .  
die Sichtbarkeitsrelation

# Was bisher geschah: Modell

- Ein Modell für die Basis- Modalsprache ist ein Tupel  $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, \mathcal{V})$ , wobei

- $\mathcal{F}$  ist ein Frame

- $\mathcal{V}$  ist eine Funktion  $\mathcal{V}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$

valuation

Aussagensymbole

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{W}$

$\mathcal{V}(p) \subseteq \mathcal{W}$  sind die Welten, in denen  $p$  wahr ist.

# Was bisher geschah: Modell

- Ein Modell für die Basis- Modalsprache ist ein Tupel  $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V})$ , wobei
  - $\mathcal{F}$  ist ein Frame  $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$
  - $\mathcal{V}$  ist eine Funktion  $\mathcal{V}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$

# Was bisher geschah: Erfüllbarkeit

$\mathfrak{M}, w \Vdash p$  iff  $w \in V(p)$ , where  $p \in \Phi$

$\mathfrak{M}, w \Vdash \perp$  never

$\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi$  iff not  $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$

$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \vee \psi$  iff  $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$  or  $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$

$\mathfrak{M}, w \Vdash \diamond\phi$  iff for some  $v \in W$  with  $Rwv$  we have  $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$ .

# Was bisher geschah: *modaler Ähnlichkeitstyp*

- Ein *modaler Ähnlichkeitstyp* ist ein Tupel  $\tau = (O, \rho)$ , wobei
  - $O$  eine nicht-leere Menge ist  
die Menge der Modaloperatoren
  - $\rho$  eine Funktion  $O \rightarrow \mathbb{N}$   
weist jedem Modaloperator eine endliche Stelligkeit zu
- Häufig wird davon ausgegangen, dass die Stelligkeit der Modaloperatoren bekannt ist  
 $\Rightarrow$  zwischen  $\tau$  und  $O$  wird nicht mehr unterschieden.

# Gliederung

## 0. Wiederholung

### 1. Invarianz Resultate

- a) Disjunkte Vereinigung
- b) Generierte Submodelle
- c) “bounded morphisms”

### 2. Bisimulationen

### 3. Endliche Modelle

- a) Auswahlmethode (endliches Annähern einer Bisimulation)
- b) Filtration (ein Modell in eine endliche Anzahl Äquivalenzklassen falten)

# Modal äquivalent (der Welten $w$ und $w'$ )

- Die  $\tau$ -Theorie der Welt  $w$  ist
  - die Menge von  $\tau$ -Formeln die in  $w$  erfüllt sind
  - formal:  $\{\phi \mid \mathcal{M}, w \Vdash \phi\}$
  - $w$  und  $w'$  sind modal äquivalent ( $w \leftrightarrow w'$ ), wenn ihre Theorien identisch sind.

$w$  aus  $\mathcal{M}$ ,  $w'$  aus  $\mathcal{M}'$

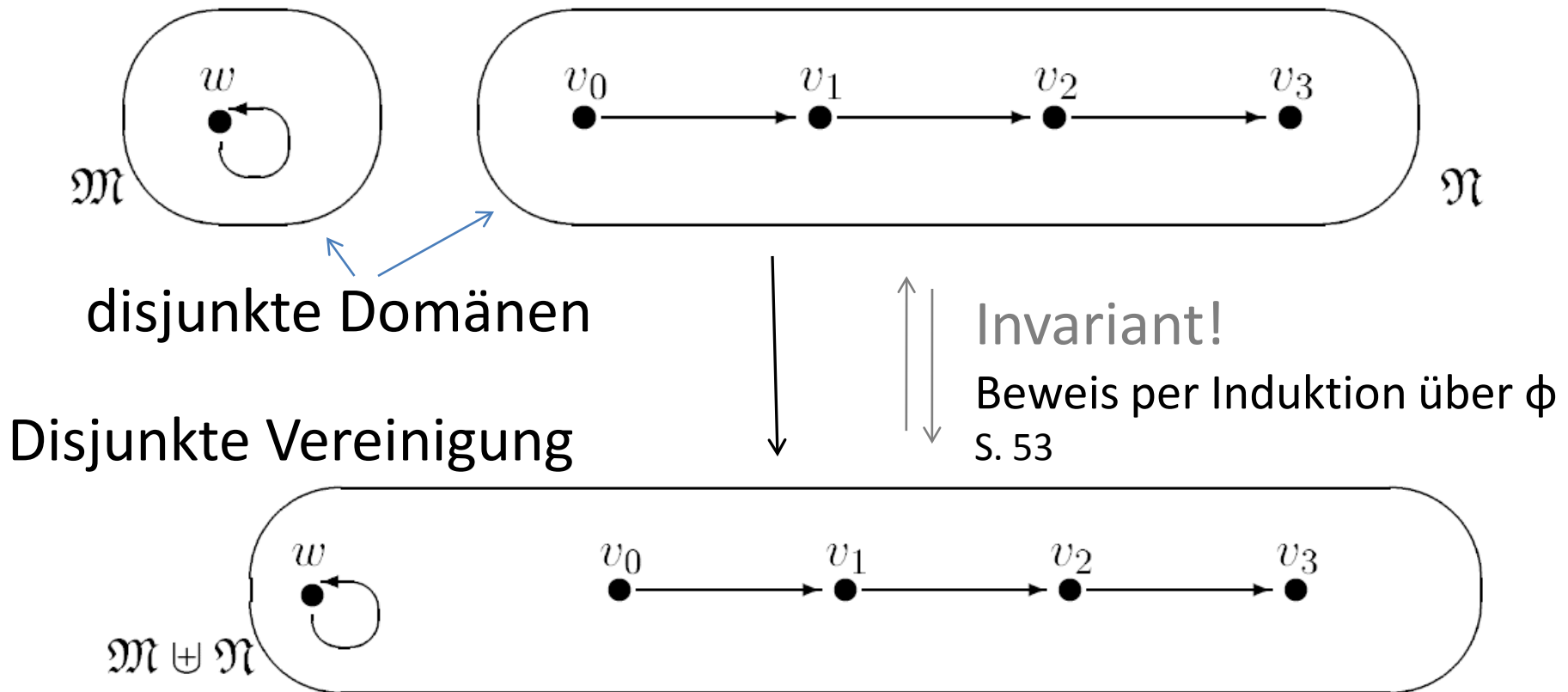
$\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}'$  haben denselben modalen Ähnlichkeitstyp  $\tau$

# Modal äquivalent (der Modelle $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ )

- Die  $\tau$ -Theorie des Modells  $\mathcal{M}$  ist
  - die Menge aller  $\tau$ -Formeln, die in allen Welten von  $\mathcal{M}$  erfüllt sind
  - formal:  $\{\phi \mid \mathcal{M} \Vdash \phi\}$
  - $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}'$  sind modal äquivalent ( $\mathcal{M} \leftrightarrow \mathcal{M}'$ ), wenn ihre Theorien identisch sind.

*disjunkte Vereinigung, generierte Submodelle  
und „bounded morphisms“  
lassen diese Theorien unverändert*

# a) Disjunkte Vereinigung (Beispiel)



## a) Disjunkte ~~Vereinigung~~ (Definition)

- Modelle *disjunkt*  $\Leftrightarrow$  Domänen haben keine gemeinsamen Elemente ( $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_j = \emptyset$ )

# a) Disjunkte Vereinigung (Definition)

- Die Disjunkte Vereinigung für

$$\mathcal{M}_i = (\mathcal{W}_i, \mathcal{R}_i, \mathcal{V}_i) \quad \text{ist:}$$

$$\uplus_i \mathcal{M}_i = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V}) \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{W} = \uplus_i \mathcal{W}_i$$

$$\mathcal{R} = \uplus_i \mathcal{R}_i$$

$$\forall p: \mathcal{V}(p) = \uplus_i \mathcal{V}_i(p)$$

Basis- Modalsprache



# a) Disjunkte Vereinigung (Definition)

*Allgemeiner Fall*

- Die Disjunkte Vereinigung für

$$\mathcal{M}_i = (\mathcal{W}_i, \mathcal{R}_{\Delta i}, \mathcal{V}_i) \quad \text{ist:}$$

$$\uplus_i \mathcal{M}_i = (\mathcal{W}, \mathcal{R}_{\Delta}, \mathcal{V}) \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{R}_{\Delta} = \uplus_i \mathcal{R}_{\Delta i}$$

- selber modaler Ähnlichkeitstyp  $\tau$
- $\Delta \in \tau$

## a) Disjunkte Vereinigung (Definition)

- Für nicht disjunkte  $\mathcal{M}_i = (\mathcal{W}_i, \mathcal{R}_{\Delta i}, \mathcal{V}_i)$ :
  - alle  $\mathcal{M}_i$  disjunkt machen (z.B. indem man die Domänen mit Indexen versieht)
  - (statt  $\mathcal{M}_i$  zu vereinigen, vereinigt man disjunkte, isomorphe Kopien der Modelle)

# Gliederung

## 0. Wiederholung

### 1. Invarianz Resultate

- a) Disjunkte Vereinigung
- b) Generierte Submodelle
- c) “bounded morphisms”

← Modell vergrößern

← Modell verkleinern

Wann kann man Welten wegwerfen,  
ohne Erfüllbarkeit zu beeinflussen?

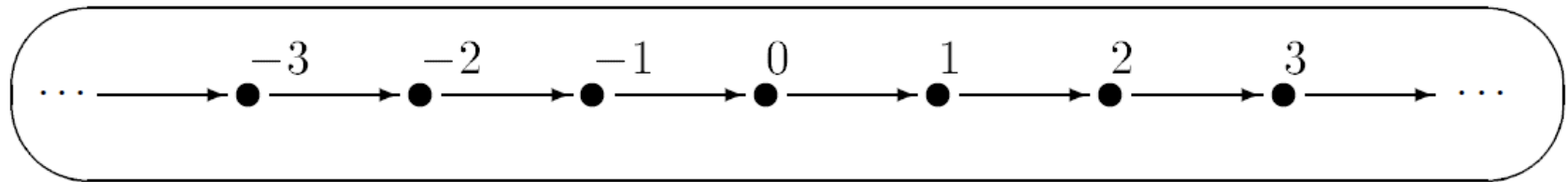
### 2. Bisimulationen

### 3. Endliche Modelle

- a) Auswahlmethode (endliches Annähern einer Bisimulation)
- b) Filtration (ein Modell in eine endliche Anzahl Äquivalenzklassen falten)

## b) Generierte Submodelle (Beispiel)

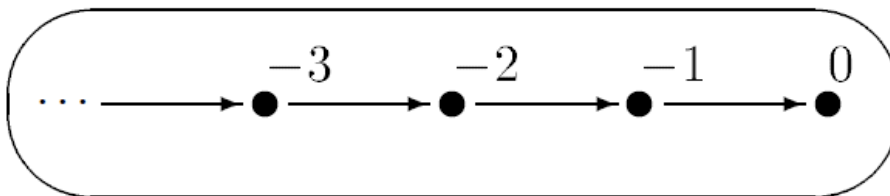
$$\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, <)$$



Invariant



$$\mathcal{M}, 0 \Vdash \diamond T$$

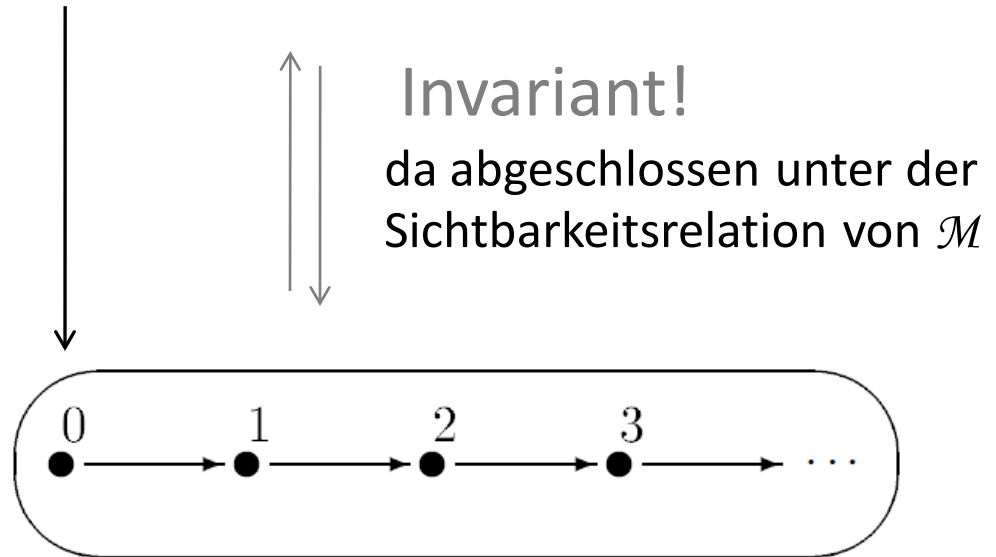
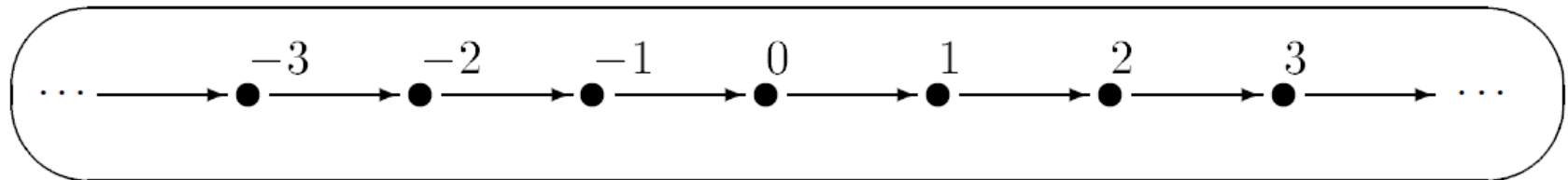


$$\mathcal{M}^-, 0 \not\Vdash \diamond T$$

$$\mathcal{M}^- = (\mathbb{Z}^-, <)$$

## b) Generierte Submodelle (Beispiel 2)

$$\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, <)$$



Invariant!

da abgeschlossen unter der Sichtbarkeitsrelation von  $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}^+ = (\mathbb{Z}^+, <)$$

## b) ~~Generierte~~ Submodelle (Definition)

- $\mathcal{M}' = (\mathcal{W}', \mathcal{R}', \mathcal{V}')$  ist ein Submodell von  $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V})$ , wenn

$$\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$$

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap (\mathcal{W}' \times \mathcal{W}') \quad \text{Restriktion von } \mathcal{R} \text{ auf } \mathcal{W}'$$

$$\forall p: \mathcal{V}'(p) = \mathcal{V}(p) \cap \mathcal{W}' \quad \text{Restriktion von } \mathcal{V} \text{ auf } \mathcal{M}'$$

## b) Generierte Submodelle (Definition)

- $\mathcal{M}'$  ist ein Generiertes Submodell von  $\mathcal{M}$ , wenn
  - 1)  $\mathcal{M}'$  ist ein Submodell von  $\mathcal{M}$
  - 2) Die Abgeschlossenheitsbedingung wird erfüllt:

$$\forall w: \quad w \in \mathcal{W}' \wedge R w v \Rightarrow v \in \mathcal{W}'$$

Basis- Modalsprache

## b) Generierte Submodelle (Definition)

*Allgemeiner Fall*

- $\mathcal{M}' = (\mathcal{W}', \mathcal{R}'_{\Delta}, \mathcal{V}')$  ist ein Generiertes Submodell von  $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}_{\Delta}, \mathcal{V})$ , wenn
  - 1)  $\mathcal{M}'$  ist ein Submodell von  $\mathcal{M}$
  - 2) Die Abgeschlossenheitsbedingung wird erfüllt:

$$\forall \Delta \in \tau: w \in \mathcal{W}' \wedge \mathcal{R}_{\Delta} w v^1 \dots v^n$$

$$\Rightarrow v^1, \dots, v^n \in \mathcal{W}'$$

## b) Generierte Submodelle (Sätze)

- 1) Das von  $\mathcal{X}$  ( $\subseteq \mathcal{M}$ ) generierte Submodell ist das kleinste Generierte Submodell von  $\mathcal{M}$ , dessen Domäne  $\mathcal{X}$  beinhaltet.
- 2) Ein **rooted** oder **point generated** Modell ist ein Modell, das von einer einelementigen Menge generiert wurde.

# Gliederung

## 0. Wiederholung

### 1. Invarianz Resultate

- a) Disjunkte Vereinigung ← Modell vergrößern
- b) Generierte Submodelle ← Modell verkleinern
- c) “bounded morphisms” ← Welche Morphismen sind invariant?

### 2. Bisimulationen

### 3. Endliche Modelle

- a) Auswahlmethode (endliches Annähern einer Bisimulation)
- b) Filtration (ein Modell in eine endliche Anzahl Äquivalenzklassen falten)

# c) bounded morphisms

(Vorgehensweise der Autoren)

## 1) Homomorphismen (von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$ )

- erhalten Aussagesymbole

$$w \in \mathcal{V}(p) \Rightarrow f(w) \in \mathcal{V}'(p)$$

- erhalten Sichtbarkeitsrelation

$$\mathcal{R}wv \Rightarrow \mathcal{R}'f(w)f(v)$$

Invariant?

## c) bounded morphisms (Vorgehensweise der Autoren)

- 1) Homomorphismen (von  $\mathcal{M}$  auf  $\mathcal{M}'$ )
- 2) Starke Homomorphismen (beide Richtungen)

- erhalten Aussagesymbole

$$w \in \mathcal{V}(p) \Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{V}'(p)$$

- erhalten Sichtbarkeitsrelation

$$Rwv \Leftrightarrow R'f(w)f(v)$$

Invariant?

## c) bounded morphisms (Vorgehensweise der Autoren)

- 1) Homomorphismen (von  $\mathcal{M}$  auf  $\mathcal{M}'$ )
- 2) Starke Homomorphismen (beide Richtungen)
  - 3) embeddings (injektiv)
  - 4) Isomorphismen (bijektiv)
- 5) bounded morphisms

## c) bounded morphisms (Definition)

- $f: \mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{M}' = (\mathcal{W}', \mathcal{R}', \mathcal{V}')$

muss erfüllen:

i.  $w \in \mathcal{V}(p) \Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{V}'(p)$

ii.  $\mathcal{R}wv \Rightarrow \mathcal{R}'f(w)f(v)$

Basis- Modalsprache

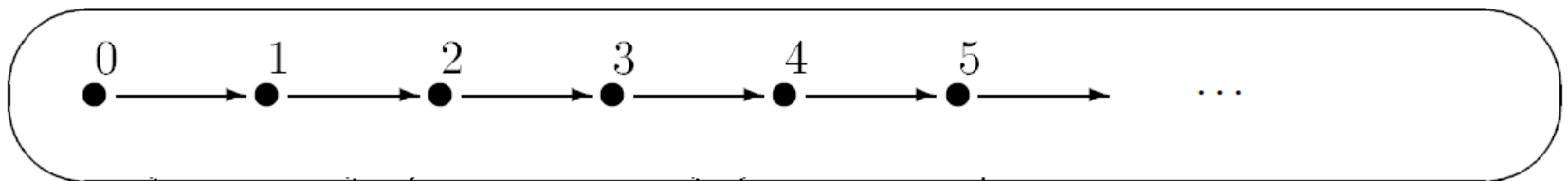
homomorphic condition

iii.  $\mathcal{R}'f(w)v' \Rightarrow \exists v: \mathcal{R}wv \wedge f(v) = v'$

back condition

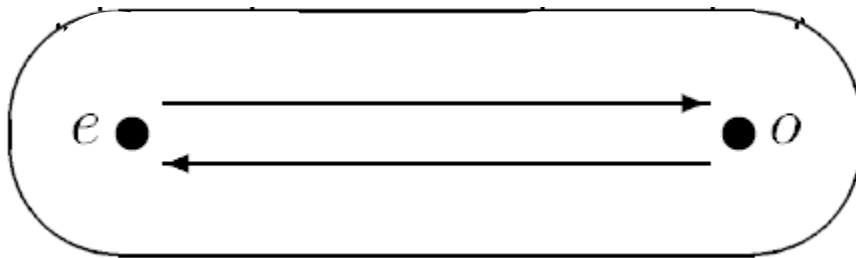
## c) bounded morphisms (Beispiel)

- $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V})$ 
  - $\mathcal{W} = \mathbb{N}$
  - $\mathcal{R}mn \Leftrightarrow n = m + 1$
  - $\mathcal{V}(p) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$

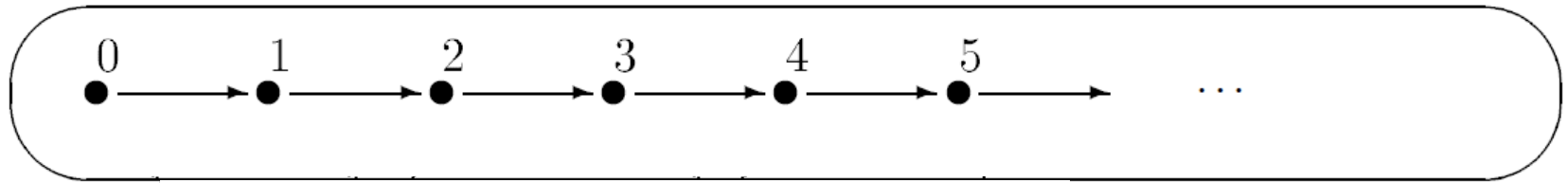


## c) bounded morphisms (Beispiel)

- $\mathcal{M}' = (\mathcal{W}', \mathcal{R}', \mathcal{V}')$ 
  - $\mathcal{W}' = \{e, o\}$
  - $\mathcal{R}' = \{(e, o), (o, e)\}$
  - $\mathcal{V}'(p) = \{e\}$



# c) bounded morphisms (Beispiel)

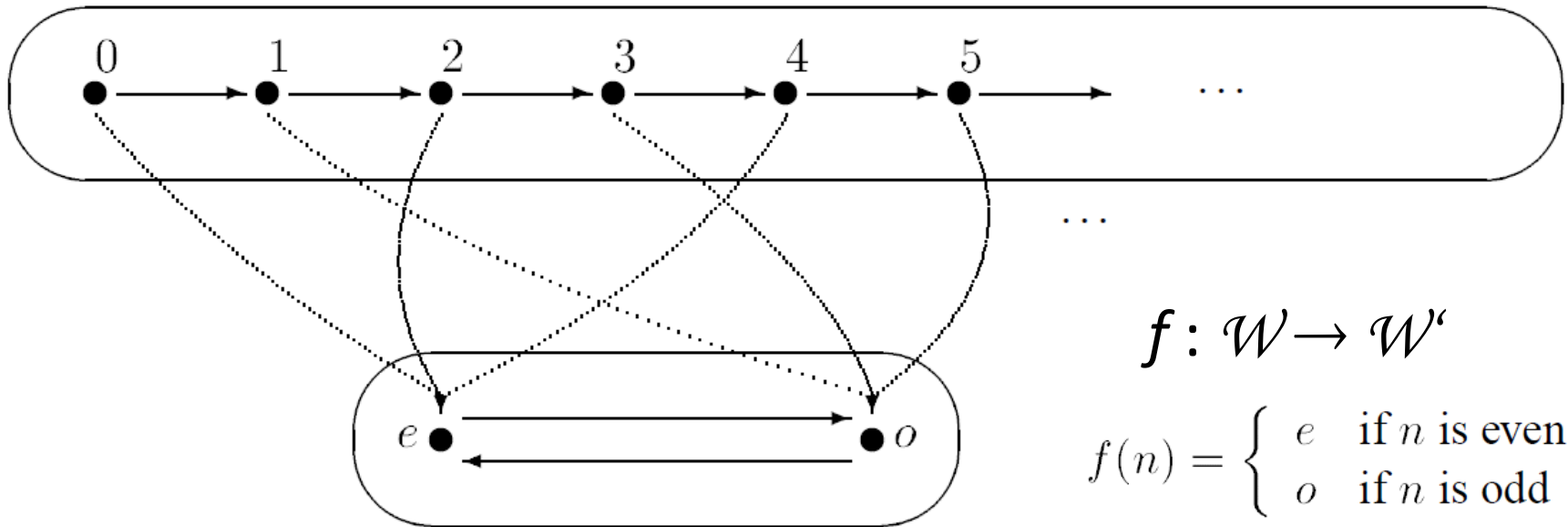


*f?*

- i.  $w \in \mathcal{V}(p) \Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{V}'(p)$
- ii.  $Rwv \Rightarrow Rf(w)f(v)$
- iii.  $Rf(w)v' \Rightarrow \exists v: Rwv \wedge f(v) = v'$



# c) bounded morphisms (Beispiel)



- i.  $w \in \mathcal{V}(p) \Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{V}'(p)$
- ii.  $Rwv \Rightarrow R'f(w)f(v)$
- iii.  $R'f(w)v' \Rightarrow \exists v: Rwv \wedge f(v) = v'$

## c) bounded morphisms (Definition)

Allgemeiner Fall

- $f: \mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{M}' = (\mathcal{W}', \mathcal{R}', \mathcal{V}')$

muss erfüllen:

i.  $w \in \mathcal{V}(p) \Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{V}'(p)$

$\forall \Delta \in \tau$ :

ii.  $\mathcal{R}_\Delta w v^1 \dots v^n \Rightarrow \mathcal{R}'_\Delta f(w) f(v^1) \dots f(v^n)$

iii.  $\mathcal{R}'_\Delta f(w) v^{1'} \dots v^{n'} \Rightarrow \exists v^1 \dots v^n : \mathcal{R}_\Delta w v^1 \dots v^n$

$$\wedge f(v_i) = v_i' \quad (1 \leq i \leq n)$$

# Gliederung

## 0. Wiederholung

### 1. Invarianz Resultate

- a) Disjunkte Vereinigung
- b) Generierte Submodelle
- c) “bounded morphisms”

### 2. Bisimulationen

### 3. Endliche Modelle

- a) Auswahlmethode (endliches Annähern einer Bisimulation)
- b) Filtration (ein Modell in eine endliche Anzahl Äquivalenzklassen falten)

# Bisimulationen (Rückblick)

- Was hatten die 3 Invarianz- Resultate gemein?
- Sie alle handelten von Relationen
  - in denen in Beziehung stehende Welten Information auf gleiche Weise verteilen
  - und wenn man einen Schritt in einem Modell macht, kann man einen passenden Schritt im anderen Modell machen.

⇒ **Bisimulation**

# Bisimulationen (Rückblick)

- Beispiel bounded morphisms:
  - Relation zwischen Modellen: Funktion
  - Passende Schritt: homomorphic condition  
+ back condition
  
- ⇒ Wie wird  
„man kann einen passenden Schritt machen“  
formalisiert?

# Bisimulationen (Definition)

- Eine (nicht-leere) binäre Relation  $Z \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}'$  heißt Bisimulation, falls

i.  $wZw' \Rightarrow w \in \mathcal{V}(p) \Leftrightarrow w' \in \mathcal{V}'(p)$

*w* und *w'* erfüllen dieselben Aussagensymbole

ii.  $wZw' \wedge R w v \Rightarrow \exists v': vZv' \wedge R' w' v'$   
forth condition

iii.  $wZw' \wedge R' w' v' \Rightarrow \exists v: vZv' \wedge R w v$

back condition

(umgedrehte forth condition)

# Bisimulationen (Definition)

- Eine (nicht-leere) binäre Relation  $Z \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}'$  heißt **Bisimulation**, falls

i.  $wZw' \Rightarrow w \in \mathcal{V}(p) \Leftrightarrow w' \in \mathcal{V}'(p)$

ii.  $wZw' \wedge R w v \Rightarrow \exists v': vZv' \wedge R' w' v'$

iii.  $wZw' \wedge R' w' v' \Rightarrow \exists v: vZv' \wedge R w v$

Basis-  
Modalsprache

Schreibweise:  $Z: \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{M}'$

$Z: \mathcal{M}, w \Leftrightarrow \mathcal{M}', w'$

# Bisimulationen

(Visualisierung der Definition)

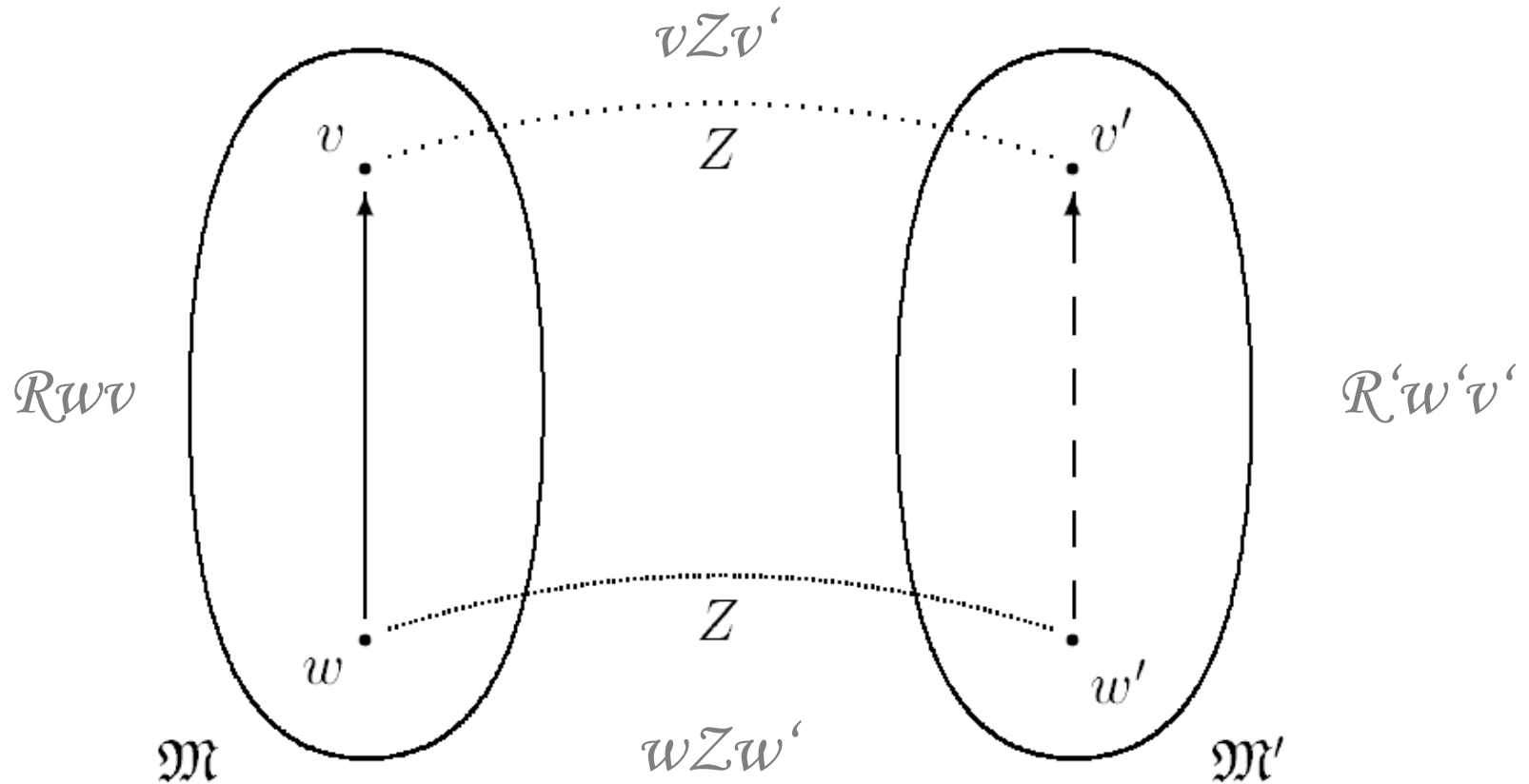


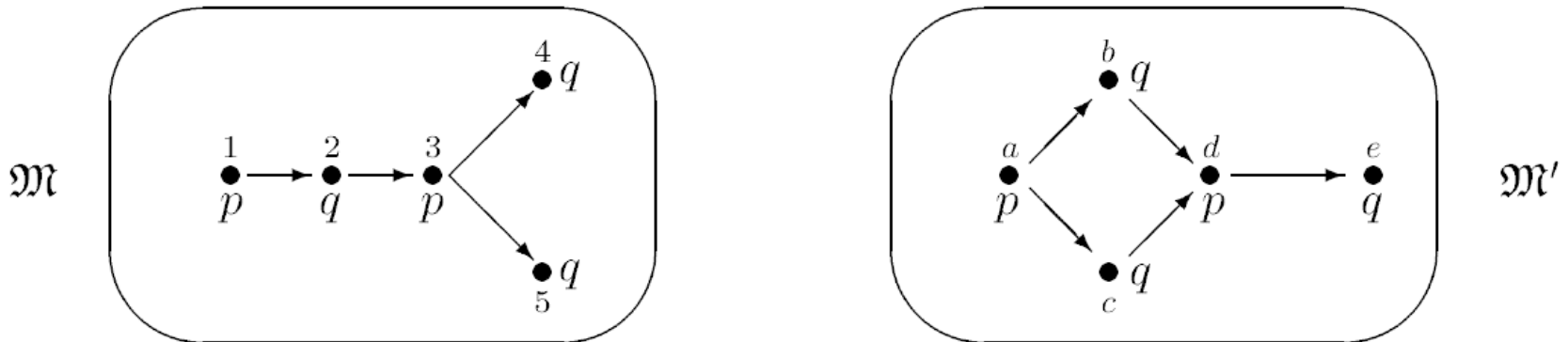
Fig. 2.3. The forth condition.

back condition: Spiegelung an der vertikalen Achse

# Bisimulationen (Beispiel)

- bisimilar!**
- i.  $wZw' \Rightarrow w \in \mathcal{V}(p) \Leftrightarrow w' \in \mathcal{V}'(p)$
  - ii.  $wZw' \wedge R'wv \Rightarrow \exists v': vZv' \wedge R'w'v'$
  - iii.  $wZw' \wedge R'w'v' \Rightarrow \exists v: vZv' \wedge R'wv$

$$Z = \{(1,a), (2,b), (2,c), (3,d), (4,e), (5,e)\}$$



# Bisimulationen (Definition)

*Allgemeiner Fall*

- Eine (nicht-leere) binäre Relation  $Z \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}'$  heißt **Bisimulation**, falls

i.  $wZw' \Rightarrow w \in \mathcal{V}(p) \Leftrightarrow w' \in \mathcal{V}'(p)$

ii.  $wZw' \wedge \mathcal{R}_\Delta wv^1 \dots v^n \Rightarrow \exists v^{1'}, \dots, v^{n'} : \mathcal{R}_\Delta w'v^{1'} \dots v^{n'} \wedge \forall i: v_i Z v_i' \ (1 \leq i \leq n)$

iii.  $wZw' \wedge \mathcal{R}_\Delta w'v^{1'} \dots v^{n'} \Rightarrow \exists v^1, \dots, v^n : \mathcal{R}_\Delta wv^1 \dots v^n \wedge \forall i: v_i Z v_i' \ (1 \leq i \leq n)$

# Bisimulationen

## (Hennessy-Milner Theorem)

- $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}'$  abbild-endlich  $\Rightarrow$

$$w \stackrel{\sim}{\iff} w' \iff w \stackrel{\sim}{\rightsquigarrow} w'$$

abbild-endlich:

$$\forall w \in \mathcal{M}, \forall R \in \mathcal{M}: \{ (v^1, \dots, v^n) \mid R w v^1 \dots v^n \} \text{ endlich!}$$

# Bisimulationen

## (Hennessy-Milner Theorem)

$$w \stackrel{\text{H}}{\sim} w' \quad \Leftrightarrow \quad w \stackrel{\tau}{\sim} w'$$

=  $\tau$ -Theorien

(die Menge von  $\tau$ -Formeln,  
die in  $w$  erfüllt sind)

identisch:

$$Z \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}'$$

$$wZw' \Rightarrow w \in \mathcal{V}(p) \Leftrightarrow w' \in \mathcal{V}'(p)$$

$$wZw' \wedge R w v \Rightarrow \exists v': vZv' \wedge R' w' v'$$

$$wZw' \wedge R' w' v' \Rightarrow \exists v: vZv' \wedge R w v$$

$$\{\phi \mid \mathcal{M}, w \Vdash \phi\}$$

=

$$\{\phi \mid \mathcal{M}, w' \Vdash \phi\}$$

# Gliederung

## 0. Wiederholung

### 1. Invarianz Resultate

- a) Disjunkte Vereinigung
- b) Generierte Submodelle
- c) “bounded morphisms”

### 2. Bisimulationen

### 3. Endliche Modelle

- a) Auswahlmethode (endliches Annähern einer Bisimulation)
- b) Filtration (ein Modell in eine endliche Anzahl Äquivalenzklassen falten)

# Endliche Modelle (Rückblick)

- Erhaltung von Eigenschaften und Invarianz  
Resultate kann man positiv und negativ betrachten:
  - **Negativ:** Limit der modalen Ausdruckskraft.
  - **Positiv:** Tools mit denen wir ein Modell in gewünschte Formen bringen kann.

# Endliche Modelle (Vorblick)

Modal- Formel  $\phi$  erfüllbar  $\Rightarrow \phi$  erfüllbar in einem endlichen Modell

- Ähnlich bei der Endlichen-Modell-Eigenschaft:
  - Negative Sicht: Einschränkung der Mächtigkeit (Ausdruckskraft der unendlichen Modelle fehlt)
  - Positive Sicht: Einschränkung der Komplexität (man muss sich mit unendlichen Modellen nicht rumärgern: Entscheidbarkeit!)

# Endliche Modelle (Definition)

- $\tau$  hat die Endliche-Modell-Eigenschaft hinsichtlich  $\mathbf{M}$ , wenn gilt:

  
Klasse von  $\tau$ - Modellen

$\Phi$  erfüllbar in  $\mathbf{M} \Rightarrow \Phi$  erfüllbar *in einem endlichen Modell* in  $\mathbf{M}$

hier & meistens:

Spezialfall  $\mathbf{M} =$  alle  $\tau$  Modelle

# Gliederung

## 0. Wiederholung

### 1. Invarianz Resultate

- a) Disjunkte Vereinigung
- b) Generierte Submodelle
- c) “bounded morphisms”

### 2. Bisimulationen

2 Methoden um ein endliches Modell zu erhalten  
endliches Submodell auswählen

### 3. Endliche Modelle

Definition geeigneter Teilklassen

- a) Auswahlmethode (endliches Annähern einer Bisimulation)
- b) Filtration (ein Modell in eine endliche Anzahl Äquivalenzklassen falten)

## a) Auswahlmethode

Seite 74 ff

# a) Auswahlmethode

## (Vorgehensweise der Autoren)

### 1. Grad einer Formel

$$\text{deg}(p) = 0$$

$$\text{deg}(\perp) = 0$$

$$\text{deg}(\neg\phi) = \text{deg}(\phi)$$

$$\text{deg}(\phi \vee \psi) = \max\{\text{deg}(\phi), \text{deg}(\psi)\}$$

$$\text{deg}(\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n)) = 1 + \max\{\text{deg}(\phi_1), \dots, \text{deg}(\phi_n)\}.$$

In particular, the degree of a basic modal formula  $\diamond\phi$  is  $1 + \text{deg}(\phi)$ .  $\dashv$

# *a)* Auswahlmethode

(Vorgehensweise der Autoren)

1. Grad einer Formel
2. **n-Bisimulation**

# a) Auswahlmethode

(Vorgehensweise der Autoren)

1. Grad einer Formel
2. n-Bisimulation
3. rooted Modell
  - 1) Def. *Höhe* einer Welt: Wurzel  $\rightarrow 0$   
direkter Nachfolger von  $n \rightarrow n + 1$
  - 2) k- Restriktion vom Modell erhält  
Erfüllbarkeit für Formeln von Grad  $\leq k$

# *a)* Auswahlmethode (Problem)

Entstehendes Modell hat immer Baumstruktur  
und erhält so die meisten weiteren  
Eigenschaften nicht!

## *b)* Filtration

- Der Klassiker!
- Auswahlmethode: Löschen überflüssigen Materials.
- Filtration: Möglichst viele Welten zusammenführen.

## b) Filtration

(Subformel- Abgeschlossenheit)

- Eine Menge von Formeln  $\Sigma$  ist subformel-abgeschlossen, wenn gilt:

$$\begin{array}{lll} \text{i.} & \phi \vee \phi' \in \Sigma & \Rightarrow \quad \phi, \phi' \in \Sigma \\ \text{ii.} & \neg \phi \in \Sigma & \Rightarrow \quad \phi \in \Sigma \\ \text{iii.} & \Delta(\phi_1, \dots, \phi_n) \in \Sigma & \Rightarrow \quad \phi_1, \dots, \phi_n \in \Sigma \end{array}$$

Basis Modalsprache: iii.  $\diamond \phi \in \Sigma \Rightarrow \phi \in \Sigma$

## b) Filtration ( $\Sigma$ -Äquivalenz)

$$w \stackrel{\sim}{\sim}_{\Sigma} u \Leftrightarrow \forall \phi \in \Sigma: (\mathcal{M}, w \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}, u \Vdash \phi)$$

Notation:

Die Äquivalenzklasse von  $w$  bezüglich  $\stackrel{\sim}{\sim}_{\Sigma}$ :  $|w|_{\Sigma} = |w|$

Abbildung  $w \rightarrow |w|$

- weist einer Welt ihre Äquivalenzklasse zu.
- heißt *natürliche Abbildung*.

## b) Filtration (Definition)

- $\mathcal{M}_\Sigma^f = (\mathcal{W}^f, \mathcal{R}^f, \mathcal{V}^f)$  heißt Filtration von  $\mathcal{M}$  durch  $\Sigma$ , wenn gilt:

Frame

$$\left[ \begin{array}{l} i. \quad \mathcal{W}^f = \mathcal{W}_\Sigma \quad \mathcal{W}_\Sigma = \{ |w|_\Sigma \mid w \in \mathcal{W} \} \\ ii. \quad \mathcal{R}wv \Rightarrow \mathcal{R}^f |w| |v| \\ iii. \quad \mathcal{R}^f |w| |v| \Rightarrow \forall \diamond \phi \in \Sigma: (\mathcal{M}, v \Vdash \phi \Rightarrow \mathcal{M}, w \Vdash \diamond \phi) \\ iv. \quad \forall p: \mathcal{V}^f(p) = \{ |w| \mid \mathcal{M}, w \Vdash p \} \end{array} \right.$$

$\mathcal{M}^f$  beinhaltet höchstens  $2^{|\Sigma|}$  Knoten.

Die *natürliche Abbildung* ist ein Homomorphismus, aber nicht zwangsläufig ein *bounded morphism*.

## b) Filtration (Beispiel)

$$\mathcal{V}(p) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\mathcal{V}(q) = \{2\}$$

$$\Sigma = \{\diamond p, p\}$$

