Hybridlogik

Alex Schajew

16.12.2009

Gliederung

1. Motivation
2. Wiederholung: Multimodale Sprachen
   - Temporale Logik
3. Hybridlogik
   - Reasoning
   - Standard Translation
   - Bindungsoperatoren

Motivation

Einfache Modallogik:

- Enthält Operationen um Schlussfolgerungen über Zustände zu machen, die von einem gegebenem Zustand erreicht werden können
- Betrachtung von fest benannten Zuständen nicht möglich

Hybridlogik:

- Erweiterung der einfachen Modallogik um Nominale
- Zustände werden durch die Nominale referenziert, dadurch können diese gezielt betrachtet werden

Wiederholung

Definition (Multimodale Sprache)

Gegeben sei eine Menge der aussagenlogischen Symbole $PROP = \{p, q, p', q'\}$ sowie die Menge der Labels $MOD = \{\pi, \pi', \ldots\}$. Die Menge der wohldefinierten Formeln der multimodalen Sprache (über $PROP$ und MOD) werden definiert als:

$$WFF := p | \neg\varphi | \varphi \wedge \psi | \varphi \vee \psi | \varphi \to \psi | \langle\pi\rangle\varphi | [\pi]\,\varphi$$

für alle $p \in PROP$ und $\pi \in MOD$.

Wiederholung

Definition ((Kripke) Modelle)

Ein Modell M einer multimodalen Sprache ist ein Tupel

$$(W, \{R_\pi | \pi \in MOD\}, V)$$

und wird oft als Kripke Modell bezeichnet.

- W ist hierbei eine nicht leere Menge von Zuständen
- R_π ist eine binäre Relationen zwischen den Elementen von W.
- V ist eine Funktion, die in jedem Zustand den Wahrheitswert jedes aussagenlogisches Symbols bestimmt.

Temporale Logik

- Erweiterung der klassischen Aussagenlogik um Operatoren, mit denen zeitliche Zusammenhänge dargestellt werden können
- Überprüfung der Gültigkeit von Aussagen mit zeitlichen Umständen

In diesem Vortrag wird eine bimodale Sprache mit $MOD = \{F, P\}$ betrachtet, wobei:

- $\langle F \rangle \varphi$ bedeutet "irgendwann wird φ gelten"
- $\langle P \rangle \varphi$ bedeutet "irgendwann galt φ"

Interpretierung der Sprache auf den Frames der Form $(T, <)$

Temporale Logik

Beispiel

$\langle P \rangle Mia\_bewusstlos$, diese Aussage ist Wahr gdw. man vom aktuellen Zustand in der Zeit zurück blicken kann und den Zustand sehen kann, in dem Mia bewusstlos war.

$\langle F \rangle \varphi Mia\_bewusstlos$, diese Aussage ist Wahr gdw. in der Zukunft einen Zustand geben wird, in dem Mia bewusstlos ist.

Bemerkung

Die Aussagen legen keinen absoluten Zeitpunkt fest, sondern sind relativ zu dem Zeitpunkt der Aussage.

Probleme mit der bis hierhin betrachteten Temporalen Logik

- Natürlichsprachliche Aussagen können Referenzen auf bestimmte Zeitpunkte haben
- $\langle F \rangle, \langle P \rangle$ geben keine genaue Auskunft über den Zeitpunk

"Vincent betätigte aus Versehen den Auslöser"

- kann interpretiert werden, dass Vincent zu einem bestimmten, vom Kontext abhängigen Zeitpunkt in der Vergangenheit tatsächlich den Auslöser betätigte

Um einen bestimmten Zeitpunkt zu referenzieren definierte James Allen den $Hold(P, i)$ Formalismus.

- $Hold(P, i)$ bedeutet "Die Eigenschaft P gilt im Intervall i"

Definition

Sei *NOM* eine nichtleere von *PROP* und *MOD* disjunkte Menge. Die Elemente von *NOM* werden Nominale genannt und als i, j, k und l bezeichnet. Die hybride multimodale Sprache (über *PROP*, *NOM* und *MOD*) wird definiert als:

$$WFF := i|p|\neg\varphi|\varphi \wedge \psi|\varphi \vee \psi|\varphi \rightarrow \psi|\langle\pi\rangle\varphi|\,[\pi]\,\varphi|@_i\varphi$$

Für jede Nominale i, wird die Symbolsequenz $@_i$ als Erfüllungsoperation bezeichnet.

- Nominale sind Formeln, die in genau einem Zustand wahr sein können, nämlich den sie benennen
- $@_i\varphi$ bedeutet: “gehe zu dem mit i markierten Punkt und Prüfe, ob φ in diesem Punkt *wahr* ist”.
- Formeln der Form $@_i\varphi$ und $\neg@_i\varphi$ werden als *Erfüllungsaussagen* genannt.

Modell der Hybridlogik

Definition

Ein Modell der Hybridlogik ist ein Tupel $(W, \{R_\pi | \pi \in MOD\}, V)$ wobei

- $(W, \{R_\pi | \pi \in MOD\}$ ist ein Frame
- V ist eine Abbildung: $V : \{PROP \cup NOM\}\ x\ W \to \{t, f\}$

Erfüllbarkeit, Gültigkeit

Definition

$M, \omega \Vdash p$	*gdw.*	$\omega \in V(p)$, mit $p \in PROP$
$M, \omega \Vdash \neg\varphi$	*gdw.*	$M, \omega \nVdash \varphi$
$M, \omega \Vdash \varphi \wedge \psi$	*gdw.*	$M, \omega \Vdash \varphi$ *und* $M, \omega \Vdash \psi$
$M, \omega \Vdash \varphi \vee \psi$	*gdw.*	$M, \omega \Vdash \varphi$ *oder* $M, \omega \Vdash \psi$
$M, \omega \Vdash \varphi \rightarrow \psi$	*gdw.*	$M, \omega \nVdash \varphi$ *oder* $M, \omega \Vdash \psi$
$M, \omega \Vdash \langle\pi\rangle\psi$	*gdw.*	$\exists\omega'(\omega R_\pi \omega' \ \& \ M, \omega' \Vdash \varphi)$
$M, \omega \Vdash [\pi]\,\psi$	*gdw.*	$\forall\omega'(\omega R_\pi \omega' \ \Rightarrow \ M, \omega' \Vdash \varphi)$
$M, \omega \Vdash i$	*gdw.*	$\omega \in V(i)$, mit $i \in NOM$
$M, \omega \Vdash @_i$	*gdw.*	$M, \omega' \Vdash \varphi$, wobei ω' ist die Denotation von i

Erfüllbarkeit, Gültigkeit

Bemerkung

Ist φ erfüllbar in allen Zuständen eines jeden Modells, dass auf dem Frame $\mathcal{F}$ basiert, dann ist φ gültig in $\mathcal{F}$ und wir schreiben $\mathcal{F} \Vdash \varphi$.

Ist φ gültig in allen Frames, so ist $\Vdash \varphi$.

Theorem

φ ist Tableau beweisbar gdw. φ ist gültig.

- Nominale und @ ermöglichen Schlussfolgerungen über die Zustände
- Deduktion in der Hybridlogik ist eine Form der "labelled deduction"
- Wie bei jedem Tableau-System wird eine Formel durch den Versuch diese zu Falsifizieren auf (Un-) Erfüllbarkeit bewiesen
- Man wählt einen Nominal i, welches nicht in φ auftaucht und setzt es vor der zu beweisenden Formel: $\neg @_i\, \varphi$

Reasoning

$$\frac{@_s \neg\varphi}{\neg @_s \varphi}\ [\neg] \qquad \frac{\neg @_s \neg\varphi}{@_s \varphi}\ [\neg\neg]$$

$$\frac{@_s(\varphi \wedge \psi)}{\begin{array}{c} @_s\varphi \\ @_s\psi \end{array}}\ [\wedge] \qquad \frac{\neg @_s(\varphi \wedge \psi)}{\neg @_s\varphi \mid \neg @_s\psi}\ [\neg\wedge]$$

$$\frac{@_s @_t \varphi}{@_t \varphi}\ [@] \qquad \frac{\neg @_s @_t \varphi}{\neg @_t \varphi}\ [\neg @]$$

$$\frac{@_s\langle\pi\rangle\varphi}{\begin{array}{c} @_s\langle\pi\rangle a \\ @_a\varphi \end{array}}\ [\langle\pi\rangle] \qquad \frac{\neg @_s\langle\pi\rangle\varphi \quad @_s\langle\pi\rangle t}{\neg @_t\varphi}\ [\neg\langle\pi\rangle]$$

$$\frac{@_s[\pi]\varphi \quad @_s\langle\pi\rangle t}{@_t\varphi}\ [[\pi]] \qquad \frac{\neg @_s[\pi]\varphi}{\begin{array}{c} @_s\langle\pi\rangle a \\ \neg @_a\varphi \end{array}}\ [\neg[\pi]]$$

$$\frac{[s \text{ on branch}]}{@_s s}\ \text{[Ref]} \qquad \frac{@_t s}{@_s t}\ \text{[Sym]}$$

$$\frac{@_s t \quad @_t \varphi}{@_s \varphi}\ \text{[Nom]} \qquad \frac{@_s \langle \pi \rangle t \quad @_t t'}{@_s \langle \pi \rangle t'}\ \text{[Bridge]}$$

Beispiel

1	$\neg @_i(\langle\pi\rangle(p \vee q) \rightarrow \langle\pi\rangle p \vee \langle\pi\rangle q)$	
2	$@_i\langle\pi\rangle(p \vee q)$	1, $\neg \rightarrow$
2'	$\neg @_i(\langle\pi\rangle p \vee \langle\pi\rangle q)$	*Ditto*
3	$\neg @_i\langle\pi\rangle p$	2', $\neg\vee$
3'	$\neg @_i\langle\pi\rangle q$	*Ditto*
4	$@_i\langle\pi\rangle j$	2, $\langle\pi\rangle$
4'	$@_j(p \vee q)$	*Ditto*
5	$\neg @_j p$	3, 4, $\neg\langle\pi\rangle$
6	$\neg @_j q$	3', 4, $\neg\langle\pi\rangle$
7	$@_j p$ | $@_j q$	4', $\vee$
	✠5, 7✠ ✠6, 7✠	

Bemerkung

- *Die Hybridlogik ist nicht komplexer als die (Multi-) Modallogik.*
- *Die Entscheidung über die Gültigkeit einer Formel der Hybridlogik liegt in PSPACE.*

Eigenschaften der Hybridlogik

Bemerkung (Hybridlogik ist Modal)

Hybridlogik enthält nur Mechanismen der Modallogik:

- *Nominale sind atomare Formeln*
- *Erfüllungsoperator ist ein gewöhnlicher Operator der Modallogik*

Bemerkung (Hybridlogik ist ein Fragment der klassischen Logik)

Hybridlogik kann in die Prädikatenlogik erster Stufe überführt werden. Genauso kann ein Fragment der Prädikatenlogik erster Stufe in ein Fragment der Hybridlogik übersetzt werden.

Definition (Standard Translation)

$$
\begin{array}{lcl}
ST_x(p) & = & P(x), p \in PROP \\
ST_x(\neg\varphi) & = & \neg ST_x(\varphi) \\
ST_x(\varphi \wedge \psi) & = & ST_x(\varphi) \wedge ST_x(\psi) \\
ST_x(\langle\pi\rangle\varphi) & = & \exists y(xR_\pi y \wedge ST_y(\varphi)) \\
ST_x([\pi]\varphi) & = & \forall y(xR_\pi y \rightarrow ST_y(\varphi)) \\
ST_x(i) & = & x = x_i, i \in NOM \\
ST_x(@_i\varphi) & = & (ST_x(\varphi))[x_i/x]
\end{array}
$$

Bindung der Nominalien zu den Zuständen

Die Hinzunahme von Nominalen zur Modallogik ist aus Sicht der *Standard Translation*, ähnlich der Hinzunahme von *freien Variablen* zu den Zuständen.
Bindung dieser *freien Variablen* an die Zustände kann mehr Ausdruckskraft verleiten.

- $\forall$, $\exists$ entsprechend den Quantoren der Prädikatenlogik

Definition ($\downarrow$)

$\downarrow$ bindet die Variablen zu den Zuständen in denen die Auswertung gerade durchgeführt wird.

Beispiel

Die Psychologie definiert einen Loser als eine Person ohne Selbstrespekt. Dieses Konzept kann nur bedingt durch Hybridlogik beschrieben werden.

$$i \wedge \neg\langle RESPEKT\rangle i$$

Die Formel sagt aus, dass einen bestimmten Individuum i der Selbstrespekt fehlt.

Beispiel

Besser wäre es, wenn man eine Formel hätte, welche nur in denjenigen Knoten Wahr ist, die keinen reflexiven RESPEKT-Pfeil haben.

$$\exists x(x \wedge \neg\langle RESPEKT\rangle x)$$

Beispiel

Andere Notation für das vorherige Beispiel.

$$\downarrow x.\neg\langle RESPEKT\rangle x$$

Übersetzung der Prädikatenlogik in die Hybridlogik

Bemerkung

$$
\begin{array}{lcl}
HT(xR_\pi y) & = & @_x\langle\pi\rangle y \\
HT(Px) & = & @_x p \\
HT(x = y) & = & @_x y \\
HT(\neg\varphi) & = & \neg HT(\varphi) \\
HT(\varphi \wedge \psi) & = & HT(\varphi) \wedge HT(\psi) \\
HT(\exists v\varphi) & = & \exists v HT(\varphi) \\
HT(\forall v\varphi) & = & \forall v HT(\varphi)
\end{array}
$$

Danke für Ihre Aufmerksamkeit.