Abschlusseigenschaften

Abschlusseigenschaften von Sprachfamilien

- sind bereits an verschiedenen Stellen der Vorlesung vorgekommen
- sind für die Klassifikation von Sprachen sehr hilfreich
- stellen ein gutes Beispiel für die generelle informatische Vorgehensweise der Reduktion von Problemstellungen dar.

Die Familie der reguläre Sprachen ist abgeschlossen gegen

- Vereinigung (Satz 12.9), Konkatenation (Satz 12.10), Wiederholung (*) (Satz 12.19), Mengendifferenz (Übungsaufgabe 10.3.a), ‚Abl' (Bildung der Suffix-Sprache) (Übungsaufgabe 10.3.b), Spiegelung (Beobachtung 13.10), und noch viele weitere Operationen, die wir noch nicht behandelt haben. (s. Vossen & Witt (2006), Satz 3.8, Hopcroft, Motwani & Ullman (2002), Kap 4.2)

Die Familien der kontextfreien Sprachen und der deterministisch kontextfreien Sprachen

- haben etwas andere Abschlusseigenschaften

Abgeschlossenheit gegen Operationen (1)

Definition 14.1

Es sei D eine Menge.

- Ist op eine n-stellige Operation auf D (also op: $D^n \rightarrow D$),
  - dann bezeichne op ebenfalls die Operation ($\wp(D) \rightarrow \wp(D)$), die jede Teilmenge von D auf die Menge der aus ihr mit op erzeugbaren Objekte abbildet.
    $op(M) = \{op(m_1, \ldots, m_n) \mid m_1, \ldots, m_n \in M\}$
  - Eine Menge $M \subseteq D$ heißt genau dann *abgeschlossen gegen op*, wenn $op(M) \subseteq M$.

Beispiele bei der Familie der Regulären Sprachen

- $D = \wp(\Sigma^*)$; $M = REG_\Sigma \subseteq \wp(\Sigma^*)$
- einstellige Operationen $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$: Wiederholung: $L \rightarrow L^*$; Spiegelung $L \rightarrow \mathrm{SP}(L)$; Komplement: $L \rightarrow \Sigma^* \backslash L$;
- zweistellige Operationen $\Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$: Vereinigung: $(L_1, L_2) \rightarrow L_1 \cup L_2$; Konkatenation $(L_1, L_2) \rightarrow L_1 \circ L_2$, Mengendifferenz: $(L_1, L_2) \rightarrow L_1 \backslash L_2$
- mehr als 2-stellige Operationen werden selten betrachtet.

Abschlusseigenschaften: Weiteres Vorgehen

Familie regulärer Sprachen

- Abschluss gegen Durchschnitt
- Homomorphismen, inverse Homomorphismen, Substitutionen
  - Einführung der Operationstypen
  - Abschluss

Familie kontextfreier Sprachen

- Abschluss unter kontextfreien Substitutionen
- Rückführung weiterer Abschlusseigenschaften auf den Abschluss unter kontextfreien Substitutionen
- Kein Abschluss gegen Durchschnitt, Komplement, Mengendifferenz
- Abschluss unter Durchschnitt mit regulären Sprachen

Zum Selbststudium

Abschluss gegen Durchschnitt bei der Familie regulärer Sprachen

- ergibt sich bereits daraus, dass die Familie der regulären Sprachen gegen Vereinigung und Komplement abgeschlossen sind.
- Im Allgemeinen erweist sich der Abschluss gegen Durchschnitt als besonders interessante Fragestellung (s. kontextfreie Sprachen).
- Deshalb hier für REG_{Σ} die Konstruktion im Detail.
- Man vergleiche den 'Produktautomaten' mit dem im Beweis von Satz 12.9. konstruierten Automaten für die Vereinigung.
- Der Unterschied zur Konstruktion für die Vereinigung besteht lediglich in der Definition der Menge der Endzustände.
- Die Grundidee ist wieder, dass die Automaten für die ursprünglich gegebenen Sprachen durch den neu konstruierten Automaten parallel simuliert werden. Dafür wird die Anzahl der Zustände vergrößtert. Das entspricht einer Vergrößerung der Kapazität des Zustandsspeichers.

Durchschnitt regulärer Sprachen: Produktautomat

Satz 14.2

Die Familie der regulären Sprachen REG_Σ ist gegen Durchschnitt abgeschlossen.
$(\{L_1 \cap L_2 \mid L_1, L_2 \in REG_\Sigma\} \subseteq REG_\Sigma)$

Konstruktion für den Beweis

Es seien L_1, L_2 reguläre Sprachen über Σ. Gegeben seien vollständige deterministische Automaten für L_1 und L_2

$A_1 = (\Sigma, S_1, \delta_1, s_1, F_1)$ mit $L_1 = L(A_1)$ und
$A_2 = (\Sigma, S_2, \delta_2, s_2, F_2)$ mit $L_2 = L(A_2)$

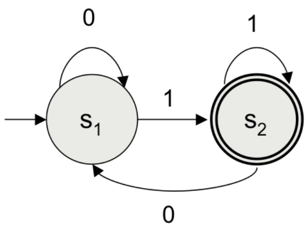
Wir konstruieren $A = (\Sigma, S, \delta, s_0, F)$ mit $L_1 \cap L_2 = L(A)$ wie folgt:

- $S = S_1 \times S_2 = \{(q_1, q_2) \mid q_1 \in S_1$ und $q_2 \in S_2\}$, d.h. die Zustände von A entsprechen Paaren von Zuständen von A_1 und A_2.
- Für jedes $(q_1, q_2) \in S$ und jedes $a \in \Sigma$ wird festgelegt:
  $\boldsymbol{\delta}((q_1, q_2), a) = (\boldsymbol{\delta_1}(q_1, a), \boldsymbol{\delta_2}(q_2, a))$
- $s_0 = (s_1, s_2)$
- $F = F_1 \times F_2 = \{(q_1, q_2) \mid q_1 \in F_1$ und $q_2 \in F_2\}$

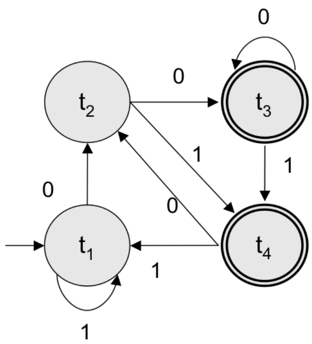
Beispiel: Produktautomat

$L_1 = \{0, 1\}^*1$ (das letzte Zeichen ist eine 1), $L_2 = \{0, 1\}^*0\{0, 1\}$, (das vorletzte Zeichen ist eine 0)

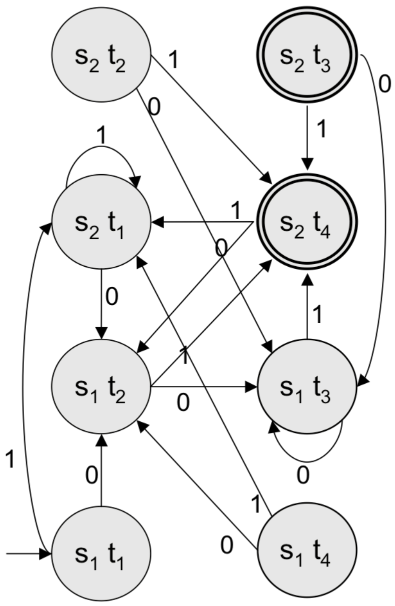
$\{0, 1\}^*1$



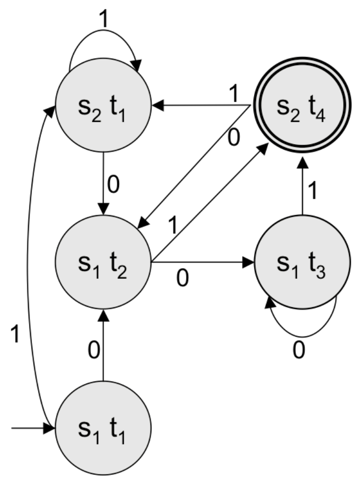
$\{0, 1\}^*0\{0, 1\}$



Produktautomat



Vereinfacht (reduziert)



Abgeschlossenheit unter Operationsmengen (2)

Definition 14.3

Es sei D eine Menge.

- Ist OP eine Menge von einstelligen Operationen auf D,
  - dann bezeichne OP ebenfalls die Operation ($\wp(D) \to \wp(D)$), die jede Teilmenge von D auf die Menge der aus ihr mit OP erzeugbaren Objekte abbildet.
    $OP(M) = \{op(m) \mid op \in OP, m \in M\}$
  - Eine Menge $M \subseteq D$ heißt genau dann *abgeschlossen unter OP*, wenn $OP(M) \subseteq M$.

Beispiele bei der Familie der Regulären Sprachen

- Homomorphismen, inverse Homomorphismen
- reguläre Substitutionen

Homomorphismen

Definition 14.4

Es seien Σ_1 und Σ_2 Alphabete. Ein *Homomorphismus* h: $\Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ ist eine Funktion, die Wörter über Σ_1 auf Wörter über Σ_2 abbildet und dabei folgende Zusatzbedingung erfüllt: Für alle $w, v \in \Sigma_1^*$ gilt $h(w \circ v) = h(w) \circ h(v)$.

- Ist L eine Sprache über Σ_1, dann ist $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$ eine Sprache über Σ_2.
- Ist M eine Sprache über Σ_2, dann ist $h^{-1}(M) = \{w \mid h(w) \in M\}$ eine Sprache über Σ_1.

Bemerkung

Homomorphismen dürfen auch nicht-leere Zeichenketten auf ε abbilden.

Beobachtung 14.5

Für jeden Homomorphismus h: $\Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ gilt:

- $h(\varepsilon) = \varepsilon$
- Ist $w = a_1 \dots a_n$, wobei $a_1, \dots, a_n \in \Sigma_1$, dann ist $h(w) = h(a_1) \dots h(a_n)$.
- $L \subseteq h^{-1}(h(L))$ und $M \subseteq h(h^{-1}(M))$

Sind h_1, h_1: $\Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ Homomorphismen, dann gilt:

- Ist für jedes $a \in \Sigma_1$ $h_1(a) = h_2(a)$, dann ist auch für jedes $w \in \Sigma_1^*$ $h_1(w) = h_2(w)$.

Homomorphismus: Beispiel

Der Homomorphismus h: $\{a, b, c\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ mit $h(a) = 00$, $h(b) = 1$ und $h(c) = \varepsilon$ bildet wie folgt ab:

x	$h(x)$
ε	ε
aa	0000
ab	001
ac	00
ba	100
ca	00
bac	100

M	$h^{-1}(M)$
{ε}	{c}*
{0}	∅
{00}	{c}*{a}{c}*
{1}*	{b, c}*
{00}*	{a, c}*
{0}*	{a, c}*

Abschluss REG_Σ unter Homomorphismen

Satz 14.6

Die Familie der regulären Sprachen REG_Σ ist unter Homomorphismen abgeschlossen.

Beweisidee

- Es sei L eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus über Σ.
- Da L eine reguläre Sprache ist, gibt es einen regulären Ausdruck α_L, so dass $L = L(\alpha_L)$.
- Wir erweitern den Homomorphismus h so, dass man damit auch die regulären Ausdrücke über Σ auf reguläre Ausdrücke abbilden kann:
  - $h(\Lambda) = \Lambda$
  - $h(E) = E$
  - $h([\alpha \bullet \beta]) = [h(\alpha) \bullet h(\beta)]$
  - $h([\alpha | \beta]) = [h(\alpha) | h(\beta)]$
  - $h(\alpha^{\otimes}) = h(\alpha)^{\otimes}$
- Jetzt bleibt (nur) zu zeigen, dass für diese Abbildung gilt: $h(L(\alpha)) = L(h(\alpha))$.
- Dies kann man zur Übung durch strukturelle Induktion zeigen.
- Damit weiss man dann auch, dass $h(L) = h(L(\alpha_L)) = L(h(\alpha_L))$ regulär ist.

Abschluss REG_Σ unter inversen Homomorphismen

Satz 14.7

Die Familie der regulären Sprachen REG_Σ ist unter Abbildung durch inverse Homomorphismen abgeschlossen.

Beweisidee

Es sei L eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus über Σ.

- Es sei $A_L = (\Sigma, S, \delta, s_1, F)$ ein deterministischer vollständiger endlicher Automaten mit $L = L(A_L)$.
- Wir verallgemeinern die Zustandsübergangsfunktion δ (die ja nur für Zeichen des Alphabets definiert ist) so, dass sie für beliebige Wörter wie folgt definiert ist:
  - $\delta(s, \varepsilon) = s$
  - $\delta(s, aw) = \delta(\delta(s, a), w)$, mit $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$.
- Es sei $B = (\Sigma, S, \gamma, s_1, F)$ der endliche Automat mit $\gamma(s, a) = \delta(s, h(a))$ für $a \in \Sigma$.
- Es bleibt zu zeigen, dass $L(B) = h^{-1}(L)$.
- Dafür zeigt man durch Induktion über die Wortlänge, dass allgemein für die jeweils verallgemeinerten Zustandsübergangsfunktionen gilt: $\gamma(s, w) = \delta(s, h(w))$.

Sprach-Substitutionen

Definition 14.8

Es seien Σ_1 und Σ_2 Alphabete. Eine *Sprach-Substitution* s: $\Sigma_1 \to \wp(\Sigma_2^*)$ ist eine Funktion, die Symbole aus Σ_1 auf Sprachen über Σ_2 abbildet.

Wir erweitern Sprach-Substitutionen so, dass sie auch auf Wörter über Σ_1 anwendbar sind, gemäß:

$s(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ und

für alle $a \in \Sigma_1$, $w \in \Sigma_1^*$ gilt $s(aw) = s(a) \circ s(w)$.

Ist L eine Sprache über Σ_1, dann sei weiterhin

$s(L) = \cup\{s(w) \mid w \in L\}$.

Eine Sprach-Substitution heißt genau dann *regulär* (bzw. *kontextfrei*), wenn sie alle Symbole aus Σ_1 auf reguläre (bzw. kontextfreie) Sprachen abbildet.

Bemerkung

Sprach-Substitutionen bilden Symbole, Wörter und Sprachen auf Sprachen ab.

Zum Selbststudium

Der Begriff ‚Substitution'

- wurde bereits im Logik-Kapitel verwendet.
  - z.B. Defintion 6.1: (Formel-)Substitution
  - z.B. Definition 10.7: (Variablen-)Substitution
- Wenn man sich diese Definitionen genau ansieht, erkennt man, dass es sich entsprechend der Terminologie dieses Kapitel dabei eigentlich um Homomorphismen handelt (Symbole werden auf Wörter abgebildet, nicht auf Sprachen), die noch weiteren Einschränkungen unterliegen.
- Der Hintergrund ist, dass sich die Terminologien in der Logik und in der Theorie formaler Sprachen teilweise unabhängig voneinander entwickelt haben. Daher ist der Konflikt aber unvermeidbar, wenn man Bücher aus beiden Bereichen liest. Da diese Vorlesung ja auch auf das Lesen entsprechender Materialien vorbereiten soll, verwenden wir den Begriff auch in den verschiedenen Zusammenhängen, unterscheiden aber gegebenenfalls die verschiedenen Substitutionen durch Präfixe wie ‚Sprach-', ‚Formel-', oder ‚Variablen-'.

Abschluss von REG_Σ unter regulären Sprach-Substitutionen

Satz 14.9

Die Familie der regulären Sprachen REG_Σ ist unter regulären Sprach-Substitutionen abgeschlossen.

Beweisidee

Es sei L eine reguläre Sprache über Σ und s eine reguläre Sprach-Substitution über Σ.

- Da L eine reguläre Sprache ist, gibt es einen regulären Ausdruck α_L, so dass $L = L(\alpha_L)$.
- Da s eine reguläre Sprach-Substitution ist, gibt es auch zu jedem Zeichen $a \in \Sigma$ einen regulären Ausdruck α_a, so dass $s(a) = L(\alpha_a)$.
- Wir bilden den regulären Ausdruck α_s, indem wir in α_L jedes Zeichen durch den korrespondierenden regulären Ausdruck ersetzen.
- Dann gilt $L(\alpha_s) = s(L(\alpha_L)) = s(L)$.
- [Was noch (durch strukturelle Induktion) zu zeigen wäre.]

Abgeschlossenheit von kfS_Σ unter kontextfreier Sprach-Substitution

Satz 14.10

Die Familie der kontextfreien Sprachen kfS_Σ ist unter kontextfreien Sprach-Substitutionen abgeschlossen.

Bemerkung

Wir gehen auf diesen Beweis im Detail ein, da wir weitere Abschlusseigenschaften auf die Abgeschlossenheit unter kontextfreier Sprachsubstitution zurückführen.

Beweis

Es sei L eine kontextfreie Sprache über Σ und s eine kontextfreie Sprach-Substitution über Σ.

- Da L eine kontextfreie Sprache ist, gibt es eine kontextfreie Grammatik $G_L = (\Sigma, N_L, P_L, S_L)$, so dass $L = L(G_L)$.
- Da s eine kontextfreie Sprachsubstitution ist, gibt es auch zu jedem Zeichen $x \in \Sigma$ eine kontextfreie Grammatik $G_x = (\Sigma, N_x, P_x, S_x)$, so dass $s(x) = L(G_x)$.

Annahme: die Nichtterminalsymbolmengen all dieser Grammatiken sind disjunkt.

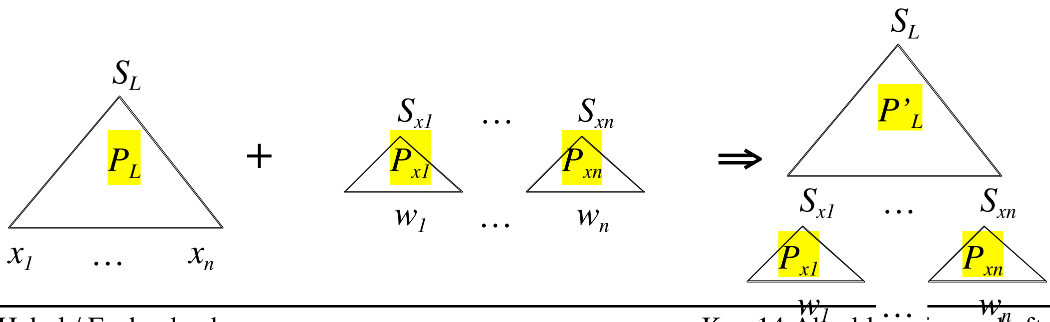
Fortsetzung (2): Beweis Satz 14.10

- Für jede Produktion aus $G_L : A \to w \in P_L$ sei w_s das Wort, das aus w hervorgeht, wenn man jedes Terminalsymbol x durch das Startsymbol S_x der zugehörigen Grammatik G_x ersetzt. (Das ist eine Anwendung eines Homomorphismus.)
- Es sei $P'_L = \{A \to w_s \mid A \to w \in P_L\}$ die für s konvertierte Produktionsmenge.

Wir bilden eine kontextfreie Grammatik $G_s = (\Sigma, N_s, P_s, S_s)$ wie folgt:

- N_s ist die Menge aller Nichtterminalsymbole aller Grammatiken ($N_s = N_L \cup \bigcup_{a \in \Sigma} N_a$)
- Das Startsymbol von G_L wird zum Startsymbol von G_s ($S_s = S_L$).
- Die Menge der Produktionen besteht aus den konvertierten Produktionen von G_L und den Produktionen der Grammatiken für G_x ($P_s = P'_L \cup \bigcup_{x \in \Sigma} P_x$).

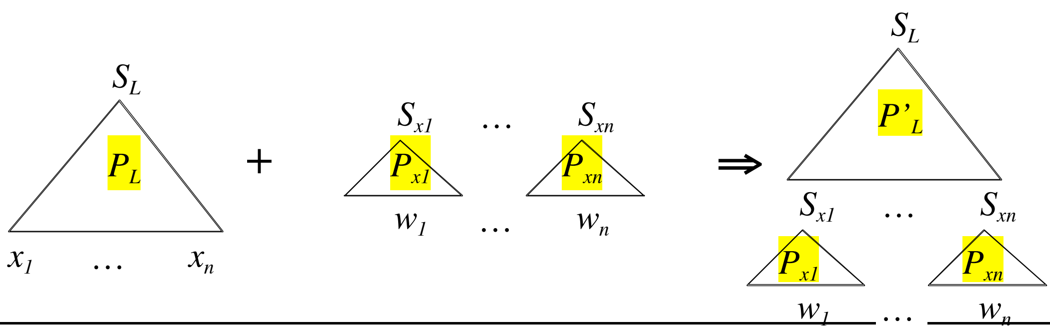
Dann gilt $L(G_s) = s(L(G_L)) = s(L)$. [Was noch zu zeigen ist.]



Fortsetzung (3): Beweis Satz 14.10

Zu zeigen ist: $s(L(G_L)) \subseteq L(G_s)$

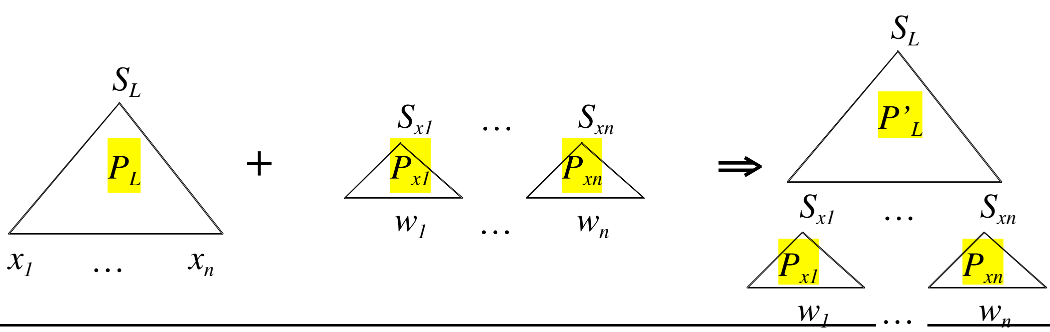
- Ist $w \in s(L(G_L))$, dann gibt es ein $v \in L(G_L)$, so dass $w \in s(v)$.
- Es sei $v = x_1 \ldots x_n$ mit $x_i \in \Sigma$ und es gibt eine korrespondierende Zerlegung von $w = w_1 \ldots w_n$, so dass $w_i \in s(x_i) = L(G_{xi})$.
- Es gibt in G_L eine Ableitung von $x_1 \ldots x_n$, deshalb gibt es auch in G_s eine entsprechende Ableitung von $S_{x1} \ldots S_{xn}$, die nur Produktionen aus P'_L verwendet.
- Da für jedes $w_i \in L(G_{xi})$ gibt es auch in G_s entsprechende Ableitung von w_i.
- Also gibt es in G_s auch eine Ableitung von $w = w_1 \ldots w_n$.



Fortsetzung (4): Beweis Satz 14.10

Zu zeigen ist: $L(G_s) \subseteq s(L(G_L))$

- Ist $w \in L(G_s)$, dann gibt es einen Ableitungsbaum für w mit $L(G_s)$.
- Da sichergestellt war, dass die Mengen der Nichtterminalsymbole disjunkt waren, werden in jedem Zweig des Ableitungsbaums (von oben nach unten betrachtet) zunächst nur Produktionen aus P'_L angewendet, bis ein S_x erreicht wird. Anschließend werden nur Produktionen aus P_s angewendet.
- Zu dem oberen Teil des Ableitungsbaums, der das Wort $S_{x1} \ldots S_{xn}$ erzeugt, gibt es dann auch einen entsprechenden Ableitungsbaum in G_L, der $x_1 \ldots x_n$ erzeugt.
- Da die unteren mit S_{xi} beginnenden Ableitungsbäume Wörter aus $s(x_i)$ erzeugen, ist sichergestellt, dass $w \in s(L(G_L))$.



Nutzung von Abschlusseigenschaften (1)

Beweis weiterer Abschlusseigenschaften

- Beispiel: REG_Σ ist abgeschlossen gegen Vereinigung und Komplement. Also ist REG_Σ auch abgeschlossen gegen Durchschnitt.

Satz 14.11: Abschlusseigenschaften von kfS_Σ

Die Familie der kontextfreien Sprachen über Σ ist abgeschlossen gegen Vereinigung, Konkatenation und Wiederholung.

Beweis

Es seien L_1 und L_2 kontextfreie Sprachen über Σ. Die kontextfreie Substitution s sei definiert durch $s(a) = L_1$ und $s(b) = L_2$.

- $\{a, b\}$, $\{ab\}$ und $\{a\}^*$ sind kontextfreie Sprachen. Damit sind auch
  - $L_1 \cup L_2 = s(\{a, b\})$
  - $L_1 \circ L_2 = s(\{ab\})$
  - $L_1^* = s(\{a\}^*)$
- kontextfrei.

Abschluss unter Homomorphismen

Satz 14.12

Die Familie der kontextfreien Sprachen über Σ ist abgeschlossen unter Homomorphismen.

Beweis

Es sei L eine kontextfreie Sprachen über Σ und h ein Homomorphismus.
Die kontextfreie Substitution s sei definiert durch $s(x) = \{h(x)\}$. Damit ist $h(L) = s(L)$ kontextfrei.

Bemerkung 14.13

Die Familie der kontextfreien Sprachen über Σ ist abgeschlossen

- gegen Spiegelung und
- unter inversen Homomorphismen.

Die Beweise lassen sich nicht auf die Abgeschlossenheit unter Substitution zurückführen und werden hier weggelassen.

Nutzung von Abschlusseigenschaften (2)

Beweis der Zugehörigkeit einer Sprache zur Sprachfamilie

- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist kontextfrei, c^* ist kontextfrei, kfS_Σ ist gegen Konkatenation abgeschlossen,
  - also ist $\{a^n b^n c^* \mid n \geq 0\}$ kontextfrei.

Beweis der nicht-Zugehörigkeit einer Sprache zu einer Sprachfamilie

- Es sei $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \; |w|_a = |w|_b \}$ die Menge aller Wörter über $\{a, b\}$, die genauso viele a wie b enthalten.
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht regulär, a^*b^* ist regulär, REG_Σ ist abgeschlossen gegen Durchschnitt und $L \cap a^*b^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Also ist L nicht regulär.

Nutzung von Abschlusseigenschaften (3)

Beweis fehlender Abschlusseigenschaften

- $\{a^n b^n c^* \mid n \geq 0\}$ ist kontextfrei, $\{a^* b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ist kontextfrei, $\{a^n b^n c^* \mid n \geq 0\} \cap \{a^* b^n c^n \mid n \geq 0\} = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht kontextfrei, also ist kfS_Σ nicht gegen Durchschnitt abgeschlossen.
  [$\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht kontextfrei, wurde mit dem Pumpinglemma Kap 13-90 gezeigt.]

Bemerkungen

- kfS_Σ ist auch gegen Komplement (und Mengendifferenz) nicht abgeschlossen. Beweis s. Übungsaufgabe.

- Die fehlende Abgeschlossenheit gegen Durchschnitt hat wesentlich damit zu tun, dass man keinen Produkt-Kellerautomaten konstruieren kann, der auch die beiden Keller des ursprünglichen Kellerautomaten simuliert.
- Kellerautomaten mit zwei Kellerspeichern sind auch viel mächtiger als ‚normale' Kellerautomaten mit nur einem Kellerspeicher (-> Turingmaschinen).

Satz 14.14

kfS_{Σ} ist abgeschlossen unter Durchschnitt mit regulären Sprachen über Σ.
D.h.: Ist $L_1 \in kfS_{\Sigma}$ und $L_2 \in REG_{\Sigma}$, dann ist $L_1 \cap L_2 \in kfS_{\Sigma}$.

Konstruktion für den Beweis

Es sei L_1 eine kontextfreie Sprache und L_2 eine reguläre Sprache über Σ. Gegeben seien ein Kellerautomat K_1 und ein vollständiger deterministischer Automat A_2 mit

$K_1 = (\Sigma, S_1, \Gamma, \delta_1, s_1, \perp, F_1)$ mit $L_1 = L_F(K_1)$ und
$A_2 = (\Sigma, S_2, \delta_2, s_2, F_2)$ mit $L_2 = L(A_2)$

Wir konstruieren $K = (\Sigma, S, \Gamma, \delta, s_0, \perp, F)$ mit $L_1 \cap L_2 = L_F(K)$ wie folgt:

- $S = S_1 \times S_2 = \{(q_1, q_2) \mid q_1 \in S_1 \text{ und } q_2 \in S_2\}$.
- Für jedes $(q_1, q_2) \in S$ und jedes $a \in \Sigma$ wird festgelegt:
  $\boldsymbol{\delta}((q_1, q_2), a, X) = \{((q, \boldsymbol{\delta}_2(q_2, a)), w) \mid (q, w) \in \boldsymbol{\delta}_1(q_1, a, X)\}$
  $\boldsymbol{\delta}((q_1, q_2), \varepsilon, X) = \{((q, q_2), w) \mid (q, w) \in \boldsymbol{\delta}_1(q_1, \varepsilon, X)\}$
- $s_0 = (s_1, s_2)$
- $F = F_1 \times F_2 = \{(q_1, q_2) \mid q_1 \in F_1 \text{ und } q_2 \in F_2\}$