

Prädikatenlogik: Normalformen

- Stand 21.5.2007

Im Verlauf der Vorlesungen zu diesem Kapitel können Änderungen und Ergänzungen erfolgen.

Sie sollten daher sorgfältig auf Unterschiede zwischen den Vorversionen und der Endversion achten.

Prädikatenlogik: Normalformen

Normalformen basierend auf Äquivalenz

- Äquivalenz in der Prädikatenlogik
- Übertragung aussagenlogischer Äquivalenzen
- Formeln mit Quantoren: Äquivalenzen in der Prädikatenlogik
- Substitution (Überführungslemma)
 - ➔ Gebundene Umbenennung von Variablen
- Pränexform

Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz

- Erfüllbarkeitsäquivalenz vs. Äquivalenz
- Bindung freier Variablen
- Skolemisierung
- Skolemform und Klauselnormalform
 - ➔ Normalform, die Grundlage für Resolutionsbeweise ist [➔ Kap. 11]

Äquivalenz in der Prädikatenlogik

zur Erinnerung: Definition 9.12 (ganz analog zur Aussagenlogik)

Zwei Formeln F und G sind (logisch) **äquivalent**, falls für jede Struktur \mathcal{A} gilt:
 $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$.

Satz 10.1

Wenn in zwei äquivalenten aussagenlogischen Formeln prädikatenlogische Formeln (uniform) für die Aussagensymbole substituiert werden, ergibt dies zwei äquivalente Formeln der Prädikatenlogik.

ohne Beweis, vgl. Satz 6.3

➔ Die Äquivalenzen der Aussagenlogik gelten auch in der Prädikatenlogik.

Beispiel zu 10.1

Kommutativität von \wedge : $(\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)) \equiv (\exists y Q(y) \wedge \forall x P(x))$

Elimination von \Rightarrow : $(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)) \equiv (\neg \forall x P(x) \vee \exists y Q(y))$

➔ Zusätzliche prädikatenlogische Äquivalenzen ergeben sich aus den semantischen Beziehungen zwischen Quantoren.

Wichtige Äquivalenzen der Prädikatenlogik

Satz 10.2: Seien F und G beliebige prädikatenlogische Formeln.

1. $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$ *Dualität von \forall und \exists*
 $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$
2. Falls x in G nicht frei vorkommt *leere Quantifikation*
 $G \equiv \forall x G \equiv \exists x G$ *Skopuserweiterung*
 $(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x (F \wedge G)$ wenn damit keine neuen Variablen-
 $(\forall x F \vee G) \equiv \forall x (F \vee G)$ Bindungen entstehen
 $(\exists x F \wedge G) \equiv \exists x (F \wedge G)$
 $(\exists x F \vee G) \equiv \exists x (F \vee G)$
 $(G \Rightarrow \forall x F) \equiv \forall x (G \Rightarrow F)$
 $(G \Rightarrow \exists x F) \equiv \exists x (G \Rightarrow F)$
 $(\forall x F \Rightarrow G) \equiv \exists x (F \Rightarrow G)$
 $(\exists x F \Rightarrow G) \equiv \forall x (F \Rightarrow G)$
3. $(\forall x F \wedge \forall x G) \equiv \forall x (F \wedge G)$ *Distributivität von*
 $(\exists x F \vee \exists x G) \equiv \exists x (F \vee G)$ Allquantor bzgl. Konjunktion
Existenzquantor bzgl. Disjunktion
4. $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$ *Vertauschung der Quantorenreihenfolge*
 $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$ nur bei gleichen Quantoren

Beweis einiger Äquivalenzen

Satz 10.2.2.1: Wenn x nicht frei in G vorkommt, dann $G \equiv \forall x G$ und $G \equiv \exists x G$.

Beweis

Sei $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur.

$\mathcal{A}(G) = \mathbf{1}$ GDW. für alle $d \in U$ gilt: $\mathcal{A}_{[x/d]}(G) = \mathbf{1}$ [da x nicht frei in G]

GDW. $\mathcal{A}(\forall x G) = \mathbf{1}$ [Auswertung des Allquantors]

$\mathcal{A}(G) = \mathbf{1}$ GDW. für ein $d \in U$ gilt: $\mathcal{A}_{[x/d]}(G) = \mathbf{1}$ [da U nicht leer und x nicht frei in G]

GDW. $\mathcal{A}(\exists x G) = \mathbf{1}$ [Auswertung des Existenzquantors]

Satz 10.2.2.2: Wenn x nicht frei in G vorkommt, dann $(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x (F \wedge G)$.

Beweis

Sei $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur.

$\mathcal{A}(\forall x F \wedge G) = \mathbf{1}$ GDW. $\mathcal{A}(\forall x F) = \mathbf{1}$ und $\mathcal{A}(G) = \mathbf{1}$ [Auswertung der Konjunktion]

GDW. für alle $d \in U$ gilt: $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathbf{1}$ und $\mathcal{A}(G) = \mathbf{1}$ [Auswertung des Allquantors]

GDW. für alle $d \in U$ gilt: $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathbf{1}$ und $\mathcal{A}_{[x/d]}(G) = \mathbf{1}$ [da x nicht frei in G]

GDW. für alle $d \in U$ gilt: $\mathcal{A}_{[x/d]}(F \wedge G) = \mathbf{1}$ [Auswertung der Konjunktion]

GDW. $\mathcal{A}(\forall x (F \wedge G)) = \mathbf{1}$ [Auswertung des Allquantors]

Einige Nicht-Äquivalenzen

Satz 10.3

- a) $(\forall x F \vee \forall x G) \not\equiv \forall x (F \vee G)$
 $(\exists x F \wedge \exists x G) \not\equiv \exists x (F \wedge G)$
- b) $\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$

Beweisidee:

Durch Gegenbeispiele

zu a) Domäne: natürliche Zahlen: $F \approx x$ ist ungerade, $G \approx x$ ist gerade

zu b) Domäne: natürliche Zahlen: $F \approx y$ ist direkter Nachfolger von x

Zum Selbststudium: Äquivalenzen – Nicht-Äquivalenzen

- Um Äquivalenz von Formeln F und G zu beweisen, ist es notwendig, beliebige Strukturen \mathcal{A} (d.h. insbesondere über beliebigen Domänen) zu berücksichtigen, genauer (vgl. Def. 9.12), zu zeigen, dass für jede Struktur \mathcal{A} gilt:
 $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$.
[Dies geschieht in den Beweisen zu Satz 10.2].
- Um die Nicht-Äquivalenz der Formeln F und G zu beweisen, reicht es aus, eine Struktur \mathcal{A} zu finden, für die $\mathcal{A}(F) \neq \mathcal{A}(G)$.
[Für Satz 10.3 gibt die Beweisidee den Hinweis auf entsprechende Strukturen; ein ausgearbeiteter Beweis für 10.3 beinhaltet sowohl die explizite Spezifikation der Strukturen als auch den Nachweis der Verschiedenheit der Auswertung, d.h. die Begründung für $\mathcal{A}(F) \neq \mathcal{A}(G)$.]
- Entsprechendes gilt für Beweise von
 - Unerfüllbarkeit – Nicht-Unerfüllbarkeit
 - Folgerbarkeit – Nicht-Folgerbarkeit

Ersetzbarkeitstheorem (Prädikatenlogik)

Satz 10.4

Seien F und G äquivalente Formeln und sei H eine Formel mit Teilformel F .
Sei H' eine Formel, die aus H durch Ersetzung von F durch G hervorgeht.
Dann gilt: $H' \equiv H$.

Beweis: s. Satz 4.9 (folgt dem Prinzip der strukturellen Induktion):
Beim Induktionsschritt sind zusätzlich Formeln mit Quantoren zu berücksichtigen.
Der entscheidende Punkt ist, zu zeigen:

Hilfssatz 10.5

Wenn H_1 und H_1' äquivalente Formeln sind, dann $\exists x H_1 \equiv \exists x H_1'$ und $\forall x H_1 \equiv \forall x H_1'$.

Beweis

Sei $H_1 \equiv H_1'$ und \mathcal{A} ein Modell von $\exists x H_1$. Dann gibt es ein $d \in U_{\mathcal{A}}$, so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1) = \mathbf{1}$. Da $H_1 \equiv H_1'$, ist $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1) = \mathbf{1}$ und damit ist \mathcal{A} ein Modell von $\exists x H_1'$.
Der zweite Teil des Beweises funktioniert analog.

Beispiel: Äquivalenz-Umformungen

$$\begin{aligned} & (\neg(\exists x P(x, y) \vee \forall z Q(z)) \wedge \exists w P(f(a), w)) \\ \equiv & ((\neg\exists x P(x, y) \wedge \neg\forall z Q(z)) \wedge \exists w P(f(a), w)) && \text{de Morgan} \\ \equiv & ((\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z)) \wedge \exists w P(f(a), w)) && [1] \text{ Dualität} \\ \equiv & (\exists w P(f(a), w) \wedge (\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z))) && \text{Kommutativität } \wedge \\ \equiv & \exists w (P(f(a), w) \wedge (\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z))) && [2] \text{ Skopus von } \exists w \\ \equiv & \exists w (P(f(a), w) \wedge \forall x (\neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z))) && [2] \text{ Skopus von } \forall x \\ \equiv & \exists w (\forall x (\neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z)) \wedge P(f(a), w)) && \text{Kommutativität } \wedge \\ \equiv & \exists w (\forall x (\exists z \neg Q(z) \wedge \neg P(x, y)) \wedge P(f(a), w)) && \text{Kommutativität } \wedge \\ \equiv & \exists w (\forall x \exists z (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y)) \wedge P(f(a), w)) && [2] \text{ Skopus von } \exists z \\ \equiv & \exists w \forall x \exists z (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y) \wedge P(f(a), w)) && [2] \text{ Skopus von } \forall x \text{ und } \exists z \end{aligned}$$

→ Quantorenreihenfolge nach der Umformung hängt von der Reihenfolge der Umformungen ab

→ Skopuserweiterung nach [2] ist nur möglich, wenn in der neu eingeschlossenen Formel nicht die Variable auftritt, die durch den betroffenen Quantor gebunden ist.

Definition 10.6

- Eine Formel F heißt **bereinigt**, falls es keine Variable in F gibt, die in der Formel sowohl gebunden als auch frei vorkommt und falls alle Quantoren in F unterschiedliche Quantorenvariablen aufweisen.
- Eine Formel F heißt **pränex** (oder **in Pränexform**), falls sie die folgende Form aufweist: $F = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n G$, wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, $n \geq 0$, die y_i Variablen sind und in G keine Quantoren vorkommen. $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n$ heißt (Quantoren-) **Präfix**, G ist die **Matrix** von F .
- Ist eine Formel G bereinigt, in Pränexform und äquivalent zur Formel F , dann nennen wir G eine **BPF zu F** .

Das nächste Ziel

- Satz 10.10: Zu jeder Formel gibt es eine BPF

Dafür erforderlich

- Möglichkeit der Umbenennung von Variablen
 - ➔ Definition Variablensubstitution
 - ➔ Überführungslemma (semantische Effekte der Variablensubstitution)
 - ➔ Satz zur gebundenen Umbenennung

Variablen-Substitution (1)

Definition 10.7 (einfache (Variablen-) Substitution)

Seien F eine Formel, x eine Variable und t ein Term. $F_{[x/t]}$ ist die Formel, die sich aus F ergibt, wenn jedes **freie** Vorkommen der Variablen x in F durch den Term t ersetzt wird. $[x/t]$ wird als **Substitution** bezeichnet.

Explizit als rekursive Funktion definiert:

Eine **einfache (Variablen-) Substitution** ist eine rekursiv definierte Funktion $[x/t]$.

- Die Variable x wird auf den Term t abgebildet.
- Alle anderen Variablen und Konstanten werden auf sich selbst abgebildet.
- Für komplexe Terme gilt: $[x/t](f(t_1, \dots, t_k)) = f([x/t](t_1), \dots, [x/t](t_k))$
- Für atomare Formeln gilt: $[x/t](P(t_1, \dots, t_k)) = P([x/t](t_1), \dots, [x/t](t_k))$
- Für komplexe Formeln gilt:
 - $[x/t](\neg F) = \neg[x/t](F)$
 - $[x/t](F \wedge G) = ([x/t](F) \wedge [x/t](G))$ $[x/t](F \vee G) = ([x/t](F) \vee [x/t](G))$
 - $[x/t](F \Rightarrow G) = ([x/t](F) \Rightarrow [x/t](G))$ $[x/t](F \Leftrightarrow G) = ([x/t](F) \Leftrightarrow [x/t](G))$
 - $[x/t](\forall x F) = \forall x F$ $[x/t](\exists x F) = \exists x F$
 - $[x/t](\forall y F) = \forall y [x/t](F)$ $[x/t](\exists y F) = \exists y [x/t](F)$, wobei $x \neq y$.
- Statt $[x/t](F)$ wird auch $F_{[x/t]}$ geschrieben.

Zum Selbststudium: Substitution (2)

Definition 10.7x ((Variablen-) Substitution)

Eine **(Variablen-) Substitution** ist eine rekursiv definierte Funktion σ .

- Variablen x_i werden auf Terme $\sigma(x_i)$ abgebildet.
- Konstanten a_j werden auf sich selbst abgebildet.
- Für komplexe Terme gilt: $\sigma(f(t_1, \dots, t_k)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_k))$
- Für atomare Formeln gilt: $\sigma(P(t_1, \dots, t_k)) = P(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_k))$
- Für komplexe Formeln gilt:
 $\sigma(\neg F) = \neg\sigma(F)$
 $\sigma(F \wedge G) = (\sigma(F) \wedge \sigma(G))$ $\sigma(F \vee G) = (\sigma(F) \vee \sigma(G))$
 $\sigma(F \Rightarrow G) = (\sigma(F) \Rightarrow \sigma(G))$ $\sigma(F \Leftrightarrow G) = (\sigma(F) \Leftrightarrow \sigma(G))$
 $\sigma(\forall x F) = \forall x \sigma_x(F)$ $\sigma(\exists x F) = \exists x \sigma_x(F)$
- Dabei ist σ_x diejenige Substitution, die sich von σ nur dadurch unterscheidet, dass die Variable x auf sich selbst abgebildet wird.
- ➔ Durch eine (Variablen-)Substitution wird jede Formel F auf eine Formel $\sigma(F)$ abgebildet, wobei **jedes** Vorkommen einer freien Variablen x_i in F durch den entsprechenden Term $\sigma(x_i)$ ersetzt wird.
- ➔ Quantorenvariablen und durch sie gebundene Vorkommen von Variablen werden durch die Variablen-Substitution nicht ersetzt.

Überführungslemma

Satz 10.8 (Überführungslemma)

Sei F eine Formel, x eine Variable und t ein Term, der keine in F gebundene Variable enthält. Dann gilt für jede Struktur \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}(F_{[x/t]}) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]}(F)$$

Beweis: siehe Schöning: Übung 58.

- Das Überführungslemma stellt den Zusammenhang zwischen Substitutionen und Modellen (bzw. Auswertungen) her:

$\mathcal{A}(F_{[x/t]})$ Auswertung der Formel, die aus F durch Substitution von x durch t hervorgeht

$\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]}(F)$ Auswertung von F bezüglich der x -Variante, in der x zu $\mathcal{A}(t)$ ausgewertet wird

$$\begin{array}{ccccccc} x & & [x/t] \Rightarrow & t & & F & & [x/t] \Rightarrow & F_{[x/t]} \\ \downarrow \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]} & & & \downarrow \mathcal{A} & & \downarrow \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]} & & & \downarrow \mathcal{A} \\ \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]}(x) & = & & \mathcal{A}(t) & & \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]}(F) & = & & \mathcal{A}(F_{[x/t]}) \end{array}$$

Gebundene Umbenennung

Satz 10.9 (gebundene Umbenennung)

Sei F eine Formel und y eine Variable, die in F nicht vorkommt.

Dann gilt: $\exists x F \equiv \exists y F_{[x/y]}$ und $\forall x F \equiv \forall y F_{[x/y]}$

Beweis

Sei \mathcal{A} eine Struktur.

$$\mathcal{A}(\exists y F_{[x/y]}) = \mathbf{1}$$

GDW. es ein $d \in U$ gibt, so dass $\mathcal{A}_{[y/d]}(F_{[x/y]}) = \mathbf{1}$ [Quantor-Interpretation]

GDW. es ein $d \in U$ gibt, so dass $\mathcal{A}_{[y/d][x/d]}(F) = \mathbf{1}$ [Überführungslemma]

GDW. $\mathcal{A}_{[y/d]}(\exists x F) = \mathbf{1}$ [Quantor-Interpretation]

GDW. $\mathcal{A}(\exists x F) = \mathbf{1}$ [da y nicht frei in F vorkommt]

$$\mathcal{A}(\forall y F_{[x/y]}) = \mathbf{1}$$

GDW. für alle $d \in U$ gilt $\mathcal{A}_{[y/d]}(F_{[x/y]}) = \mathbf{1}$ [Quantor-Interpretation]

GDW. für alle $d \in U$ gilt $\mathcal{A}_{[y/d][x/d]}(F) = \mathbf{1}$ [Überführungslemma]

GDW. $\mathcal{A}_{[y/d]}(\forall x F) = \mathbf{1}$ [Quantor-Interpretation]

GDW. $\mathcal{A}(\forall x F) = \mathbf{1}$ [da y nicht frei in F vorkommt]

Achtung: Umbenennung *freier* Variablen erhält die Äquivalenz nicht !

Existenz einer äquivalenten bereinigten Pränexform

Satz 10.10 (Existenz einer äquivalenten Formel in BPF)

Für jede Formel F gibt es eine äquivalente Formel G in bereinigter Pränexform.

Beweis

Vorbemerkung:

Gemäß Satz 4.10 gibt es zu jeder Formel eine äquivalente Formel, in der \Leftrightarrow nicht vorkommt. Der Beweis setzt entsprechend voraus, dass \Leftrightarrow in F nicht vorkommt.

Induktionsanfang

Wenn F eine atomare Formel ist, dann hat F Pränexform mit leerem Präfix ($n = 0$).

Induktionsannahme

Es seien F_1 und F_2 Formeln, zu denen es äquivalente bereinigte Pränexformen

$Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n G_1$ bzw. $Q'_1y_1Q'_2y_2\dots Q'_my_m G_2$ gibt.

Aufgrund von Satz 10.9 können wir weiterhin voraussetzen, dass $x_i \neq y_j$ für alle i und j sind und dass keine in F_1 bzw. F_2 freien Variable zu den x_i bzw. y_j gehört.

Induktionsschritt: nächste Folie.

Pränexform: Induktionsschritt

Zur Erinnerung: $F_1 \equiv Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n G_1$ und $F_2 \equiv Q'_1y_1 Q'_2y_2 \dots Q'_my_m G_2$

$\neg F_1$: Sei $\overline{Q} = \begin{cases} \exists, & \text{falls } Q = \forall \\ \forall, & \text{falls } Q = \exists \end{cases}$. Dann gilt: $\neg F_1 \equiv \overline{Q}_1x_1 \overline{Q}_2x_2 \dots \overline{Q}_nx_n \neg G_1$ [Satz 10.2.1]

$$\begin{aligned} F_1 \wedge F_2 &\equiv Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n G_1 \wedge Q'_1y_1 Q'_2y_2 \dots Q'_my_m G_2 \\ &\equiv Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n Q'_1y_1 Q'_2y_2 \dots Q'_my_m (G_1 \wedge G_2) \end{aligned} \quad \text{[Satz 10.2.2]}$$

$$\begin{aligned} F_1 \vee F_2 &\equiv Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n G_1 \vee Q'_1y_1 Q'_2y_2 \dots Q'_my_m G_2 \\ &\equiv Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n Q'_1y_1 Q'_2y_2 \dots Q'_my_m (G_1 \vee G_2) \end{aligned} \quad \text{[Satz 10.2.2]}$$

$$\begin{aligned} F_1 \Rightarrow F_2 &\equiv Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n G_1 \Rightarrow Q'_1y_1 Q'_2y_2 \dots Q'_my_m G_2 \\ &\equiv \overline{Q}_1x_1 \overline{Q}_2x_2 \dots \overline{Q}_nx_n Q'_1y_1 Q'_2y_2 \dots Q'_my_m (G_1 \Rightarrow G_2) \end{aligned} \quad \text{[Satz 10.2.2]}$$

$$\exists x F_1 \equiv \exists x Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n G_1 \quad \text{[BPN, wenn } x \neq x_i \text{ für alle } i]$$

$$\forall x F_1 \equiv \forall x Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n G_1 \quad \text{[BPN, wenn } x \neq x_i \text{ für alle } i]$$

wenn $x = x_i$ für ein i , dann kommt x nicht frei in $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n G_1$ vor und

$$\exists x F_1 \equiv \forall x F_1 \equiv Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n G_1 \quad \text{[BPN]}$$

Normalformen: Zwischenstand

Äquivalenzumformungen führen zu bereinigten Pränexformen

- die Matrix lässt sich in KNF oder DNF bringen.
- im Präfix können aber Allquantoren und Existenzquantoren gemischt auftreten.
- In einer Formel können sowohl freie als auch gebundene Variablen auftreten.
- Durch Äquivalenzumformungen läßt sich dieses nicht aufheben.

Die nächsten Schritte

- Bindung freier Variablen durch Existenzquantoren.
- Elimination der Existenzquantoren im Präfix durch Skolemisierung.
- Beide Umformungsschritte gewährleisten zwar nicht Äquivalenz aber (wenigstens) Erfüllbarkeitsäquivalenz.

Erfüllbarkeitsäquivalenz

Definition 10.11 (Erfüllbarkeitsäquivalenz)

Zwei Formeln F und G sind genau dann **erfüllbarkeitsäquivalent**, wenn gilt:
 F ist erfüllbar GDW. G erfüllbar ist.

Beobachtung zu Definition 10.11

- F und G sind erfüllbarkeitsäquivalent: F ist unerfüllbar GDW. G unerfüllbar ist.
- F und G sind erfüllbarkeitsäquivalent:
Es gibt eine erfüllende Struktur \mathcal{A} zu F GDW. es eine erfüllende Struktur \mathcal{A}' zu G gibt.
- Erfüllbarkeitsäquivalenz ist schwächer als Äquivalenz,
d.h. Äquivalenz schließt Erfüllbarkeitsäquivalenz ein.
- Äquivalenz betrifft gleiche Bewertung durch alle Strukturen. Erfüllbarkeitsäquivalenz betrifft die Existenz von erfüllenden Strukturen. (Diese können verschieden sein.)

Umformungen, die Erfüllbarkeitsäquivalenz garantieren

- sind als Vorstufe von Widerlegungsverfahren nützlich → Resolution (Kapitel 12)

Zur Erinnerung: Reduktion semantischer Fragen auf (Un)Erfüllbarkeit

Sätze

(gelten in der Prädikatenlogik ebenso wie in der Aussagenlogik)

- Formel F ist genau dann eine Tautologie ($\models F$), wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.
- Formel F folgt genau dann aus Formel G ($G \models F$), wenn $(G \wedge \neg F)$ unerfüllbar ist.
- Formeln F und G sind genau dann äquivalent ($G \equiv F$), wenn $\neg(F \Leftrightarrow G)$ unerfüllbar ist.

Konsequenz

- Jedes Verfahren, das der Feststellung der Erfüllbarkeit / Unerfüllbarkeit von Formeln dient, ist auch verwendbar, um Gültigkeit, Folgerung und Äquivalenz festzustellen.
- Allerdings muß das Verfahren dazu auf geeignet gebildete Formeln angewendet werden.
- Entsprechend muß auch die Vorverarbeitung auf die geeignete (und das ist nicht immer der ursprüngliche) Formel angewendet werden.
- Nachdem die ursprüngliche Frage in eine (Un)Erfüllbarkeitsfrage bzgl. einer Formel umgewandelt wurde, können auch (unbesorgt) Umformungen beruhend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz vorgenommen werden.

Beispiel: Erfüllbarkeitsäquivalenz

Satz 10.12

Sei F eine Formel und x eine Variable. F ist genau dann erfüllbar, wenn $\exists x F$ erfüllbar ist.

→ maW. F und $\exists x F$ sind erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis

Sei \mathcal{A} ein Modell von F .

Ist \mathcal{A} nicht für x definiert, dann kommt x nicht frei in F vor und $\mathcal{A}(\exists x F) = \mathcal{A}(F)$

Ist \mathcal{A} für x definiert, dann gilt $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(x)]}(F) = \mathcal{A}(F) = \mathbf{1}$ und damit $\mathcal{A}(\exists x F) = \mathbf{1}$

Sei \mathcal{A} ein Modell von $\exists x F$.

Dann gibt es ein $d \in U$, so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathbf{1}$. Also ist auch F erfüllbar.

Satz 10.13

Zu jeder prädikatenlogischen Formel gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente geschlossene Formel.

Beweisidee

Sei F eine Formel und seien x_1, \dots, x_n die in F frei vorkommenden Variablen.

F und $\exists x_1 \dots \exists x_n F$ sind erfüllbarkeitsäquivalent.

(Dies ist durch vollständige Induktion über n zu zeigen.)

Beispiel: Erfüllbarkeitsäquivalenz

Satz 10.14

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F vorkommt.

Dann sind $F_{[x/a]}$ und $\exists x F$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis

Sei \mathcal{A} ein Modell von $F_{[x/a]}$.

Dann gilt $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F_{[x/a]}) = \mathbf{1}$ und damit $\mathcal{A}(\exists x F) = \mathbf{1}$

Sei \mathcal{B} ein Modell von $\exists x F$.

Dann gibt es ein $d \in U$, so dass $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathbf{1}$. Die Struktur \mathcal{A} sei so definiert, dass sie nur in der Interpretation von a von \mathcal{B} abweicht. Hier gilt: $\mathcal{A}(a) = d$. Da a nicht in F vorkommt, spielt $\mathcal{B}(a) = \mathcal{B}_{[x/d]}(a)$ für die Bestimmung von $\mathcal{B}_{[x/d]}(F)$ keine Rolle, also ist

$$\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F).$$

Wegen des Überführungslemmas gilt weiter: $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F_{[x/a]})$.

Also ist auch $F_{[x/a]}$ erfüllbar.

Beobachtung zu den Sätzen 10.12, 10.13, 10.14

• Die Sätze machen nur Aussagen über Existenzquantoren mit maximalem Skopus.

→ Skolemisierung: Verallgemeinerung von Satz 10.14 für Existenzquantoren an beliebiger Position im Quantorenpräfix

Skolemisierung

Definition 10.15 (Skolemisierung, Skolemsymbol)

Es sei $F = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k \exists z G$, $k \geq 0$ und f ein k -stelliges Funktionssymbol, das nicht in F vorkommt.

Wir bilden die Formel:

$$F' = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k G_{[z/f(y_1, \dots, y_k)]}$$

- f heißt **Skolemsymbol**, wenn $k > 0$ auch **Skolemfunktion**, im Fall $k = 0$ auch **Skolemkonstante**. [Toralf Skolem]
- Skolemsymbole sind von allen bisher verwendeten Funktionssymbolen und Konstanten verschieden.
- Die Bildung von F' heißt **Skolemisierung** von F .

Beobachtungen zu Definition 10.15

- F' enthält einen Existenzquantor weniger als F .
- Die durch diesen Existenzquantor gebundene Variable z tritt nicht mehr in F' auf.
- z wurde in G durch $f(y_1, \dots, y_k)$ substituiert.
- Ist F eine Formel in BPF und F' durch Skolemisierung aus F hervorgegangen, dann ist auch F' in BPF.

Beispiele: Skolemisierung

$k=0 \quad \exists x \forall y (\text{vorf}(x,y) \wedge \text{weibl}(x))$

Skolemkonstante e

$$\forall y (\text{vorf}(e, y) \wedge \text{weibl}(e))$$

$k=1 \quad \forall y \exists x (\text{elt}(x, y) \wedge \text{weibl}(x))$

Skolemfunktion $m(y)$

$$\forall y (\text{elt}(m(y), y) \wedge \text{weibl}(m(y)))$$

$$\forall y \exists x (\text{vorf}(x, y) \wedge \text{weibl}(x))$$

Skolemfunktion $f(y)$

$$\forall y (\text{vorf}(f(y), y) \wedge \text{weibl}(f(y)))$$

$k=2 \quad \forall x \forall y \exists z (\text{gr_elt}(x, y) \Rightarrow (\text{elt}(x, z) \wedge \text{elt}(z, y)))$

$$\forall x \forall y (\text{gr_elt}(x, y) \Rightarrow (\text{elt}(x, g(x, y)) \wedge \text{elt}(g(x, y), y))) \quad \text{Skolemfunktion } g(x, y)$$

➔ Vorsicht: Die Einführung der Skolemsymbole besagt noch nichts über die Interpretation der Formeln, die Skolemsymbol enthalten.

Satz 10.16

Sei F eine Formel und F' durch Skolemisierung aus F hervorgegangen.
Dann sind F und F' erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis

Der Fall der Einführung von Skolemkonstanten wurde in Satz 10.14 behandelt. Für den allgemeinen Fall:

→ siehe Schöning (s. 67f.)

Definition 10.17

Eine Formel F ist in **Skolemform** (... ist eine **Skolemformel**), wenn sie

- in BPF (bereinigter Pränexform) ist
- geschlossen ist (keine freien Variablen aufweist) und
- keinen Existenzquantor enthält.

Eine Formel F ist in **Klauselnormalform**, wenn sie

- in Skolemform ist und
- ihre Matrix in KNF ist.

→ In Skolemformen und Klauselnormalformen sind alle Variablen allquantifiziert.

→ Die Matrix enthält alle relevante Information.

Skolemform

Satz 10.18 (Existenz einer erfüllbarkeitsäquivalenten Skolemformel)

Für jede Formel in BPF existiert eine erfüllbarkeitsäquivalente Skolemformel.

Beweisidee

Nach Satz 10.13 können die freien Variablen durch Existenzquantoren gebunden werden und auf die entstehende Formel kann mehrfach Skolemisierung angewendet werden, bis kein Existenzquantor mehr auftritt. Alle Schritte gewährleisten Erfüllbarkeitsäquivalenz (und Erfüllbarkeitsäquivalenz ist transitiv.)

Verfahren zur Erstellung der Skolemform

Sei F in BPF.

$F_0 := F$

$i := 0$

while F_i enthält einen Existenzquantor **do**

begin

Es ist $F_i = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k \exists z G_i$

Wähle ein neues k -stelliges Funktionssymbol und setze:

$F_{i+1} = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k G_i[z/f(y_1, \dots, y_k)]$

$i := i + 1$

end

Klauselnormalform für die Prädikatenlogik

Satz 10.18 (Ex. einer erfüllbarkeitsäquivalenten Klauselnormalform)

Für jede Formel existiert eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform.

Beweisidee

Umformungsschritte

F beliebige Form

Bereinigung:

Umbenennen der gebundenen Variablen

F₁	bereinigt	$F \equiv F_1$	Satz 10.9
	Bindung aller freien Variablen durch Existenzquantoren		
F₂	bereinigt, geschlossen	F_1 erfüllbarkeitsäquivalent F_2	Satz 10.13
	Erstellung einer Pränexform		
F₃	BPF, geschlossen	$F_2 \equiv F_3$	Satz 10.10
	Skolemisierung		
F₄	Skolemform	F_3 erfüllbarkeitsäquivalent F_4	Satz 10.18
	Umformung der Matrix in KNF		
F₅	Klauselnormalform	$F_4 \equiv F_5$	Satz 4.23

Also sind auch **F** und **F₅** sind erfüllbarkeitsäquivalent.