Logik & Semantik
10. Vorlesung
Modallogik

Grundlagen

- Einsatzbereiche der modalen Aussagenlogik
- Syntax und Semantik der modalen Aussagenlogik
- Die Systeme $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}4$ und $\mathcal{S}5$
- Modallogiken als Fragmente der Prädikatenlogik, Entscheidbarkeit

Modalitäten: „Modes of truth“ (1)

Leibniz

möglich: es könnte anders sein

notwendig: es gibt keine Alternativen

Modalitäten der Wahrheit – alethische Modalitäten

Erfüllbare Formeln		Kontradiktionen
Tautologien	**Kontingente Formeln**	
wahr in allen Modellen	**wahr in manchen, falsch in anderen Modellen**	**falsch in allen Modellen**
notwendig wahr	**möglicherweise wahr, möglicherweise falsch**	**notwendig falsch**

- Alethische Modalitäten: αληθεια – Wahrheit

Modalitäten: „Modes of truth“ (2)

Weitere relevante Modalitäten

epistemisch:	glauben, wissen
deontisch:	müssen, sollen, dürfen
temporal:	immer, irgendwann in der Vergangenheit / in der Zukunft

Modallogiken in der Informatik

- Multiagenten-Systeme
- Wissensbasierte Systeme, Informationssysteme
- Betriebssysteme, Kommunikationssysteme
- Planung

\+ generell als formales System jenseits der Aussagenlogik:
Aussagenlogik $\prec$ Modale Aussagenlogik $\prec$ Prädikatenlogik

- Zur Verwendung von Modallogik für Multiagenten-Systeme siehe:

  Huth, Michael & Ryan, Mark (2000). *Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems.* Cambridge: Cambridge University Press.

Zeitlogik: Temporale Operatoren (multi-modal)

Erweiterung der Aussagenlogik durch

Vier temporale Operatoren **P**, **F**, **G**, **H**

- Für jede Formel *X* sind **P***X*, **F***X*, **G***X*, **H***X* Formel.
- Iteration von temporalen Operatoren ist möglich

Intendierte Interpretationen

P	Past	**P***X*	*X* war einmal
H	History	**H***X*	*X* war immer
F	Future	**F***X*	*X* wird sein
G	Guarantee	**G***X*	*X* wird immer sein

Dualität für partikulare und universale Operatoren

$\mathbf{H}X \equiv \neg\,\mathbf{P}\,\neg X$

$\mathbf{G}X \equiv \neg\,\mathbf{F}\,\neg X$

- H und G entsprechen box-Modalitäten
- P und F entsprechen diamond-Modalitäten

Temporale Operatoren – Modaloperatoren

$\mathbf{F}X$	–	in einer zukünftigen Welt / Situation gilt X
$\mathbf{P}X$	–	in einer vergangenen Welt / Situation gilt X
$\Diamond X$	–	in einer möglichen Welt / Situation gilt X
$\mathbf{G}X$	–	in jeder zukünftigen Welt / Situation gilt X
$\mathbf{H}X$	–	in jeder vergangenen Welt / Situation gilt X
$\Box X$	–	in jeder möglichen Welt / Situation gilt X
X	–	X gilt jetzt
$X \supset \mathbf{GP}X$	–	wenn jetzt X gilt, dann wird immer gelten, dass X einmal gegolten hat.
$X \supset \mathbf{HF}X$	–	wenn jetzt X gilt, dann hat immer gegolten, dass X einmal gelten wird.
$X \supset \Box\Diamond X$	–	wenn X gilt, dann ist es notwendig, dass X möglich ist.

Wissensoperatoren – Modaloperatoren (multi-modal)

- K_pQ – p weiß, dass Q gilt — K ≈ know
- B_pQ – p glaubt, dass Q gilt — B ≈ believe

- Beziehung zwischen: K_pQ und B_pQ :
  Man glaubt, was man weiß.
  Man kann nur wahre Dinge wissen, aber falsche glauben.

Iteration von epistemischen Operatoren

- Beziehung zwischen: K_pQ und K_pK_pQ
- Beziehung zwischen: B_pQ und K_pB_pQ
- Beziehung zwischen: B_pK_pQ und K_pB_pQ
- Beziehung zwischen: $K_{p1}K_{p2}Q$ und $K_{p2}K_{p1}Q$

Im Hinblick auf modale Logiken des Wissens und Glaubens sind u.a. die folgenden Fragekomplexe wichtig:

- Was grenzt „Wissen“ gegen „Glauben“ ab?
- Für jedes Individuum *p* wird ein eigener Operator K_p und ein Operator B_p angenommen. D.h. wir haben es mit einem System von epistemischen Modaloperatoren zu tun.
- Das Problemfeld / Anwendungsfeld des „gemeinsamen Wissens“ bzw. „geteilten Wissens“, ist insbesondere auch für Agenten (im Sinne der Informatik) wichtig.
  Hier werden Modallogiken verwendet, um die Interaktionen von K_{pi} Formeln bzgl. verschiedener Individuen zu untersuchen.

Aufgabe (ohne Nummer)

- Glauben und Wissen sind nicht dual zueinander. Wie könnte man die dualen Operatoren im Deutschen ausdrücken?

„Wise-men puzzle“ – Die Aufgabe

- Drei weise Personen wissen, dass *drei rote* Hüte und *zwei blaue* Hüte vorhanden sind [und sie wissen, dass sie alle drei dies wissen]. Der König setzt jeder Person einen Hut auf – ohne dass diese sehen kann, welche Farbe ihr Hut hat – und fragt dann – der Reihe nach – was für einen Hut die Personen auf dem Kopf hat. [Die weisen Personen sehen die Hüte der anderen, hören die Antworten, dürfen aber nicht direkt kommunizieren.]
- Angenommen die erste Person sagt: Ich weiß es nicht.
  Und die zweite Person sagt auch: Ich weiß es nicht.
  Warum kann die dritte Person die richtige Antwort geben?

„Wise-men puzzle“ – Die Lösung (model checking)

P1	P2	P3
R	R	R
~~R~~	~~R~~	~~B~~
R	B	R
~~R~~	~~B~~	~~B~~
B	R	R
~~B~~	~~R~~	~~B~~
B	B	R
~~B~~	~~B~~	~~B~~

P1 sagt: Ich weiß nicht.

P2 und P3 können schließen, dass P1 einen roten Hut sieht: RBB ist ausgeschlossen [Denn dann hätte P1, R gesagt, da BBB nicht möglich.]

P2 sagt: Ich weiß nicht.

P3 schließt: P2 weiß, dass P1 einen roten Hut sieht.
Wenn ich (P3) einen blauen hätte,
dann wüsste P2, dass sie einen roten hat.

Es gibt nur zwei blaue Hüte.

Also antwortet P3,
dass sie einen roten Hut hat.

Antwort ist möglich aufgrund von Schlüssen über Wissen.

Das Auswertungsspiel: Der AL-Fall

Setting: Eine endliche Menge von MitspielerInnen W_i

- für die Aussagensymbole $\mathcal{As}(\mathcal{L})$ legt W_i einen Wahrheitswert fest.

Die Spielregeln

- SpielleiterIn ruft Formeln zur Auswertung auf.
- Regeln für die MitspielerInnen (AuswerterInnen) W_i
  - Aussagensymbol *P*: hebe die Hand, wenn *P* wahr.
  - $\neg P$: hebe genau dann die Hand, wenn Du bei *P* die Hand nicht gehoben hast.
  - $(P \vee Q)$: hebe genau dann die Hand, wenn Du bei *P* oder bei Q die Hand gehoben hast.
  - $(P \supset Q)$: hebe genau dann die Hand, wenn Du bei *P* die Hand nicht gehoben hast oder bei Q die Hand gehoben hast.

Das Auswertungsspiel: Der AL-Fall (2)

Aussagensymbole: Werte festlegen (*P*, *Q*)

Beispiele

P

Q

$(P \vee Q)$

$\neg (P \vee Q)$

$(P \supset Q)$

$(Q \supset (P \supset Q))$

Das Auswertungsspiel: Der AL-Fall (2)

Beispiele

$\neg (P \vee Q)$

$(Q \supset (P \supset Q))$

Charakterisierung

- Eine Formel ist AL-erfolgreich, wenn sie bei jedem Setting (mit beliebigen SpielerInnen, die sich an die Regeln halten !) am Ende von allen SpielerInnen durch Handheben bestätigt wird.

AL-erfolgreich ≈ AL-gültig

- Beobachtung zur Substitution

  Ist eine Formel X AL-erfolgreich, dann auch die Formel $X\{P/Y\}$.

  Sind die Formeln Y und Z äquivalent, dann ist die Formel $X\{P/Y\}$ genau dann AL-erfolgreich, wenn $X\{P/Z\}$ AL-erfolgreich ist.

Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
  - Ergänzendes Vokabular und Bildungsregeln für Formeln
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
- Ableitungs-, Beweisverfahren

Das Vokabular der (multi-)modalen Aussagenlogik: $\mathcal{L}_{MA}$

Das Vokabular (Alphabet)

- Das Vokabular der Aussagenlogik
  - Aussagensymbole: $\mathcal{As}(\mathcal{L}_{MA}) = \mathcal{As}(\mathcal{L}_{AL})$
  - logische Konstanten
  - Junktoren
- Modaloperatoren ($\mathcal{Mod}(\mathcal{L}_{MA})$)
  - $\Box_i$, $\Diamond_i$ für $1 \leq i \leq n$ (n Paare von Modaloperatoren)

Notationsvarianten

- Alternativ wird [i] und $< i >$ verwendet
- Ist n = 1 (monomodale Modallogik) kann der Index entfallen,
- Andere Symbole anstelle von ‚box' und ‚diamond'

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik 10 – 13

- Die Modaloperatoren $\Box$, $\Diamond$ werden im Englischen häufig als „box" – $\Box$ bzw. „diamond" – $\Diamond$ gelesen. Andere Schreibweisen / Notationsweisen sind:
  Für $\Box$: N (necessity) L („Lewis")
  $\Diamond$: M (modality)
- Modaloperatoren sind einstellige Operatoren (ähnlich zum einstelligen Junktor $\neg$), die iteriert werden können.

Die Sprache der (multi-)modalen Aussagenlogik: $\mathcal{L}_{MA}$

Definition

Die atomaren Formeln der modalen Aussagenlogik sind die atomaren Formeln der Aussagenlogik ($\mathcal{At}(\mathcal{L}_{MA}) = \mathcal{At}(\mathcal{L}_{AL})$)

Die Menge der Formeln der (multi-)modalen Aussagenlogik $\mathcal{For}(\mathcal{L}_{MA})$ ist die kleinste Menge, so dass:

1. $\mathcal{At}(\mathcal{L}_{MA}) \subseteq \mathcal{For}(\mathcal{L}_{MA})$
2. Falls $X \in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{MA})$ und $\Box_i$, $\Diamond_i \in \mathcal{Mod}(\mathcal{L}_{MA})$, dann sind $\neg X$, $\Box_i X$, $\Diamond_i X \in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{MA})$.
3. Falls $\odot$ binärer Junktor, X, $Y \in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{MA})$, dann $(X \odot Y) \in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{MA})$

Beispiel: $\Diamond_1 \neg (\Box_1(P_1 \supset P_2) \vee ((P_3 \wedge \Box_2 P_2) \supset \top))$

- Die Klammerungskonventionen für Modaloperatoren entsprechen denen des Negationsoperators. D.h.
  $\Box P \supset P$ ist zu lesen als: $(\Box P) \supset P$, nicht als $\Box (P \supset P)$
- Die Dualität von Notwendigkeitsoperator und Möglichkeitsoperator, die durch die intendierten Bedeutung / intendierten Verwendung dieser Operatoren der Sprache $\mathcal{L}_{MA}$ für die formale Syntax von $\mathcal{L}_{MA}$ angestrebt ist, kann auf verschiedene Weise realisiert werden:
  - $\Diamond$ wird überhaupt nur als Abkürzung für $\neg \Box \neg$ eingeführt.
  - Die Beziehungen zwischen $\Diamond$ und $\neg \Box \neg$ werden in geeigneter Weise in der Semantik festgelegt. Diesen Weg wählen wir hier.

Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
  - für die neuen Symbole / Formeln
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
- Ableitungs-, Beweisverfahren

Das Auswertungsspiel: Die Modalitäten

Monomodallogiken

- Modaloperatoren $\mathcal{Mod}(\mathcal{L}_{MA})$ = { □, ◊ }

Modifiziertes Setting

Jede MitspielerIn W_i *sieht* / *berücksichtigt* weitere MitspielerInnen (konstant über das ganze Spiel).

Die zusätzlichen Spielregeln

- □ *P* : hebe genau dann die Hand, wenn alle AuswerterInnen, die Du berücksichtigst, bei *P* die Hand gehoben haben.
- ◊ *P* : hebe genau dann die Hand, wenn mind. eine AuswerterIn, die Du berücksichtigst, bei *P* die Hand gehoben hat.
- Eine Formel ist $\mathcal{K}$-erfolgreich, wenn sie bei jedem Setting (mit beliebigen SpielerInnen) am Ende von allen SpielerInnen durch Handheben bestätigt wird.

- ($\mathcal{K}$ für Saul Kripke, den Logiker, der die Grundlagen der Semantik von Modallogiken gelegt hat).
  Detaillierte Darstellungen zu $\mathcal{K}$ finden sich im Abschnitt 1. von
  - Hughes, G. & Cresswell, M: (1984). *A Companion to Modal Logic*. London: Methuen.

  und im Überblicksartikel
  - Fitting, Melvin (1993). Basic Modal Logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, (pp. 365 – 448), Oxford: Clarendon.

Beispiel

JedeR MitspielerIn

- wählt eine Menge von MitspielerInnen, die sie/er im weiteren berücksichtig.
  - (Man darf sich selbst berücksichtigen, muss es aber nicht.)
  - Die Menge darf auch leer sein.

→Merkt sich zu jeder Formel,

- ob alle oder mindestens einer der berücksichtigten SpielerInnen die Hand gehoben hat,
- ob er/sie selbst die Hand gehoben hat

Das Auswertungsspiel: Die Modalitäten (2)

Beispiele (P, Q)

P

$\Box P$

$\Diamond P$

$\Box P \supset P$

$\Box P \supset \Diamond P$

Q

$(P \supset Q)$

$\Box (P \supset Q)$

$\Box Q$

$(\Box P \supset \Box Q)$

$\Box (P \supset Q) \supset (\Box P \supset \Box Q)$

$\neg P$

$\Diamond \neg P$

$\neg \Diamond \neg P$

$\Box P \supset \neg \Diamond \neg P$

$\neg \Diamond \neg P \supset \Box P$

$(Q \supset (P \supset Q))$

$\Box(Q \supset (P \supset Q))$

Aufgabe (ohne Nummer)

Begründen Sie, warum das $\mathcal{K}$-Spiel für

$\Box (P \supset Q) \supset (\Box P \supset \Box Q)$

$\Box P \supset \neg \Diamond \neg P$

$\neg \Diamond \neg P \supset \Box P$

stets erfolgreich, d.h. durch Handheben, beendet wird, unabhängig davon, wie das Setting gewählt wurde, d.h. unabhängig davon,

a. wieviele SpielerInnen beteiligt sind,

b. was die SpielerInnen als Anfangsbewertung gewählt haben,

c. welche SpielerInnen von welchen SpielerInnen berücksichtigt werden.

Das Auswertungsspiel: Die Modalitäten (3)

Beobachtung

- $\Box\,(P \supset Q) \supset (\Box\, P \supset \Box\, Q)$ ist $\mathcal{K}$-erfolgreich.
- $\Box$ und $\Diamond$ sind duale Operatoren.
- Wenn X AL-erfolgreich ist, dann ist X $\mathcal{K}$-erfolgreich.
- Wenn X $\mathcal{K}$-erfolgreich ist, dann ist $\Box\, X$ $\mathcal{K}$-erfolgreich.
- Dieses spiegelt sich in der Modallogischen Semantik und Beweistheorie wider als:

Notwendigkeitsregel (rule of necessitation)

- Wenn $\models_{\mathcal{ML}} X$, dann $\models_{\mathcal{ML}} \Box\, X$
- (Wenn X gültig ist, dann ist gültig, dass X notwendig ist.)
- Aber im allgemeinen gilt **nicht** $X \models_{\mathcal{ML}} \Box\, X$

  (Wenn X wahr ist, dann ist X notwendig wahr.)

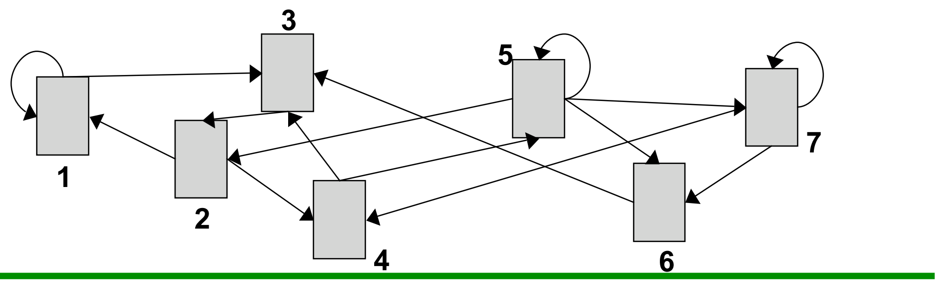
- $\models_{\mathcal{ML}}$ steht hier für Gültigkeit bzw. Folgerbarkeit in einem modallogischen System $\mathcal{ML}$

(Multi-)Modallogische Modelle (1)

Definition (Modallogischer Rahmen, *frame*)

Ein modallogischer Rahmen ($\mathcal{K}$-Rahmen, frame) ist ein Tupel $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \rangle$, wobei $\mathcal{W}$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{R}_i$ binäre Relationen auf $\mathcal{W}$ sind.

Die Elemente von $\mathcal{W}$ nennen wir mögliche Welten, die $\mathcal{R}_i$ nennen wir Zugänglichkeitsrelationen oder Sichtbarkeitsrelationen.



- Die „Welten“ haben die Funktion, unterschiedliche Ausprägungen von Bewertungen zu individuieren. Das Wort ‚Welt‘ ist dabei aber eigentlich unerheblich. Genauso gut kann man von Situationen, Zuständen oder Punkten reden.
- Die Grundidee derartiger Modelle geht auf Saul Kripke zurück. Derartige Strukturen (Modelle) zur Interpretation logischer Ausdrücke werden häufig als *Kripke-Strukturen* bezeichnet.
- Allerdings gibt es auch Modallogiken, deren Semantik sich nicht auf Basis der Kripke-Strukturen definieren lässt, die sogenannten ‚nicht normalen Modallogiken‘. Solche werden im folgenden keine Rolle spielen.
- Modallogiken (und Modalitäten) unterscheiden sich darin, welche zusätzlichen Einschränkungen auf die Relation $\mathcal{R}$ gemacht werden. In der Literatur zur Modallogik gibt es eine große Auswahl von Einschränkungen, wir werden hier nur auf eine kleine Anzahl davon eingehen.
- Insbesondere werden im weiteren nicht die Interaktionen zwischen verschiedenen ‚box‘-Modalitäten bzw. verschiedenen Sichtbarkeitsrelationen behandelt.

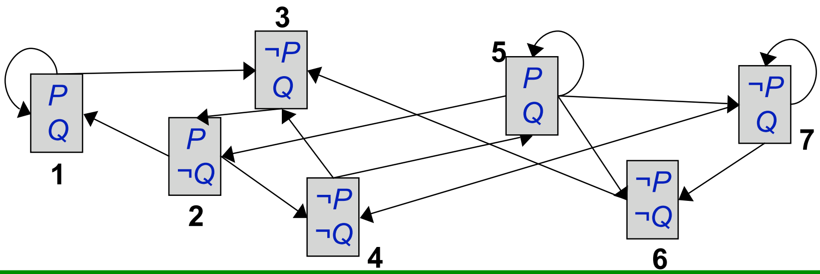
(Multi-)Modallogische Modelle (2)

Definition (Modallogisches Modell)

Ein *modallogisches Modell* (*$\mathcal{K}$-Modell*) ist ein Paar $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \nu \rangle$, wobei

- $\mathcal{F}$ ein modallogischer Rahmen und
- ν ist eine Abbildung (*Wertzuweisung, Interpretation*)
  $\nu : \mathcal{F}or(\mathcal{L}_{MA}) \times \mathcal{W} \rightarrow$ **Tr = { t, f }** .

$\nu(F, w) =$ **t** wird als „*F* ist wahr in *w*“ gelesen.



- Dem Prinzip der strukturellen Rekursion folgend wird ν durch die Wertzuweisung auf der Menge der Aussagensymbole
  $\nu : \mathcal{A}s(\mathcal{L}_{MA}) \times \mathcal{W} \rightarrow$ **Tr**
  festgelegt und im Hinblick auf das **Tr**-Verhalten der Junktoren und Modaloperatoren fortgesetzt.
- ν entspricht in der Benennung der in dieser Vorlesung in der Aussagenlogik verwendeten Terminologie: ν steht für „valuation“
- Die „Welten“ haben die Funktion, unterschiedliche Ausprägungen von Bewertungen zu individuieren.

(Multi-)Modallogische Modelle (3)

Für die Interpretation ν gilt

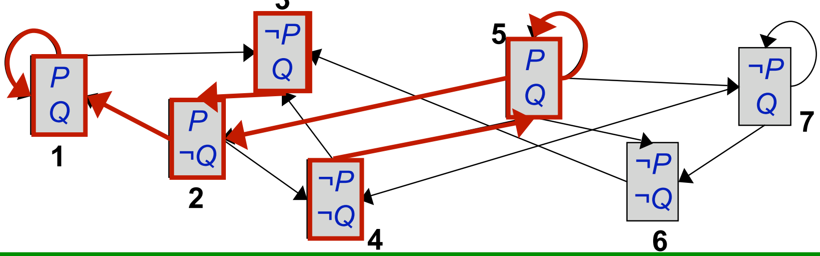
- $\nu(\bot, w) = \mathbf{f}$, $\nu(\top, w) = \mathbf{t}$
- $\nu(\neg P, w) = \neg\, \nu(P, w)$
- $\nu((P \odot Q), w) = \nu(P, w) \odot \nu(Q, w)$
- $\nu(\Box_i\, P, w) = \begin{cases} \mathbf{t}, \text{ falls } \nu(P, w^*) = \mathbf{t} \text{ für alle } w^* \text{ mit } \mathcal{R}_i(w, w^*) \\ \mathbf{f} \text{ sonst} \end{cases}$
- $\nu(\Diamond_i\, P, w) = \begin{cases} \mathbf{t}, \text{ falls } \nu(P, w^*) = \mathbf{t} \text{ für mind. ein } w^* \text{ mit } \mathcal{R}_i(w, w^*) \\ \mathbf{f} \text{ sonst} \end{cases}$

- Die Festlegung für die Auswertung von $\Box_i$-Formeln ist die grundlegende Erweiterung der Semantik.
  Die Festlegung für $\Diamond_i$-Formeln ergibt sich – in der hier aufgeführten Weise – wenn $\Diamond_i$ als dualer Operator zu $\Box_i$ *definiert* wird.

Beispiel

- $\nu(\Box P, w) = \begin{cases} \mathbf{t}, \text{ falls } \nu(P, w^*) = \mathbf{t} \text{ für alle } w^* \text{ mit } \mathcal{R}(w, w^*) \\ \mathbf{f} \text{ sonst} \end{cases}$
- $\nu(\Diamond P, w) = \begin{cases} \mathbf{t}, \text{ falls } \nu(P, w^*) = \mathbf{t} \text{ für mind. ein } w^* \text{ mit } \mathcal{R}(w, w^*) \\ \mathbf{f} \text{ sonst} \end{cases}$

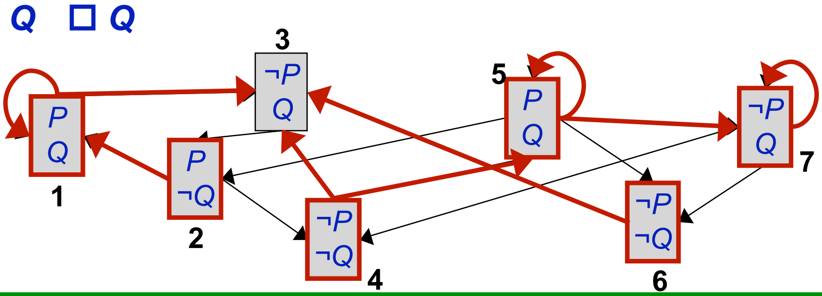
◊ *P* **□ *P***



Beispiel

- $\nu(\Box\, Q, w) = \begin{cases} \mathbf{t}\text{, falls } \nu(Q, w^*) = \mathbf{t} \text{ für alle } w^* \text{ mit } \mathcal{R}(w, w^*) \\ \mathbf{f} \text{ sonst} \end{cases}$
- $\nu(\Diamond\, Q, w) = \begin{cases} \mathbf{t}\text{, falls } \nu(Q, w^*) = \mathbf{t} \text{ für mind. ein } w^* \text{ mit } \mathcal{R}(w, w^*) \\ \mathbf{f} \text{ sonst} \end{cases}$

◊ *Q* □ *Q*



Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
  - Angepasst an die Evaluation
- Ableitungs-, Beweisverfahren

Gültigkeit in Rahmen(-mengen)

Definitionen

- Eine Formel X aus $\mathcal{For}(\mathcal{L}_{\mathrm{MA}})$ ist *gültig in einem modallogischen Rahmen* $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \rangle$ ($\vDash_{\mathcal{F}} X$),
  wenn für jede Interpretation ν: $\mathcal{For}(\mathcal{L}_{\mathrm{MA}}) \times \mathcal{W} \to \{\, \mathbf{t}, \mathbf{f} \,\}$
  und jede $w \in \mathcal{W}$ gilt: $\nu(X, w) = \mathbf{t}$.
- Es sei $\mathcal{C}$ eine (nicht leere) Menge von modallogischen Rahmen.
  Eine Formel X aus $\mathcal{For}(\mathcal{L}_{\mathrm{MA}})$ ist *gültig in* $\mathcal{C}$ ($\vDash_{\mathcal{C}} X$), wenn sie in jedem enthaltenen Rahmen gültig ist.

Beobachtung

- Jede aussagenlogische Tautologie ist in jedem Rahmen und in jeder Menge von Rahmen gültig.

Der weitere Fokus

Monomodallogiken

- Modaloperatoren

  $\mathcal{Mod}(\mathcal{L}_{MA}) = \{ \Box, \Diamond \}$

- Ein mono-modallogischer Rahmen ist ein Paar $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, wobei $\mathcal{W}$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{R}$ eine binäre Relationen auf $\mathcal{W}$ ist.
- Es gibt also nur eine Zugänglichkeitsrelation bzw. Sichtbarkeitsrelation.

- $\mathcal{K}$ steht im folgenden für die Menge aller mono-modallogischer Rahmen, $\models_{\mathcal{K}}$ für Gültigkeit bezogen auf diese Menge.

Tautologien im System $\mathcal{K}$

$\vDash_{\mathcal{K}} \Box\,(P \wedge Q) \equiv (\Box P \wedge \Box Q)$

$\vDash_{\mathcal{K}} (\Box P \vee \Box Q) \supset \Box\,(P \vee Q)$

$\vDash_{\mathcal{K}} \Diamond(P \vee Q) \equiv (\Diamond P \vee \Diamond Q)$

$\vDash_{\mathcal{K}} \Diamond(P \wedge Q) \supset (\Diamond P \wedge \Diamond Q)$

$\vDash_{\mathcal{K}} \Box\,(P \supset Q) \supset (\Box\, P \supset \Box\, Q)$

$\vDash_{\mathcal{K}} \Box\, \neg\, P \equiv \neg\, \Diamond\, P$

$\vDash_{\mathcal{K}} \neg\, \Box\, P \equiv \Diamond\, \neg\, P$

➔ *Dualität* von Notwendigkeit und Möglichkeit

Aufgabe (ohne Nummer)

Beweisen Sie die folgenden Tautologien im Modalkalkül $\mathcal{K}$.

a. $\vDash_{\mathcal{K}} \Box\,(P \wedge Q) \equiv (\Box P \wedge \Box Q)$

b. $\vDash_{\mathcal{K}} \Diamond\,(P \vee Q) \equiv (\Diamond P \vee \Diamond Q)$

c. $\vDash_{\mathcal{K}} (\Box P \vee \Box Q) \supset \Box\,(P \vee Q)$

d. $\vDash_{\mathcal{K}} \Diamond(P \wedge Q) \supset (\Diamond P \wedge \Diamond Q)$

e. $\vDash_{\mathcal{K}} \Box\, P \equiv \neg\, \Diamond\, \neg\, P$

Negation von Notwendigkeit & Möglichkeit

$\models_{\mathcal{K}} \Box \neg X \equiv \neg \Diamond X$

$\models_{\mathcal{K}} \neg \Box X \equiv \Diamond \neg X$

$\models_{\mathcal{K}} \Box \Box X \equiv \neg \Diamond \Diamond \neg X$

$\models_{\mathcal{K}} \Box \Box \neg X \equiv \neg \Diamond \Diamond X$

$\models_{\mathcal{K}} \Diamond \Diamond X \equiv \neg \Box \Box \neg X$

$\models_{\mathcal{K}} \Diamond \Diamond \neg X \equiv \neg \Box \Box X$

$\models_{\mathcal{K}} \Box \Diamond \neg X \equiv \neg \Diamond \Box X$

$\models_{\mathcal{K}} \Diamond \Box \neg X \equiv \neg \Box \Diamond X$

- $\Box$ und $\Diamond$ sind duale Operatoren
- Negation zwischen Modaloperatoren ist vermeidbar.
- In Ketten von $\Box$ und $\Diamond$ (ohne „unterbrechende Negation) können $\Box$ und $\Diamond$ vertauscht werden, wenn unmittelbar vor und nach der Sequenz an beiden Stellen entweder eine Negation eingesetzt oder getilgt wird.

- Modalität ≈ Sequenz von Modaloperatoren und Negation.

- Jede Sequenz von Modaloperatoren können wir als eine Modalität des Modal-Systems auffassen. Später wird es auch darum gehen, unter welchen Bedingungen welche Sequenzen überflüssig (d.h. äquivalent zu kürzeren Sequenzen) sind.

Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
  - Verschiedene Modallogische Systeme: $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}4$, $\mathcal{S}5$
  - Einschränkung der Zugängichkeitsrelationen
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
  - Einschränkung auf geeignete Rahmen-Typen
- Ableitungs-, Beweisverfahren

Das Auswertungsspiel: Der $\mathcal{T}$-Fall

$\Box P \supset P$

Modifiziertes Setting (Sichtbarkeit festlegen)

Jede(r) muss sich selbst berücksichtigen. ($\mathcal{R}$ ist reflexiv.)

- Eine Formel ist $\mathcal{T}$-erfolgreich, wenn sie bei jedem Setting (mit beliebigen SpielerInnen) am Ende von allen SpielerInnen durch Handheben bestätigt wird.

Beispiele (*P*)

P

$\Box P$

$\Diamond P$

$\Box P \supset P$

$P \supset \Diamond P$

$\Box P \supset \Diamond P$

$\Box \Box P$

$\Box P \supset \Box \Box P$

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik 10 – 31

Aufgabe (ohne Nummer)

Begründen Sie, warum das $\mathcal{T}$-Spiel für

$\Box P \supset P$

stets erfolgreich, d.h. durch Handheben, beendet wird, unabhängig davon, wie das Setting gewählt wurde, d.h. unabhängig davon,

a. wieviele SpielerInnen beteiligt sind,
b. was die SpielerInnen als Anfangsbewertung gewählt haben,
c. welche SpielerInnen von welchen SpielerInnen berücksichtigt werden.

- Aufgabe (ohne Nummer)
- Zeigen Sie, dass es Settings gibt, in denen $\Box P \supset \Box \Box P$ nicht von allen SpielerInnen akzeptiert werden muss, d.h. nicht $\mathcal{T}$-erfolgreich ist.

$\mathcal{T}$-, $\mathcal{S4}$- und $\mathcal{S5}$-Modelle und -Gültigkeit

Definition

Ein modallogisches Modell $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, v \rangle$ ist ein

- *$\mathcal{T}$-Modell*, wenn $\mathcal{R}$ reflexiv ist,
- *$\mathcal{S4}$-Modell*, wenn $\mathcal{R}$ reflexiv und transitiv (also eine Prä- oder Quasi-Ordnung) ist,
- *$\mathcal{S5}$-Modell*, wenn $\mathcal{R}$ reflexiv, transitiv und symmetrisch (also eine Äquivalenzrelation) ist.

Definition

Eine Formel X aus $\mathcal{For}(\mathcal{L}_{MA})$ ist *$\mathcal{K}$-, $\mathcal{T}$-, $\mathcal{S4}$- bzw. $\mathcal{S5}$-gültig*, ($\vDash_{\mathcal{K}} X$, $\vDash_{\mathcal{T}} X$, $\vDash_{\mathcal{S4}} X$, $\vDash_{\mathcal{S5}} X$) wenn für jedes $\mathcal{K}$-, $\mathcal{T}$-, $\mathcal{S4}$- bzw. $\mathcal{S5}$-Modell $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, v \rangle$ und jede $w \in \mathcal{W}$ gilt: $v(X, w) = \mathbf{t}$.

Aufgabe (ohne Nummer)

- Erläutern Sie, in welcher Weise Gültigkeit für $\mathcal{T}$, $\mathcal{S4}$ und $\mathcal{S5}$ von der Gültigkeit in der Aussagenlogik abweicht und in welcher Weise zur Gültigkeit in der Prädikatenlogik in Beziehung steht.

Aufgabe (ohne Nummer)

Beweisen Sie, dass $\Box P \supset P$ $\mathcal{T}$-gültig ist.

Diese Aufgabe ist – “welch Überraschung” eng verwandt zu der Aufgabe über Erfolg im T-Spiel.

Tautologien im System $\mathcal{T}$

Alle $\mathcal{K}$-gültigen Formeln sind $\mathcal{T}$-gültig.

$\mathcal{T}$-gültige Formeln, die nicht $\mathcal{K}$-gültig sind

$\models_{\mathcal{T}} P \supset \Diamond P$

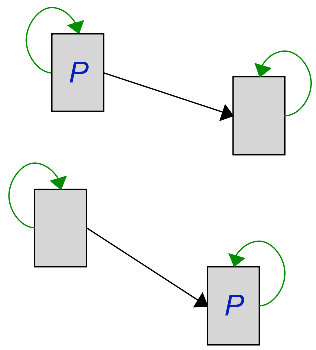
$\models_{\mathcal{T}} \Diamond P \supset \Diamond\Diamond P$

$\models_{\mathcal{T}} \Box P \supset P$

$\models_{\mathcal{T}} \Box\Box P \supset \Box P$

$\models_{\mathcal{T}} \Diamond\Box P \supset \Diamond P$

$\models_{\mathcal{T}} \Box P \supset \Box\Diamond P$



Davon, dass die obigen Formeln nicht $\mathcal{K}$-gültig sind, überzeugt man sich am besten, indem man einen Rahmen mit einer Welt nimmt, von der keine Welt zugänglich ist (auch sie selbst nicht).

Bemerkung zu $\mathcal{T}$-gültigen Formeln

Es gibt Modelle $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, v \rangle$, die keine $\mathcal{T}$-Modelle sind, für die aber trotzdem gilt: für jede $\mathcal{T}$-gültige Formel X aus $\mathcal{For}(\mathcal{L}_{MA})$ und jede $w \in \mathcal{W}$ gilt: $v(X, w) = \mathbf{t}$.

$\models_{\mathcal{T}} P \supset \Diamond P$

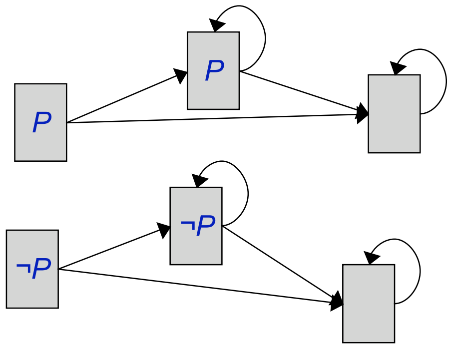
$\models_{\mathcal{T}} \Diamond P \supset \Diamond \Diamond P$

$\models_{\mathcal{T}} \Box P \supset P$

$\models_{\mathcal{T}} \Box \Box P \supset \Box P$

$\models_{\mathcal{T}} \Diamond \Box P \supset \Diamond P$

$\models_{\mathcal{T}} \Box P \supset \Box \Diamond P$



Grundsätzlich lassen sich die Welten dadurch unterscheiden, welche Formeln in ihnen wahr sind und wie sie in die Relation zu anderen Welten stehen. Im allgemeinen wirkt sich die unterschiedliche Einbettung auch dahingehend aus, dass unterschiedliche Formel wahr sind (evtl. gibt es erst Unterschiede bei Formeln mit vielen Modaloperatoren.)

Im obigen Fall gibt es aber Welten, die sich in der relationalen Einbettung unterscheiden, aber nicht in den wahren Formeln.

Entsprechende Aussagen kann man zu den anderen Modallogik-Tyen ebenfalls machen

Tautologien im System $\mathcal{T}$

Alle $\mathcal{K}$-gültigen Formeln sind $\mathcal{T}$-gültig.

$\mathcal{T}$-gültige Formeln, die nicht $\mathcal{K}$-gültig sind

$\models_{\mathcal{T}} P \supset \Diamond P$

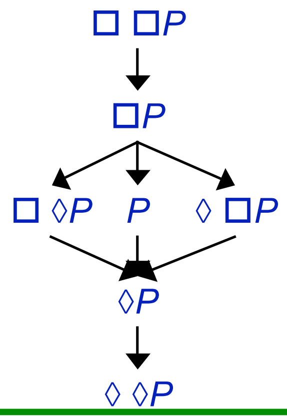
$\models_{\mathcal{T}} \Box P \supset P$

$\models_{\mathcal{T}} \Box \Box P \supset \Box P$

$\models_{\mathcal{T}} \Diamond P \supset \Diamond \Diamond P$

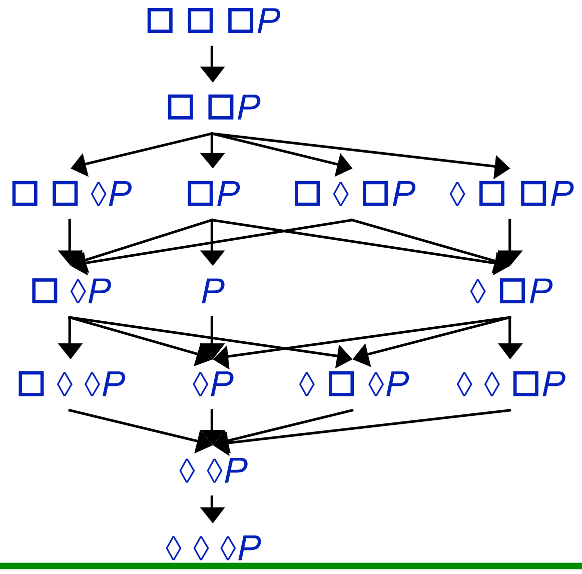
$\models_{\mathcal{T}} \Diamond \Box P \supset \Diamond P$

$\models_{\mathcal{T}} \Box P \supset \Box \Diamond P$



Die (positiven) Modalitäten lassen sich partiell ordnen.

Partielle Ordnung Iterierter Modalitäten in $\mathcal{T}$



Iterierte Modalitäten

- $\mathcal{L}_{MA}$ erlaubt die beliebig lange Zeichenketten von Modalitätssymbolen
- Fraglich ist, welche dieser Ketten unterschieden werden sollen bzw. können. Oder anders ausgedrückt: Wenn für die Modalitätsoperatoren gewisse Bedeutungen intendiert sind, sind dann die Ketten von Modalitäten die äquivalent sind auch in ihrer Bedeutung als äquivalent intendiert.

  Beispiel: Ist in einer temporalen Zeitlogik intendiert,

  - dass *FFp* und *Fp* das gleiche „bedeuten“ oder nicht?
  - Sollen *GFp* und *Gp* bedeutungsgleich sein?

Das $\mathcal{S4}$- und das $\mathcal{S5}$-Spiel

Modifikationen beim Setting

Die MitspielerInnen müssen im Hinblick auf Berücksichtigung / Sichtbarkeit zusätzliche Bedingungen erfüllen:

$\mathcal{S4}$-Spiel: Reflexivität und Transitivität

$\mathcal{S5}$-Spiel: Reflexivität, Transitivität und Symmetrie

$\mathcal{S4}$	$\mathcal{S4}$	$\mathcal{S5}$
P	P	P
$\Box P$	$\Diamond P$	$\Diamond P$
$\Box \Box P$	$\Box \Diamond P$	$\Box \Diamond P$
$\Box P \supset \Box \Box P$	$\Diamond P \supset \Box \Diamond P$	$\Diamond P \supset \Box \Diamond P$

- Eine Formel ist $\mathcal{S4}$- bzw. $\mathcal{S5}$ -erfolgreich, wenn sie bei jedem Setting (mit beliebigen SpielerInnen) am Ende von allen SpielerInnen durch Handheben bestätigt wird.

Gültigkeit in $\mathcal{S4}$

Alle $\mathcal{T}$-gültigen Formeln sind $\mathcal{S4}$-gültig.

$\mathcal{S4}$-gültige Formeln, die nicht $\mathcal{T}$-gültig sind

$\models_{S4} \Box P \supset \Box \Box P$

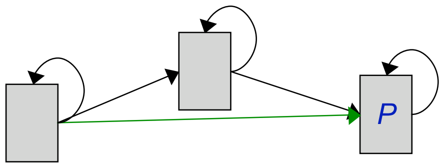
$\models_{S4} \Diamond \Diamond P \supset \Diamond P$

$\models_{S4} \Box \Box P \equiv \Box P$

$\models_{S4} \Diamond \Diamond P \equiv \Diamond P$

$\models_{S4} \Box \Diamond \Box \Diamond P \equiv \Box \Diamond P$

$\models_{S4} \Diamond \Box \Diamond \Box P \equiv \Diamond \Box P$



Gültigkeit in $\mathcal{S4}$

Alle $\mathcal{T}$-gültigen Formeln sind $\mathcal{S4}$-gültig.
$\mathcal{S4}$-gültige Formeln, die nicht $\mathcal{T}$-gültig sind

$\models_{S4} \Box P \supset \Box \Box P$

$\models_{S4} \Diamond \Diamond P \supset \Diamond P$

$\models_{S4} \Box \Box P \equiv \Box P$

$\models_{S4} \Diamond \Diamond P \equiv \Diamond P$

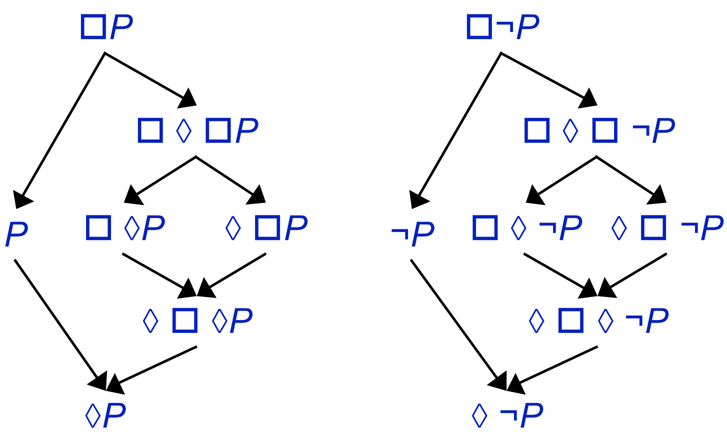
$\models_{S4} \Box \Diamond \Box \Diamond P \equiv \Box \Diamond P$

$\models_{S4} \Diamond \Box \Diamond \Box P \equiv \Diamond \Box P$

Ermöglichen Reduktionen von Modalitäten

Partielle Ordnung Iterierter Modalitäten in $S4$

In $S4$ gibt es insgesamt 14 unterscheidbare Modalitäten



Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik 10 – 40

Aufgabe 10-1

Zeigen Sie, dass die 7 positiven Modalitäten tatsächlich verschieden sind.

Geben Sie dafür jeweils einen S4-Rahmen und eine mögliche Welt darin an, so dass

a) P für die mögliche Welt wahr ist, und $\Box P$ falsch ist

b) $\Diamond P$ für die mögliche Welt wahr ist, und P falsch ist

c) $\Diamond P$ für die mögliche Welt wahr ist, und $\Diamond\Box\Diamond P$ falsch ist

d) $\Box\Diamond\Box P$ für die mögliche Welt wahr ist, und $\Box P$ falsch ist

e) $\Diamond\Box\Diamond P$ für die mögliche Welt wahr ist, und $\Box\Diamond P$ falsch ist

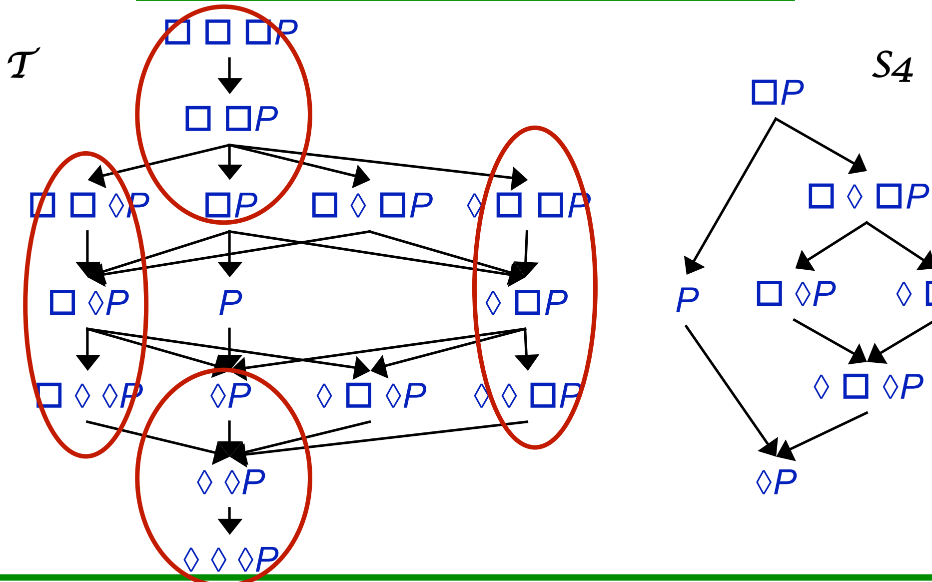
f) $\Diamond\Box\Diamond P$ für die mögliche Welt wahr ist, und $\Diamond\Box P$ falsch ist

g) $\Box\Diamond P$ wahr ist, und $\Box\Diamond\Box P$ falsch ist

h) $\Diamond\Box P$ für die mögliche Welt wahr ist, und $\Box\Diamond\Box P$ falsch ist

Hinweis: Verschiedene Teilaufgaben können Sie unter Umständen mit demselben Rahmen lösen.

Partielle Ordnung Iterierter Modalitäten in $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}4$



Iterierte Modalitäten

- $\mathcal{L}_{\mathrm{MA}}$ erlaubt die beliebig lange Zeichenketten von Modalitätssymbolen
- Fraglich ist, welche dieser Ketten unterschieden werden sollen bzw. können. Oder anders ausgedrückt: Wenn für die Modalitätsoperatoren gewisse Bedeutungen intendiert sind, sind dann die Ketten von Modalitäten die äquivalent sind auch in ihrer Bedeutung als äquivalent intendiert.

  Beispiel: Ist in einer temporalen Zeitlogik intendiert,

  - dass *FFp* und *Fp* das gleiche „bedeuten“ oder nicht?
  - Sollen *GFp* und *Gp* bedeutungsgleich sein?

Gültigkeit in $S5$

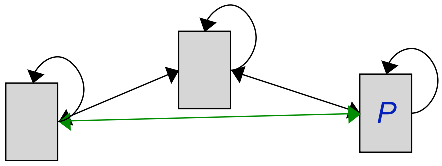
Alle $S4$-gültigen Formeln sind $S5$-gültig.
$S5$-gültige Formeln, die nicht $S4$-gültig sind

$\vDash_{S5} \Diamond P \supset \Box \Diamond P$

$\vDash_{S5} \Diamond \Box P \supset \Box P$

$\vDash_{S5} \Box \Diamond P \equiv \Diamond P$

$\vDash_{S5} \Diamond \Box P \equiv \Box P$



Aufgabe 10-2

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Formeln Tautologien des Systems $S5$ sind.

$\vDash_{S5} \Diamond P \supset \Box \Diamond P$

$\vDash_{S5} \Diamond \Box P \supset \Box P$

Gültigkeit in $\mathcal{S5}$

Alle $\mathcal{S4}$-gültigen Formeln sind $\mathcal{S5}$-gültig.
$\mathcal{S5}$-gültige Formeln, die nicht $\mathcal{S4}$-gültig sind

$\models_{\mathcal{S5}} \Diamond P \supset \Box \Diamond P$

$\models_{\mathcal{S5}} \Diamond \Box P \supset \Box P$

$\models_{\mathcal{S5}} \Box \Diamond P \equiv \Diamond P$

$\models_{\mathcal{S5}} \Diamond \Box P \equiv \Box P$

Ermöglichen Reduktionen von Modalitäten

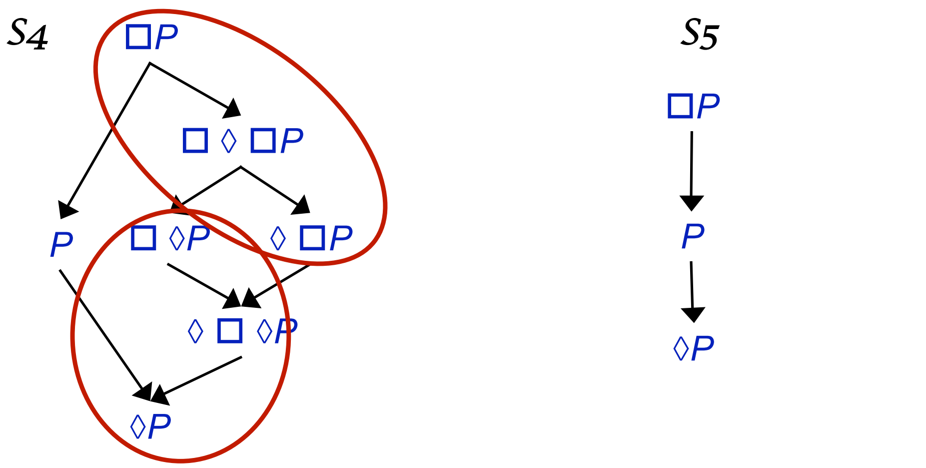
Partielle Ordnung Iterierter Modalitäten in $\mathcal{S}5$

In $\mathcal{S}5$ gibt es insgesamt 6 unterscheidbare Modalitäten

- Iteration von Modalitäten ist unerheblich

$$\begin{tikzcd} \Box P \arrow[d] & \Box\neg P \arrow[d] \\ P \arrow[d] & \neg P \arrow[d] \\ \Diamond P & \Diamond\neg P \end{tikzcd}$$

Partielle Ordnung Iterierter Modalitäten in $S4$ und in $S5$



Verschiedenheit von $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S4}$ und $\mathcal{S5}$

$\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S4}$ und $\mathcal{S5}$ sind verschieden

Begründung

- Es gibt $\mathcal{T}$-gültige Sätze, die nicht $\mathcal{K}$-gültig sind.
- Es gibt $\mathcal{S4}$-gültige Sätze, die nicht $\mathcal{T}$-gültig sind.
- Es gibt $\mathcal{S5}$-gültige Sätze, die nicht $\mathcal{S4}$-gültig sind.

$\mathcal{T}$ hat abzählbar unendlich viele Modalitäten

Begründung

$\Box^n P \supset \Box^{n+m} P$ ist nicht $\mathcal{T}$-gültig.

$\mathcal{T}aut(\mathcal{K}) \subsetneq \mathcal{T}aut(\mathcal{T}) \subsetneq \mathcal{T}aut(\mathcal{S4}) \subsetneq \mathcal{T}aut(\mathcal{S5})$

Charakteristische Formelschemata

Formelschemata korrespondieren zu Eigenschaften von $\mathcal{R}$

- $\mathcal{Ref} = \{\Box F \supset F \mid F \in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{\text{MA}})\}$
- $\mathcal{Trans} = \{\Box F \supset \Box\Box F \mid F \in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{\text{MA}})\}$
- $\mathcal{Sym} = \{F \supset \Box\Diamond F \mid F \in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{\text{MA}})\}$

Wenn $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ ein (mono-)modallogischer Rahmen ist:

- $\models_{\mathcal{T}} X$ gdw. $\mathcal{Ref} \models_{\mathcal{K}} X$
- $\models_{\mathcal{S4}} X$ gdw. $\mathcal{Ref} \cup \mathcal{Trans} \models_{\mathcal{K}} X$
- $\models_{\mathcal{S5}} X$ gdw. $\mathcal{Ref} \cup \mathcal{Trans} \cup \mathcal{Sym} \models_{\mathcal{K}} X$

Es gibt aber noch viel mehr (nützliche) Systeme

normale (mono-) Modallogische Systeme

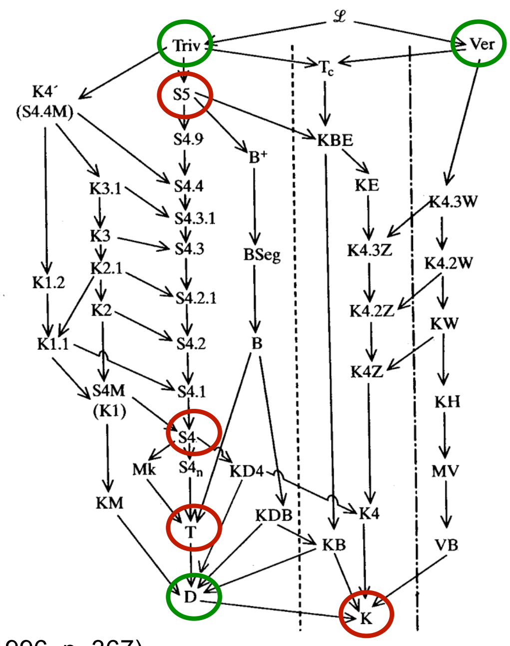
Alle Theorem der Systeme an den Pfeilspitzen sind auch Theoreme der Systeme an den Pfeilenden.

Charakteristische Formeln

$\mathcal{D}: \Box F \supset \Diamond F$

$\mathcal{Triv}: F \equiv \Box F$

$\mathcal{Ver}: \Box F$



G.E. Hughes & M.J. Cresswell (1996, p. 367)

- G.E. Hughes & M.J. Cresswell (1996): *A new introduction to modal logic*. Routledge, London & New York

Modallogik als Fragment der Prädikatenlogik

- Es sei $\mathcal{L}_{MA}$ eine modallogische Sprache mit
  - den Aussagensymbolen $\mathcal{As}(\mathcal{L}_{MA}) = \{A_i \mid 1 \leq i \leq m\}$
  - und den Modaloperatoren $\mathcal{Mod}(\mathcal{L}_{MA}) = \{\Box_i, \Diamond_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.
- Dann gibt es
  - eine prädikatenlogische Sprache $\mathcal{L}_{PL}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{C})$ mit $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F} = \{\}$ und $\boldsymbol{R} = \{P_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{R_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, wobei die P_i einstellige und die R_i zweistellige Relationssymbole sind,
  - und eine Übersetzungsfunktion ϕ: $\mathcal{Var}(\mathcal{L}_{PL}) \times \mathcal{For}(\mathcal{L}_{MA}) \rightarrow \mathcal{For}(\mathcal{L}_{PL})$, die eine Variable x und eine modallogische Formel auf eine prädikatenlogische Formel abbildet, in der genau die Variable x frei vorkommt,
- so dass $F \in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{MA})$ genau dann gültig ist, wenn $\phi(x, F)$ gültig ist

Übersetzung in Prädikatenlogik

Übersetzungsfunktion ϕ: $\mathcal{Var}(\mathcal{L}_{PL}) \times \mathcal{For}(\mathcal{L}_{MA}) \rightarrow \mathcal{For}(\mathcal{L}_{PL})$

- bildet eine Variable x und eine modallogische Formel auf eine prädikatenlogische Formel ab, in der maximal die Variable x frei vorkommt

Induktive Definition von ϕ

$\phi(x, A_i) = P_i(x)$

$\phi(x, \top) = \top$

$\phi(x, \bot) = \bot$

$\phi(x, \neg C) = \neg\phi(x, C)$

$\phi(x, C \odot D) = \phi(x, C) \odot \phi(x, D)$

$\phi(x, \Box_i C) = (\forall y)\,(R_i(x, y) \supset \phi(y, C))$

$\phi(x, \Diamond_i D) = (\exists y)\,(R_i(x, y) \wedge \phi(y, D))$

Dabei sei y eine Variable, die von x verschieden ist

Beispielübersetzungen

$\phi(x, \Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B))$
$= \phi(x, \Box (A \supset B)) \supset \phi(x, (\Box A \supset \Box B))$
$= \phi(x, \Box (A \supset B)) \supset (\phi(x, \Box A) \supset \phi(x, \Box B))$
$= (\forall y) (\mathrm{R}(x, y) \supset \phi(y, A \supset B)) \supset$
$((\forall y) (\mathrm{R}(x, y) \supset \phi(y, A)) \supset (\forall y) (\mathrm{R}(x, y) \supset \phi(y, B)))$
$= (\forall y) (\mathrm{R}(x, y) \supset (P(y) \supset Q(y))) \supset$
$((\forall y) (\mathrm{R}(x, y) \supset P(y)) \supset (\forall y) (\mathrm{R}(x, y) \supset Q(y)))$

Eine gültige Formel

Beispielübersetzungen

$\phi(x, \Box A \supset \Box\Box A)$

$= \phi(x, \Box A) \supset \phi(x, \Box\Box A)$

$= (\forall y)\ (\mathrm{R}(x, y) \supset \phi(y, A)) \supset (\forall y)\ (\mathrm{R}(x, y) \supset \phi(y, \Box A))$

$= (\forall y)\ (\mathrm{R}(x, y) \supset \phi(y, A)) \supset (\forall y)\ (\mathrm{R}(x, y) \supset$
$\quad (\forall z)\ (\mathrm{R}(y, z) \supset \phi(z, A)))$

$= (\forall y)\ (\mathrm{R}(x, y) \supset P(y)) \supset (\forall y)\ (\mathrm{R}(x, y) \supset$
$\quad (\forall z)\ (\mathrm{R}(y, z) \supset P(z)))$

Gültig bei Einschränkung auf transitive Relationen R

Übersetzung in Prädikatenlogik: Beobachtungen

Die Übersetzung von $\mathcal{L}_{\mathbf{MA}}$

- kommt insgesamt mit zwei Variablen aus
- verwendet keine Konstanten oder Funktionssymbole

➢zwei-Variablen-Fragment der Prädikatenlogik (FO^2)

- FO^2 erlaubt nur Formeln mit maximal zwei Variablen
  - Variablen dürfen wiederverwendet werden
  - Alle Terme sind Variablen.

Beispiel

$(\forall x)\ (\forall y)\ (R(x, y) \supset R(y, x))$

Gegenbeispiel

$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((R(x, y) \land R(y, z)) \supset R(x, z))$

Zur Erinnerung: Modelle der Prädikatenlogik

Definition 5.3.1 (Modell)

- (hier angepasst auf eingeschränktes Vokabular)

Ein PL-*Modell*: $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, wobei

- $\mathcal{D}$ ist eine beliebige, nicht leere Menge (*Grundmenge, Domäne*),
- $\mathcal{I}$ ist eine Abbildung (*Interpretation*), die folgendes leistet:
  - für jedes $P_i \in \mathcal{R}el_1(\mathcal{L}_{PL})$ ist $\mathcal{I}(P_i) \subseteq \mathcal{D}$ eine Menge
  - für jedes $R_i \in \mathcal{R}el_2(\mathcal{L}_{PL})$ ist $\mathcal{I}(R_i) \subseteq \mathcal{D}^2$ eine 2-stellige Relation

Definition 5.3.2 (Zuweisung, Belegung)

Eine Belegung oder *Zuweisung* in ein Modell $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ ist eine Abbildung $\mathcal{A}$: $\mathcal{V}ar(\mathcal{L}_{PL}) \rightarrow \mathcal{D}$

Korrespondenz zwischen Modelltypen

Sei $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ ein PL-Modell

- Das korrespondierende modallogisches Modell $\mathcal{M}^* = \langle\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \rangle, \nu \rangle$ ist
  - $\mathcal{W} = \mathcal{D}$
    - $\mathcal{R}_i = \mathcal{I}(R_i)$, für alle i
    - $\nu(A_i, w) = t$ gdw. $w \in \mathcal{I}(P_i)$ und sonst $\nu(A_i, w) = f$, für alle i

Sei $\mathcal{M}^* = \langle\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \rangle, \nu \rangle$ ein modallogisches Modell

- Das korrespondierende PL-Modell: $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ ist
  - $\mathcal{D} = \mathcal{W}$
    - $\mathcal{I}(R_i) = \mathcal{R}_i$, für alle i
    - $\mathcal{I}(P_i) = \{w \in \mathcal{W} \mid \nu(A_i, w) = t \}$, für alle i

Gültigkeit und Übersetzung

Theorem (Gabbay 1981)

- Sei $\mathcal{L}_{\text{MA}}$ eine modallogische Sprache, $F \in \mathcal{F}or(\mathcal{L}_{\text{MA}})$, x eine Variable und ϕ eine Übersetzungsabbildung wie oben definiert. Dann gilt:
- Für jedes modallogische Modell $\mathcal{M}^* = \langle\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n\rangle, v\rangle$ und das korrespondierende PL-Modell $\mathcal{M}$:
  - F ist genau dann wahr in $w \in \mathcal{W}$ (bzgl. $\mathcal{M}^*$), wenn $\phi(x, F) \in \mathcal{F}or(\mathcal{L}_{\text{PL}})$ wahr ist in $\langle\mathcal{M}, \mathcal{A}\rangle$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(x) = w$
- $\models_{\mathcal{K}} F$ genau dann, wenn $\models \phi(x, F)$

- Gültigkeit von offenen prädikatenlogischen Formel heißt wahr in allen (passenden) Modellen und unter allen Belegungen.
- Gabbay, D. (1981). Expressive functional completeness in tense logic. In U. Mönnich (ed.) Aspects of Philosophical Logic (pp. 91–117). Reidel: Dordrecht.
- zitiert nach: Vardi, Moshe Y. (1997). Why is modal logic so robustly decidable? In: Descriptive Complexity and Finite Models: Proceedings of a DIMACS Workshop, January 14-17, 1996, number 31 in DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science (pp. 149-184). American Math. Society.
- Erhältlich über citeseer.ist.psu.edu/vardi97why.html oder http://cs-tr.cs.rice.edu/Dienst/UI/2.0/Describe/ncstrl.rice_cs/TR97-274

Modallogik und Prädikatenlogik

Korrespondenz-Ebenen

- formale Sprache (zur Repräsentation)
  - Sprache der modalen Aussagenlogik vs. 2-Variablenfragment der Prädikatenlogik (mit max. 2-stelligen Relationssymbolen)
  - ➢ Übersetzungsfunktion ϕ (eine Richtung !)
- Evaluations- / Interpretationsprinzipien
  - modallogische Rahmen vs. prädikatenlogische Modelle
  - ➢ Korrespondenzbeziehung (beide Richtungen)
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
  - ➢ Theorem (Gabbay) zur Gleichwertigkeit der Gültigkeit von modallogischer Formel und prädikatenlogischer Übersetzung
- Ableitungs-, Beweisverfahren

Übersetzung in Prädikatenlogik: Beobachtungen (2)

Die Übersetzung von $\mathcal{L}_{\mathbf{MA}}$

➢zwei-Variablen Fragment der Prädikatenlogik (FO^2)

Theorem (*endliche-Modell-Eigenschaft*)

- Wenn eine FO^2-Formel *F* erfüllbar ist, dann ist sie in einem Modell mit einer endlichen Domäne erfüllbar.

Theorem (Grädel, Kolaitis, Vardi 1997)

- Wenn eine FO^2-Formel *F* erfüllbar ist, dann ist sie in einem Modell mit einer Domäne mit höchstens $2^{|F|}$ Elementen erfüllbar.

Corollar

- Das Erfüllbarkeitsproblem für FO^2 ist entscheidbar.

Corollar

- Das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{L}_{MA}$ ist entscheidbar.

Grädel, Erich, Phokion G. Kolaitis & Moshe Y. Vardi (1997). On the decision problem for two-variable first-order logic. The Bulletin of Symbolic Logic 3. 53--69.

$|F|$: Anzahl der Symbole in F

Unabhängig von dem obigen Ergebnis gilt auch:

Theorem (Vardi 1997, Baum-Modell-Eigenschaft; tree-model property)

Jede erfüllbare modallogische Formel ist in einer Kripke-Struktur, in der die Relationen einen Baum definieren, an der Baumwurzel erfüllbar.

(Solche Bäume können dann zwar unendlich sein, liefern aber gute Ergebnisse wenn man die Komplexität des Entscheidungsproblems betrachtet.)

Allerdings gilt die Übersetzbarkeit in das 2-Variablen-Fragment zunächst nur, wenn alle Modalitäten unär (einstellig) sind. Ein Beispiel für eine mehrstellige Modalität ist (aus dem temporalen Bereich) P gilt solange bis Q gilt. (Vardi 1997 zeigt aber, dass auch dann die Baum-Modell-Eigenschaft noch gelten kann, was für die Entscheidbarkeit wichtig ist.)