Logik & Semantik
11. Vorlesung
Modallogik

Tableau-Kalkül für die modale Aussagenlogik

- Destruktive Verfahren ($\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}4$)
- Markierte Tableaux ($\mathcal{S}5$ und $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}4$)

Entscheidungsverfahren für modale Aussagenlogiken
Modale Tableaux-Kalküle

Corollar (letzter Foliensatz)

- Das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{L}_{MA}$ ist entscheidbar.

Es existieren Entscheidungsverfahren (u.a.) für die aussagenlogischen Modalsysteme $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}4$ und $\mathcal{S}5$

- Tableaux-Verfahren

Tableau-Expansion – Uniforme Notation (Aussagenlogik)

Gegeben ein Tableau *T*

Eine Expansion von *T* ist wie folgt möglich:
Sei Θ ein Zweig aus *T* und *X* ein Nicht-Literal aus Θ.

- Falls $X = \neg\top$, so verlängere Θ um $\bot$
- Falls $X = \neg\bot$, so verlängere Θ um $\top$
- Falls $X = \neg\neg Z$, so verlängere Θ um Z
- Falls *X* eine β-Formel, so verlängere Θ um die Verzweigung $\beta_1 \; \beta_2$
- Falls *X* eine α-Formel, so verlängere Θ um α_1 und um α_2

Tableau-Expansionsregeln

$$\frac{\neg\top}{\bot} \qquad \frac{\neg\bot}{\top} \qquad \frac{\neg\neg Z}{Z} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2} \qquad \frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

Uniforme Notation – Modaloperatoren

Notwendigkeit		Möglichkeit	
υ	υ_0	π	π_0
$\Box P$	P	$\Diamond P$	P
$\neg \Diamond P$	$\neg P$	$\neg \Box P$	$\neg P$

Aufgrund der Dualität gilt

- υ ist äquivalent zu $\Box\ \upsilon_0$
- π ist äquivalent zu $\Diamond\ \pi_0$

Diese Darstellung basiert auf

- Fitting, Melvin (1988). First-order modal tableaux. *Journal of Automated Reasoning, 4*. 191–213.

und

- Fitting, Melvin (1993). Basic Modal Logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, (pp. 365 – 448), Oxford: Clarendon.

Aussagenlogik vs. Aussagenlogische Modallogik

Mit Aussagenlogik

- beschreiben wir eine Welt durch
- Sammlung von Formeln, die in ihr gelten
- ohne Bezugnahme auf Alternativ-Welten

Mit modallogischer Aussagenlogik

- können wir eine Welt in einer Konstellation von Alternativen beschreiben
- in verschiedenen Welten können unterschiedliche Formeln wahr sein

Konsequenz für Tableaux

- Aufbau von verschiedenen Formelmengen zur Beschreibung verschiedener Welten / Alternativen

→Destruktive Tableaux, markierte Tableaux

- Im weiteren werden destruktive Verfahren für einige Modallogiken vorgestellt, um zu zeigen, wie solche destuktiven Verfahren aussehen können.
- Markierte Tableau sind genausogut für diese Modallogiken verwendbar. Solche Verfahren werden im Anschluss vorgestellt.

Tableau-Expansion für Modalitäten – Destruktiv

Gegeben ein Tableau *T*

Eine Expansion von ***T*** ist wie folgt möglich:
Sei Θ ein Zweig aus ***T*** und X ein Nicht-Literal aus Θ.

- $\mathcal{K}, \mathcal{T}$: Falls X eine π-Formel ist, so ersetze Θ durch $< \Theta^*, \pi_0 >$, wobei Θ^* genau die folgenden Formeln hat: $\{\upsilon_0 \mid \upsilon \in \Theta\}$
- $\mathcal{S}4$: Falls X eine π-Formel ist, so ersetze Θ durch $< \Theta^*, \pi_0 >$, wobei Θ^* genau die folgenden Formeln hat: $\{\upsilon, \upsilon_0 \mid \upsilon \in \Theta\}$
- $\mathcal{T}, \mathcal{S}4$: Falls X eine υ-Formel ist, so verlängere Θ um υ_0

Beispiel

- $\Theta = < (X \odot Y), \overset{\upsilon\text{-Formeln}}{\boxed{\Box Z_1, \neg \Diamond Z_2}}, \overset{\pi\text{-Formeln}}{\boxed{\Diamond Z_3, \neg \Box Z_4}} >$
- $\mathcal{K}, \mathcal{T} : \Theta^* = < Z_1, \neg Z_2 >$
- $\mathcal{S}4 : \Theta^* = < \Box Z_1, \neg \Diamond Z_2, Z_1, \neg Z_2 >$

- Die π-Expansionen sollte man möglichst erst dann machen, wenn alle anderen Expansionsmöglichkeiten erschöpft sind, damit man möglichst viel Information schon verwendet hat und 'mitnehmen' kann. Der Übergang zu dem neuen Zweig Θ^* entspricht dem Übergang zu einer anderen, zugänglichen möglichen Welt. Aus der π-Formel weiss man, dass es eine Welt gibt, in der π_0 gilt. Die weitere Information, die man 'mitnehmen' kann, steckt in den ν-Formeln der alten Welt.
- Hat man in einem Zweig mehr als eine π-Formel, dann muss man sich hier entscheiden, welche man wählt. Die andere geht (wegen des destruktiven Charakters der Expansion) verloren ! Findet man im neuen Zweig nun einen Widerspruch (Abschluss), dann hat man damit gezeigt, dass auch der alte Zweig schon widersprüchlich (nicht erfüllbar war). Findet man aber keinen Widerspruch, dann weiss man damit nicht unbedingt, ob der ursprüngliche Zweig erfüllbar ist. Ein Widerspruch kann sich vielleicht bei einer anderen Wahl der π-Expansion ergeben. Bevor endgültig gesagt werden kann, dass die Formel erfüllbar ist, müssen alle Möglichkeiten untersucht werden.

(unmarkierte) destruktive modallogische Tableaux

Gegeben ein Tableau *T*

Abgeschlossenheit

Ein Zweig Θ in ***T*** heißt genau dann *abgeschlossen*,

- wenn es eine Formel X gibt, so dass sowohl X als auch $\neg X$ in Θ auftreten, oder
- wenn $\perp$ in Θ auftritt.
- (implizit auch: wenn Θ durch einen Zweig ersetzt wurde, der (nach weiterer Expansion) abgeschlossen ist.)

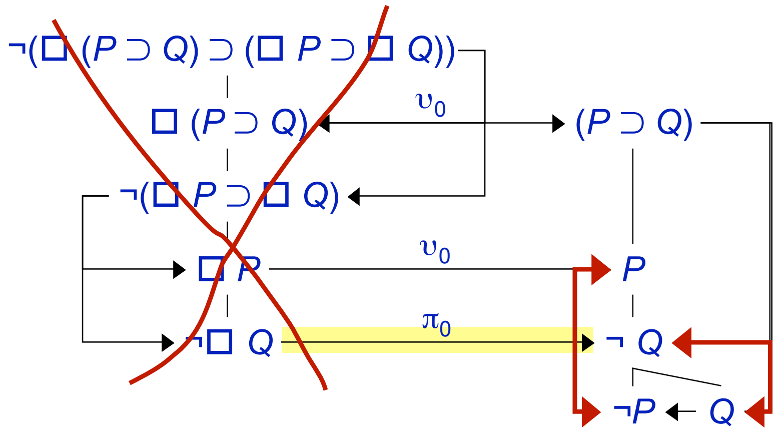
$\Longrightarrow$ Abschluss beruht auf Unerfüllbarkeit in einer erreichbaren Welt.

Ableitbarkeit

Eine Formel F ist im Tableau-System ableitbar, wenn ein Tableau zu $\neg F$ abgeschlossen ist.

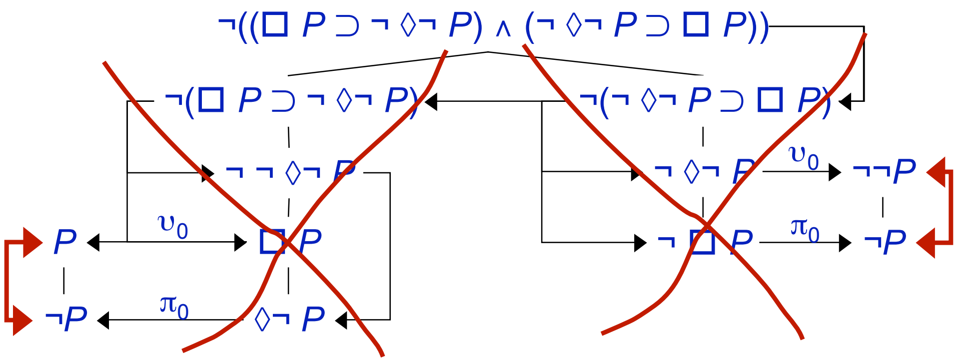
Beispiel in $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$

$\vdash_{mt\mathcal{K}}$ **$\Box(P \supset Q) \supset (\Box P \supset \Box Q)$**



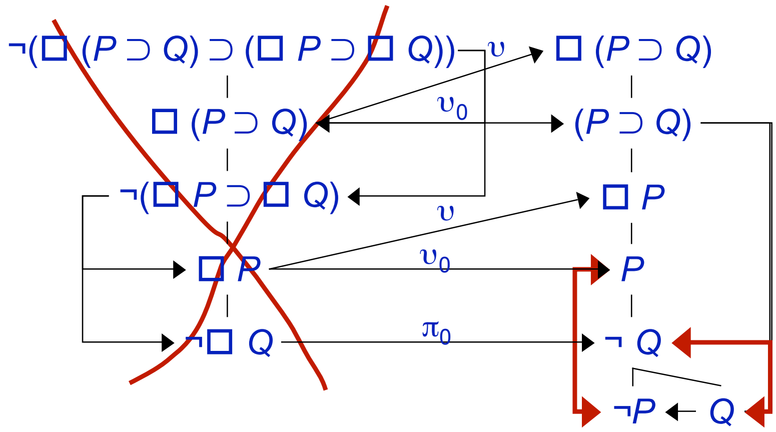
Beispiel in $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$

$\vdash_{mt\mathcal{K}} \boldsymbol{(\Box P \supset \neg \Diamond \neg P) \wedge (\neg \Diamond \neg P \supset \Box P)}$



Beispiel in $S4$

$\vdash_{\mathrm{mt}S4} \Box(P \supset Q) \supset (\Box P \supset \Box Q)$



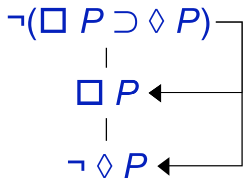
Beispiel in $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}4$

$\vdash_{mt\mathcal{T}} \Box P \supset \Diamond P$

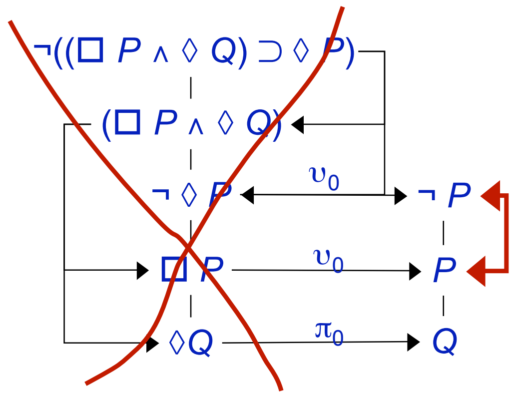
$$\neg(\Box P \supset \Diamond P)$$
$$\Box P$$
$$\neg \Diamond P$$
$$P$$
$$\neg P$$

Beispiel in $\mathcal{K}$

$\nvdash_{mt\mathcal{K}} \Box P \supset \Diamond P$ $\quad\quad$ $\vdash_{mt\mathcal{K}} (\Box P \wedge \Diamond Q) \supset \Diamond P$



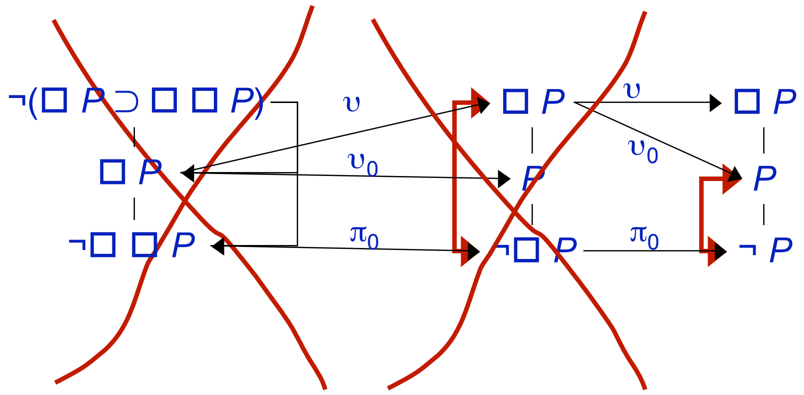
Keine Expansion möglich



- Dass $\Box P \supset \Diamond P$ in $\mathcal{K}$ nicht gilt, hängt damit zusammen, dass es mögliche Welten geben kann, von denen aus keine mögliche Welt zugänglich ist.
- Dieser Zusammenhang wird auch dadurch deutlich, dass in $\mathcal{K}$ $(\Box P \wedge \Diamond Q) \supset \Diamond P$ gilt, denn $\Diamond Q$ sichert gewissermaßen zu, dass eine Welt zugänglich ist. Dann gilt auch, dass alles was notwendig ist, auch möglich ist.

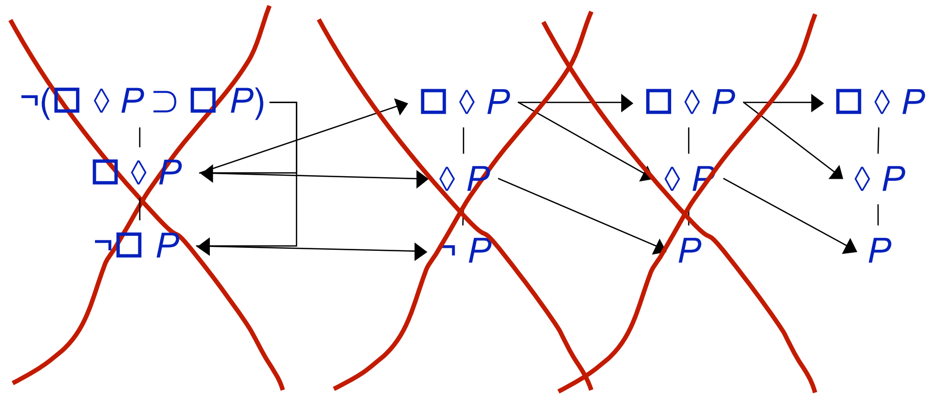
Beispiel in $S4$

$\vdash_{\mathrm{mt}S4} \Box P \supset \Box\Box P$



Beispiel in $S4$

$\vdash_{\mathrm{mt}S4}$ $\Box \Diamond P \supset \Box P$??



- Der Tableau-Beweiser kann hier in eine Schleife geraten, in der er immerwieder denselben Zweig durch sich selbst ersetzt. Diese Schleifen sind aber relativ leicht zu erkennen, wenn man darauf achtet. Bezogen auf die Zugänglichkeitsrelation in den modallogischen Rahmen entsprechen die Zyklen in der Zugänglichkeitsrelation Wiederholungen von Zweigen.

Symmetrische Zugänglichkeit: $\mathcal{S}5$

- Mit dem Verfahren, das wir für $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}4$ dargestellt haben, lässt sich die Symmetriebedingung nicht fassen.
- Für $\mathcal{S}5$ (Zugänglichkeit ist Äquivalenzrelation) können Tableaux mit Markierungen eingesetzt werden.
- Als Markierungen verwenden wir natürliche Zahlen, die für die möglichen Welten stehen.

Expansionsregeln

- **k** frei wählbar, **m** neu im Zweig

$$\frac{\mathbf{n}\ \neg\top}{\mathbf{n}\ \bot} \qquad \frac{\mathbf{n}\ \neg\bot}{\mathbf{n}\ \top} \qquad \frac{\mathbf{n}\ \neg\neg Z}{\mathbf{n}\ Z} \qquad \frac{\mathbf{n}\ \beta}{\mathbf{n}\ \beta_1 \mid \mathbf{n}\ \beta_2} \qquad \frac{\mathbf{n}\ \alpha}{\begin{array}{c}\mathbf{n}\ \alpha_1\\ \mathbf{n}\ \alpha_2\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{n}\ \upsilon}{\mathbf{k}\ \upsilon_0} \qquad \frac{\mathbf{n}\ \pi}{\mathbf{m}\ \pi_0}$$

In diesem Ansatz werden die Informationen über die verschiedenen von der ursprünglich gewählten Welt zugänglichen Welten innerhalb eines Tableau-Zweigs gesammelt. Da bei S5 die Zugänglichkeitsrelation eine Äquivalenzrelation ist, müssen die Informationen über die verschiedenen Nachbar-Welten auch nicht gegen einander abgeschottet weden. Egal, weshalb die Welt erzeugt wurde, ich kann Information aus den υ-Formeln jeder anderen Welt transferieren.

Tableau-Expansion für Modalitäten in $S5$

Gegeben ein Tableau *T*

Abgeschlossenheit

Ein Zweig Θ in Tableau ***T*** heißt genau dann *abgeschlossen*,

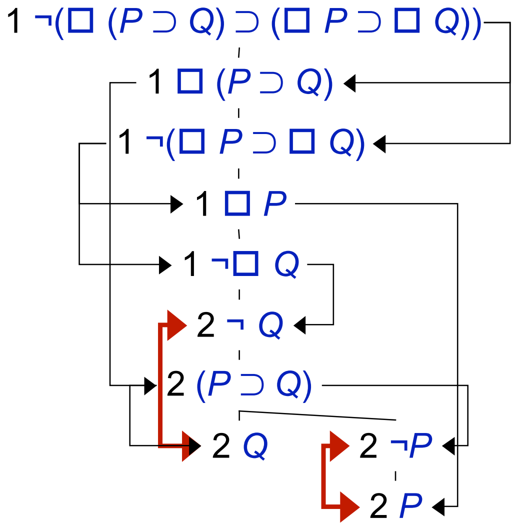
- wenn es eine Formel *X* und eine Markierung **n** gibt, so dass sowohl **n** *X* als auch **n** ¬*X* in Θ auftreten, oder
- wenn **n** ⊥ in Θ auftritt.

⟹Abschluss beruht auf Unerfüllbarkeit in einer erreichbaren Welt.

Ableitbarkeit

Eine Formel *F* ist im Tableau-System ableitbar, wenn ein Tableau zu **1** ¬*F* abgeschlossen ist.

Beispiel in $\mathcal{S}5$: $\vdash_{mt\mathcal{S}5} \Box (P \supset Q) \supset (\Box P \supset \Box Q)$



Beispiel in $\mathcal{S}5$: $\vdash_{mt\mathcal{S}5} \Diamond \Box P \supset \Box P$

1 $\neg(\Diamond \Box P \supset \Box P)$

1 $\Diamond \Box P$

1 $\neg \Box P$

2 $\Box P$

3 $\neg P$

3 P

Tableau-Expansion für Modalitäten – nicht Destruktiv

Gegeben ein Tableau *T*

Eine Expansion von ***T*** ist wie folgt möglich.

- Als Markierungen verwenden wir Sequenzen (**s**) von natürliche Zahlen, die für die möglichen Welten stehen.

Expansionsregeln

- **k** frei wählbar, **m** neu im Zweig, **r**, **s** beliebige Sequenz

$$\frac{\mathbf{s}\ \neg\top}{\mathbf{s}\ \bot} \qquad \frac{\mathbf{s}\ \neg\bot}{\mathbf{s}\ \top} \qquad \frac{\mathbf{s}\ \neg\neg Z}{\mathbf{s}\ Z} \qquad \frac{\mathbf{s}\ \beta}{\mathbf{s}\ \beta_1 \mid \mathbf{s}\ \beta_2} \qquad \frac{\mathbf{s}\ \alpha}{\begin{array}{c}\mathbf{s}\ \alpha_1\\ \mathbf{s}\ \alpha_2\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{s}\ \pi}{\mathbf{s.m}\ \pi_0}$$

$\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$	$\mathcal{T}$, $\mathcal{S}4$	$\mathcal{S}4$	$\mathcal{S}5$
$\dfrac{\mathbf{s}\ \nu}{\mathbf{s.k}\ \nu_0}$	$\dfrac{\mathbf{s}\ \nu}{\mathbf{s}\ \nu_0}$	$\dfrac{\mathbf{s}\ \nu}{\mathbf{s.k}\ \nu}$	$\dfrac{\mathbf{s}\ \nu}{\mathbf{r}\ \nu_0}$

- Bei dieser Fassung ist die Reihenfolge der Expansionen wieder egal.
- Die Einführung einer neuen Markierung entspricht der Einführung einer neuen, zugänglichen möglichen Welt.

Tableau-Expansion für Modalitäten

Gegeben ein Tableau *T*

Abgeschlossenheit

Ein Zweig Θ in Tableau ***T*** heißt genau dann *abgeschlossen*,

- wenn es eine Formel *X* und eine Markierung **s** gibt, so dass sowohl **s** *X* als auch **s** ¬*X* in Θ auftreten, oder
- wenn **s** ⊥ in Θ auftritt.

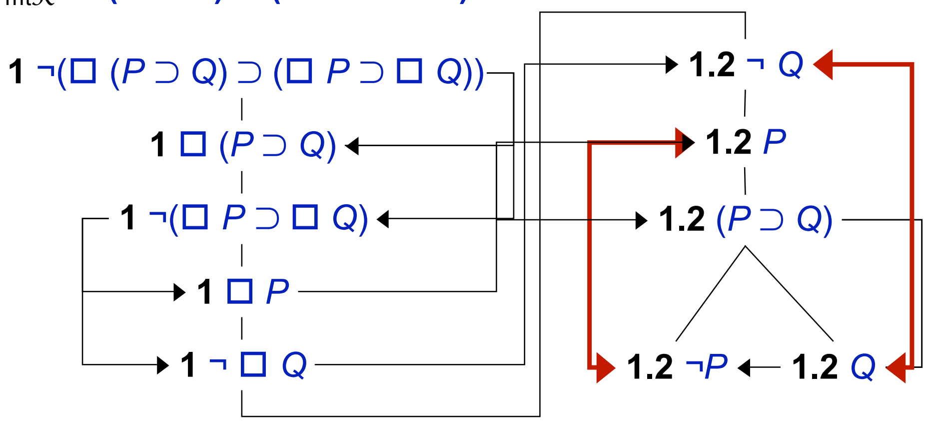
⇒Abschluss beruht auf Unerfüllbarkeit in einer erreichbaren Welt.

Ableitbarkeit

Eine Formel *F* ist im Tableau-System ableitbar, wenn ein Tableau zu **1** ¬*F* abgeschlossen ist.

Beispiel in $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$

$\vdash_{mt\mathcal{K}} \Box (P \supset Q) \supset (\Box P \supset \Box Q)$



Beispiel in $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$

$\vdash_{mt\mathcal{K}} (\Box P \supset \neg \Diamond \neg P) \wedge (\neg \Diamond \neg P \supset \Box P)$

$1\ \neg((\Box P \supset \neg \Diamond \neg P) \wedge (\neg \Diamond \neg P \supset \Box P))$

$1\ \neg(\Box P \supset \neg \Diamond \neg P)$

$1\ \neg \neg \Diamond \neg P$

$1\ \Box P$

$1\ \Diamond \neg P$

$1.2\ \neg P$

$1.2\ P$

$1\ \neg(\neg \Diamond \neg P \supset \Box P)$

$1\ \neg \Diamond \neg P$

$1\ \neg \Box P$

$1.3\ \neg P$

$1.3\ \neg\neg P$

Beispiel in $\mathcal{K}$

$\nvdash_{mt\mathcal{K}} \Box P \supset \Diamond P$

1 $\neg(\Box P \supset \Diamond P)$

1 $\Box P$

1 $\neg \Diamond P$

Keine Expansion möglich

$\vdash_{mt\mathcal{K}} (\Box P \wedge \Diamond Q) \supset \Diamond P$

1 $\neg((\Box P \wedge \Diamond Q) \supset \Diamond P)$

1 $(\Box P \wedge \Diamond Q)$

1 $\neg \Diamond P$

1 $\Box P$

1 $\Diamond Q$

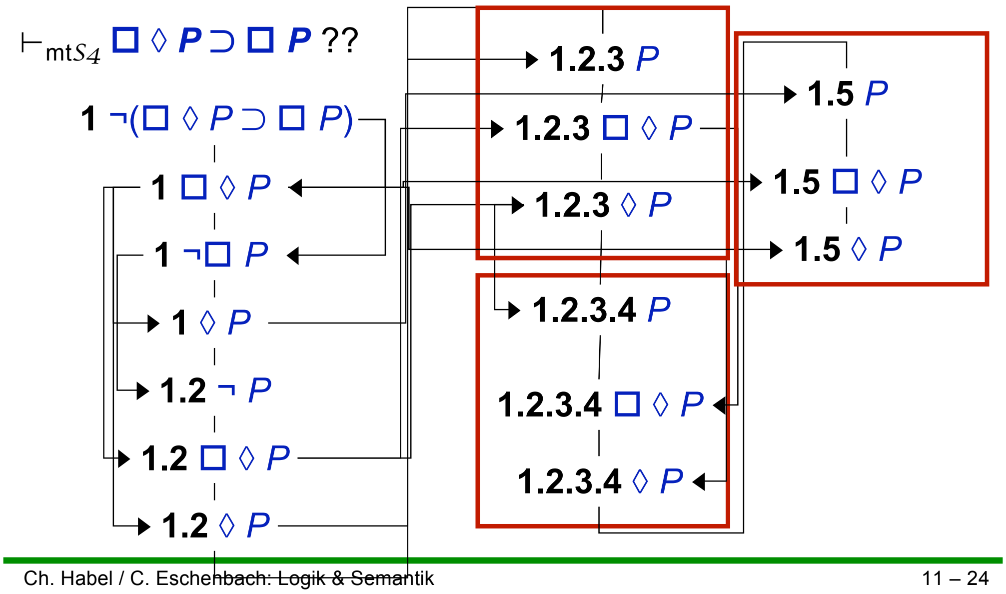
1.2 Q

1.2 $\neg P$

1.2 P

- Dass $\Box P \supset \Diamond P$ in $\mathcal{K}$ nicht gilt, hängt damit zusammen, dass es mögliche Welten geben kann, von denen aus keine mögliche Welt zugänglich ist.
- Dieser Zusammenhang wird auch dadurch deutlich, dass in $\mathcal{K}$ $(\Box P \wedge \Diamond Q) \supset \Diamond P$ gilt, denn $\Diamond Q$ sichert gewissermaßen zu, dass eine Welt zugänglich ist. Dann gilt auch, dass alles was notwendig ist, auch möglich ist.

Beispiel in $S4$



- Der Tableau-Beweiser kann hier in eine Schleife geraten, in der er immer wieder dieselben Formelmengen verschiedenen Markierungen zuordnet. Diese Schleifen sind aber relativ leicht zu erkennen, wenn man darauf achtet. Bezogen auf die Zugänglichkeitsrelation in den modallogischen Rahmen entspechen die Wiederholungen Zyklen in der Zugänglichkeitsrelation.

Beispiel in $\mathcal{S}4$

$\vdash_{\mathrm{mt}\mathcal{S}4} \Box\Diamond P \supset \Box P$??

1 $\neg(\Box\Diamond P \supset \Box P)$

1 $\Box\Diamond P$

1 $\neg\Box P$

1 $\Diamond P$

1.2 $\neg P$

1.2 $\Box\Diamond P$

1.2 $\Diamond P$

1.2.3 P

1.2.3 $\Box\Diamond P$

1.2.3 $\Diamond P$

1.2.3.4 P

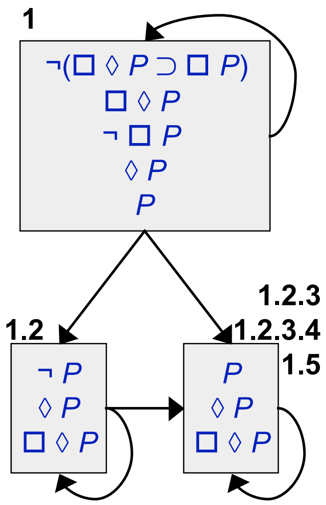
1.2.3.4 $\Box\Diamond P$

1.2.3.4 $\Diamond P$

1.5 P

1.5 $\Box\Diamond P$

1.5 $\Diamond P$



Ch. Habel / ~~C. Eschenbach~~: Logik & Semantik 11 – 25

- Auf der rechten Seite ist ein modallogischer (S4)-Rahmen angedeutet, der ein Gegenbeispiel für $\Box\Diamond P \supset \Box P$ darstellt.
- In den vorgestellten Systemen gerät der Tableau-Beweiser früher oder später zwangsläufig in die vorgestellten Schleifen, denn alle Formeln, die jemals erzeugt werden, sind ‚kleiner' als die Eingangsfomel. Damit können nur endlich viele Formeln im Tableau auftreten, womit sich die Formelmengen, die den Markierungen zugeordnet werden, irgendwann wiederholen müssen.
- Bei der Implementation muss man also entsprechende Wiederholungen überprüfen und kann die π-Expansion blockieren, wenn bei einer anderen Markierung mit derselben Formelmenge, schon die Expansion vorgenommen wurde.

Modallogik fürs Schließen über Wissen

Vereinfachtes wise-men puzzle

- Hans und Maria sind ausgezeichnete LogikerInnen. Sie wissen, dass *zwei rote* Hüte und *ein blauer* Hut vorhanden sind [und sie wissen, dass sie beide dies wissen]. Der König setzt beiden einen Hut auf. Hans sieht den Hut von Maria. [Das weiß Maria auch.] Die beiden dürfen nicht direkt kommunizieren. Der König fragt– erst Hans, dann Maria –, was für einen Hut sie auf dem Kopf haben.
- Angenommen Hans sagt: Ich weiß es nicht [und Maria hört das.] Warum kann Maria die richtige Antwort geben?

Vereinfachtes wise-men puzzle

- Hans und Maria haben einen Hut auf.
- Beide wissen, dass *zwei rote* Hüte und *ein blauer* Hut vorhanden sind [und sie wissen, dass sie beide dies wissen].

K_H (R-H ∨ R-M)

- Hans sieht den Hut von Maria. [und Maria weiß das.]

K_H R-M ∨ K_H ¬R-M

- Der König fragt Hans, was für einen Hut er auf dem Kopf hat.
- Hans sagt: Ich weiß es nicht. [und Maria hört das.]

¬K_H R-H ∧ ¬K_H ¬R-H

- Warum kann Maria die richtige Antwort geben?

{K_H (R-H ∨ R-M), K_H R-M ∨ K_H ¬R-M, ¬K_H R-H ∧ ¬K_H ¬R-H} $\vdash_{mt\mathcal{T}}$ R-M

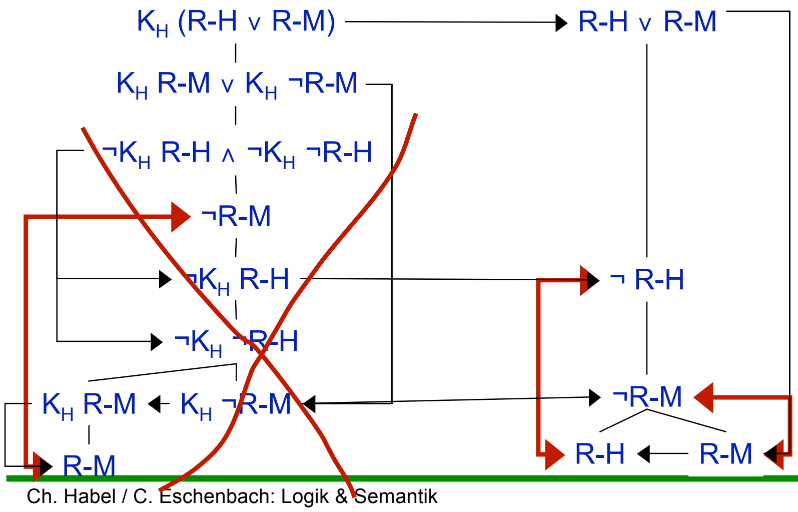
Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik 11 – 27

- Dargestellt ist dass, was Maria über Hans' Wissen weiß. Wir könnten dies explizit machen, indem wir einen weiteren Wissensoperator einführe. Das tun wir hier nicht, um die Formeln nicht unnötig komplex zu machen.
- Wie man sieht, ist nur die relativ schwache Modallogik $\mathcal{T}$ für den Beweis erforderlich. Oft werden stärkere Annahmen gemacht, so dass auch mehr bewiesen werden kann.

- K_H (R-H ∨ R-M): Hans weiss, dass Hans oder Maria (oder beide) einen roten Hut aufhaben.
- K_H R-M ∨ K_H ¬R-M: Hans weiss, ob Maria einen roten Hut auf hat oder nicht.
- ¬K_H R-H ∧ ¬K_H ¬R-H : Hans weiss nicht, ob er einen roten Hut auf hat oder nicht.

Beispiel in $\mathcal{T}$

$\{K_H (R\text{-}H \vee R\text{-}M),\ K_H\, R\text{-}M \vee K_H\, \neg R\text{-}M,\ \neg K_H\, R\text{-}H \wedge \neg K_H\, \neg R\text{-}H\} \vdash_{mt\mathcal{T}} R\text{-}M$



Zusammenfassung modale Aussagenlogiken

Viele Varianten von modalen Systemen

- zur Modellierung von bestehenden Sachverhalten und ihren Alternativen
- erfasst durch unterschiedliche Zugänglichkeitsrelationen

Ausdrucksmächtigkeit

- mächtiger als Aussagenlogik
  - hat Aussagenlogik als Teilsprache
- weniger mächtig als Prädikatenlogik
  - ist in zwei-Variablen-Fragment der Prädikatenlogik übersetzbar

Verarbeitbarkeit

- Erfüllbarkeitsproblem für die meisten Varianten entscheidbar
  - Endliche-Modell-Eigenschaft, Baum-Modell-Eigenschaft
- Tableau-Verfahren sind systematisch einsetzbar
  - Abbruch von Expansion bei Wiederholungen von Welt-Beschreibungen