Logik & Semantik
12. Vorlesung
Beschreibungslogiken

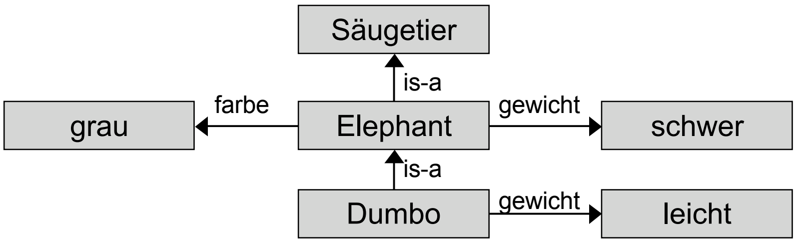
Beschreibungslogiken

- Zielsetzung, Anwendungen
- Sprachfamilie (Logische Systeme)
- Bezug zu anderen Logiken

Historischer Ursprung von Beschreibungslogiken

Semantische Netze

- Repräsentationen für Konzept-Wissen
- Graphen mit Knoten für Konzepte und Individuen und beschriftete Pfeilen für binäre Relationen
- Definiert über Bilder, keine klare Semantik, keine spezifizierten Verarbeitungsmechanismen



Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
- Ableitungs-, Beweisverfahren

Beschreibungslogik-Ansatz

Im Kontrast zu semantischen Netzen

- Explizite modelltheoretische Semantik
  - der Name ‚Logik' will verdient sein
- Unterscheidung von
  - is-a zwischen Konzepten: Subsumption; und
  - is-a zwischen Objekten und Konzepten: Instanziierung
    - Diese beiden Relationen gehören zu den ausgezeichneten Relationen mit fester Interpretation
- Fokussierung von Verarbeitungsmöglichkeiten und Berechenbarkeitsfragen

Andere Namen

- Terminologische Logiken, KL-ONE-artige Sprachen
- Description logic, terminological logics, taxonomic logics, term subsumption systems, KL-ONE-like systems

- Brachman, Ronald J. & James G. Schmolze (1985). An overview of the KL-ONE knowledge representation system. Cognitive Science 9. 171–216.

Aktuelle Anwendungen

Terminologien

- Spezifikation von Fach-Terminologien, z.B. medizinische Terminologien
- Basis für Terminologie-Server

Ontologien

- Beschreibung von Ontologien (Taxonomien)
- für das Semantic Web
  - OWL-DL (OIL, DAML+OIL) : XML-basierte Sprachen, die auf Beschreibungslogiken basieren
    - Lesbarkeit für Menschen und Maschinen
    - Ausdruckmächtigkeit vs Handhabbarkeit

- Rector, A. & I. Horrocks (1997). Experience building a large, re-usable medical ontology using a description logic with transitivity and concept inclusions. In Proceedings of the Workshop on Ontological Engineering, AAAI Spring Symposium (AAAI'97). AAAI Press: Menlo Park, California.

- Horrocks, Ian, Peter F. Patel-Schneider & Frank van Harmelen (2003). From SHIQ and RDF to OWL: The making of a web ontology language. Journal of Web Semantics 1. 7–26.
- Fensel, Dieter, Frank van Harmelen, Ian Horrocks, Deborah L. McGuinness & Peter F. Patel-Schneider (2001). OIL: An ontology infrastructure for the semantic web. IEEE Intelligent Systems 16(2). 38–44.

Konzeptsysteme, Systeme von Beschreibungen

Konzepte

- können allgemeiner / spezifischer sein als andere Konzepte (Subsumption)
- können einander ausschließen (Exklusion)
- können atomar oder komplex beschrieben sein
- können Informationen über Relationen beinhalten

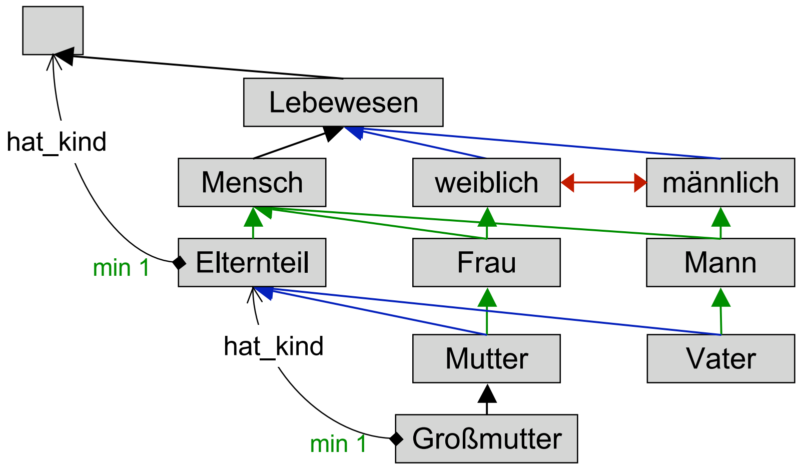
Objekte

- können unter Konzepte fallen
- können in Relation zueinander stehen

Relationen (Rollen)

- können allgemeiner / spezifischer sein als andere Relationen (Subsumption)

Beispiel: Konzeptsysteme (graphisch)



- Farbcode:
- Blau: Exhaustivität: jedes Lebewesen ist weiblich oder männlich
- Rot: Exklusivität: nichts ist weiblich und männlich
- Grün: Konjuktive Definition: jeder weibliche Mensch ist eine Frau

Beispiel: Konzeptsysteme (sprachlich)

‚Lebewesen' ist ein Konzept.
‚Mensch' ist Subkonzept von Lebewesen.
‚weiblich' ist Subkonzept von ‚Lebewesen'.
‚Frau' steht für ‚weiblicher Mensch'.
‚männlich' steht für ‚nicht-weibliches Lebewesen'.
‚Mann' steht für ‚männlicher Mensch'.
‚hat_kind' ist eine Relation.
‚Mutter' steht für ‚weibliches Lebewesen, das ein Kind hat'.
‚Vater' steht für ‚männliches Lebewesen, das ein Kind hat'.
‚Elternteil' steht für ‚Vater oder Mutter'.
‚Großmutter' steht für ‚Frau, die (mind.) ein Kind hat, das ein Elternteil ist'.

Vokabular von Beschreibungslogiken

Typen von Ausdrücken
- Konzepte / Beschreibungen
- Rollen
- (Terme / Individuenbezeichnungen)
- Formeln / Aussagen (Terminologische Axiome, Assertionen)

frei verfügbare Symbole
- Konzeptsymbole
- Rollensymbole
- (Konstanten)

‚logische Symbole' (feststehende Interpretation)
- Konzeptbildungsoperatoren
- Rollenbildungsoperatoren
- Operatoren zur Bildung von Formeln / Aussagen

Hilfssymbole
- Klammern, Interpunktion
- Symbole für natürliche Zahlen: 1, 2, 3, …

- Im Unterschied zur Prädikatenlogik erlaubt die Beschreibungslogik, dass die einstelligen Prädikate / Konzepte komplex (also aus mehreren Bestandteilen aufgebaut) sein können.
- Dafür ist aber die Komplexität der Formeln eingeschränkt.

Sprachen der Beschreibungslogiken

Eine Sprachfamilie / ein System von Sprachen

- Variationen zwischen Sprache bei den frei verfügbaren Symbolen (Konzeptsymbolen, Rollensymbolen und Konstanten) entsprechen Variationen Aussagensymbolen in der Aussagenlogik.

Wesentliche Unterschiede

- (aus Perspektive der Ausdrucksmächtigkeit / Verarbeitbarkeit)
- Variationen bei den logischen Symbolen
  - Konzeptbildungsoperatoren
  - Rollenbildungsoperatoren
  - Operatoren zur Bildung von Formeln

Hier

- Stichpunktartige Darstellung, keine systematische Beschreibung

Die Sprache(n) der Beschreibungslogik: $\mathcal{L}_{\text{DL}}$

Definition

Die Rollensymbole sind Rollen(-Beschreibungen) $\mathcal{Rol}(\mathcal{L}_{\text{DL}})$.

Die Individuenkonstanten sind Terme $\mathcal{Ter}(\mathcal{L}_{\text{DL}})$.

Die Konzeptsymbole $\mathcal{KS}(\mathcal{L}_{\text{DL}})$ und die Konstanten $\top$, $\bot$ sind die atomaren (Konzept-)Beschreibungen.

Die Menge der (Konzept-)Beschreibungen $\mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{\text{DL}})$ ist die kleinste Menge, so dass:

1. $\mathcal{KS}(\mathcal{L}_{\text{DL}}) \subseteq \mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{\text{DL}})$, $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{\text{DL}})$
2. Falls $C, D \in \mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{\text{DL}})$ und $R \in \mathcal{Rol}(\mathcal{L}_{\text{DL}})$, und sich E daraus mit einem Konzeptbildungsoperator von $\mathcal{L}_{\text{DL}}$ bilden lässt, dann ist $E \in \mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{\text{DL}})$

- Bei dieser Variante sind keine Rollenbildungsoperatoren erfasst. Kommen sie dazu, muss natürlich die Definition der Rollen(-Beschreibungen) erweitert werden.

Konzeptbildungsoperatoren (Concept constructors)

Standardnotation der Konstruktoren

$\top$	: das universelle Konzept
$\bot$	: das leere Konzept
$C \sqcap D$	: Durchschnitt, Bedingungskonjunktion
$C \sqcup D$	: Vereinigung, Bedingungsdisjunktion
$\neg A$	: Komplement, Negation nur atomarer Konzepte
$\neg C$	: Komplement, Negation beliebige Konzepte
$\forall R.C$	: Werterestriktion
$\exists R.\top$	: einfache Existenzrestriktion
$\exists R.D$	: freie Existenzrestriktion
$(\geq n\ R)$	: Anzahlrestriktion mindestens
$(\leq n\ R)$	: Anzahlrestriktion höchstens

Die Sprache der Beschreibungslogik(en): $\mathcal{L}_{DL}$

Definition

Die terminologischen Formeln der Beschreibungslogik $\mathcal{TFor}(\mathcal{L}_{DL})$ sind die

- Konzeptspezifikationen: $(C \sqsubseteq D)$, $(C \doteq D)$, wobei $C, D \in \mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{DL})$ und die
- Rollenspezifikationen: $(R \sqsubseteq S)$, $(R \doteq S)$, wobei $R, S \in \mathcal{Rol}(\mathcal{L}_{DL})$

Die assertionalen Formeln der Beschreibungslogik $\mathcal{AFor}(\mathcal{L}_{DL})$ sind die

- Konzeptzuordnungen: $C(a)$, wobei $C \in \mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{DL})$, $a \in \mathcal{Ter}(\mathcal{L}_{DL})$ und die
- Rollenzuordnungen: $R(a, b)$, wobei $R \in \mathcal{Rol}(\mathcal{L}_{DL})$, $a, b \in \mathcal{Ter}(\mathcal{L}_{DL})$.

- Auch hier unterscheiden sich die Beschreibungslogik-Sprachen. Einige lassen nur $(C \doteq D)$ als Definition von C zu, was bedingt, dass C ein Konzeptsymbol sein muss, nur bei einer der Formeln auf der linken Seite vorkommen darf und dass Zyklen in den Definitionen zu vermeiden sind. Andere Ansätze erlauben auch $(C \sqsubseteq D)$ mit komplexer Konzeptbeschreibung C.
- Es wird aber grundsätzlich ausgeschlossen, dass die terminologischen Formeln über Junktoren verknüpft werden.
- (Für assertionale Formeln wird die Verknüpfung mit Junktoren in manchen Kontexten erlaubt, führt dann aber auch leicht zu erheblichen Schwierigkeiten bei der Entscheidbarkeit.)

Struktur der Wissensbasis

Es seien
C und D Konzeptbeschreibungen (atomar oder komplex)
R und S Rollenbeschreibungen (atomar oder komplex)
a und b Individuenbezeichnungen (atomar oder komplex)

T-Box (Terminologie)

- enthält Formeln der Form $(C \sqsubseteq D)$, $(C \doteq D)$
- ggf. auch Formeln der Form $(R \sqsubseteq S)$, $(R \doteq S)$

A-Box (Assertionen, Weltmodell)

- enthält Formeln der Form C(a) und R(a, b).

Weitere Beschränkungen z.B.

- C muss atomar sein, C darf nur einmal links vorkommen, keine Zyklen in der T-Box

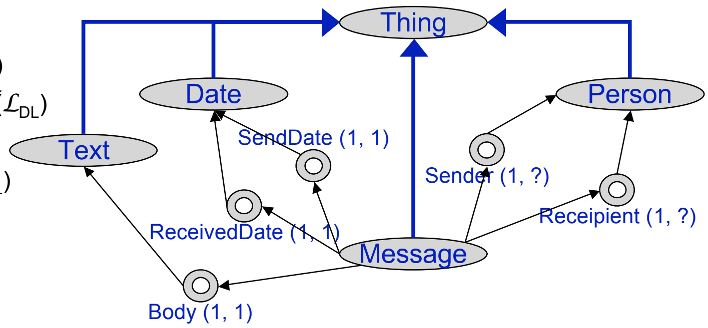
Beispiel: Konzeptsysteme (T-Box)

Mensch $\sqsubseteq$ Lebewesen (ist Subkonzept von).
weiblich $\sqsubseteq$ Lebewesen
Frau $\doteq$ weiblich $\sqcap$ Mensch (steht für)
männlich $\doteq$ $\neg$ weiblich $\sqcap$ Lebewesen
Mann $\doteq$ männlich $\sqcap$ Mensch
Mutter $\doteq$ weiblich $\sqcap$ $\exists$hat_kind.$\top$
Vater $\doteq$ männlich $\sqcap$ $\exists$hat_kind.$\top$
Elternteil $\doteq$ Mutter $\sqcup$ Vater
Großmutter $\doteq$ Frau $\sqcap$ $\exists$hat_kind.Elternteil

- Lebewesen $\in \mathcal{KS}(\mathcal{L}_{\mathrm{DL}})$ (ist ein Konzept.)
- hat_kind $\in \mathcal{Rol}(\mathcal{L}_{\mathrm{DL}})$ (ist eine Relation)

Beispiel (Brachman, Schmolze 1985)

Thing $\in \mathcal{KS}(\mathcal{L}_{DL})$
SendDate $\in \mathcal{Rol}(\mathcal{L}_{DL})$
ReceivedDate $\in \mathcal{Rol}(\mathcal{L}_{DL})$
Sender $\in \mathcal{Rol}(\mathcal{L}_{DL})$
Receipient $\in \mathcal{Rol}(\mathcal{L}_{DL})$
Body $\in \mathcal{Rol}(\mathcal{L}_{DL})$
Date $\sqsubseteq$ Thing
Person $\sqsubseteq$ Thing
Text $\sqsubseteq$ Thing



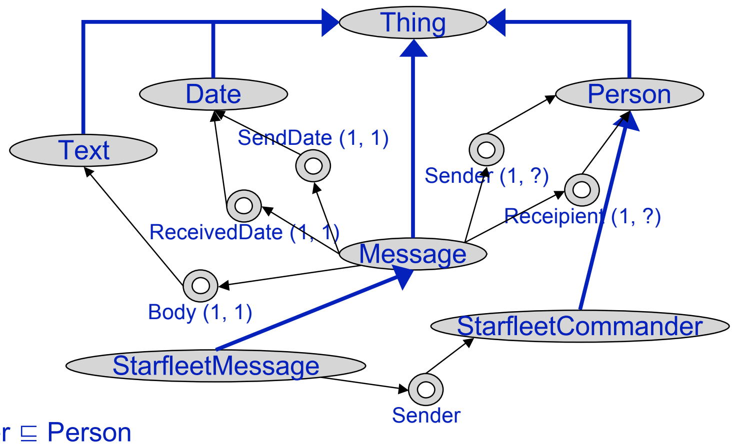
Message $\sqsubseteq$ Thing $\sqcap$ $\exists$Receipient.$\top$ $\sqcap$ $\forall$Receipient.Person $\sqcap$ $\exists$Sender.$\top$ $\sqcap$ $\forall$Sender.Person $\sqcap$ $\exists$SendDate.Date $\sqcap$ ($\leq$ 1 SendDate) $\sqcap$ $\exists$ReceivedDate.Date $\sqcap$ ($\leq$ 1 ReceivedDate) $\sqcap$ $\exists$Body.Text $\sqcap$ ($\leq$ 1 Body)

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik 12 – 16

- Brachman, Ronald J. & James G. Schmolze (1985). An overview of the KL-ONE knowledge representation system. Cognitive Science 9. 171–216.

- KL-ONE ist ein wichtiger Vorläufer der aktuell diskutierten Beschreibungslogiken.
- Leider wir dieses Beispiel nur noch selten verwendet.

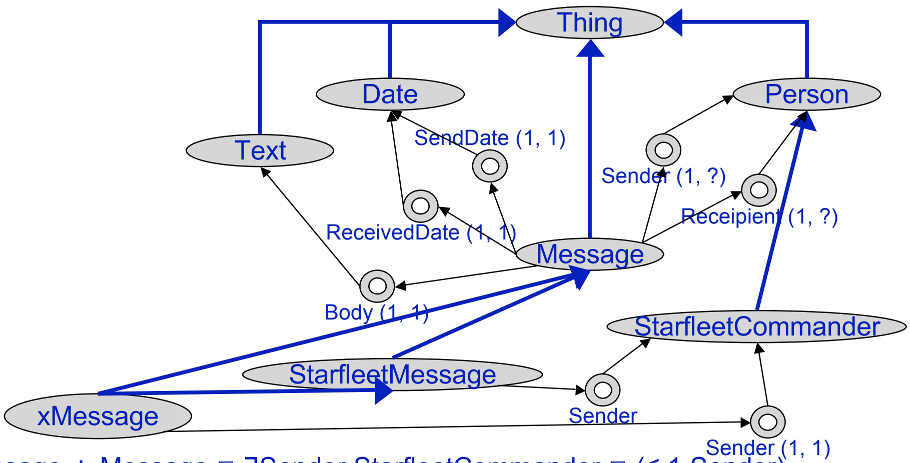
Beispiel 2 (Brachman, Schmolze 1985)



StarfleetCommander ⊑ Person

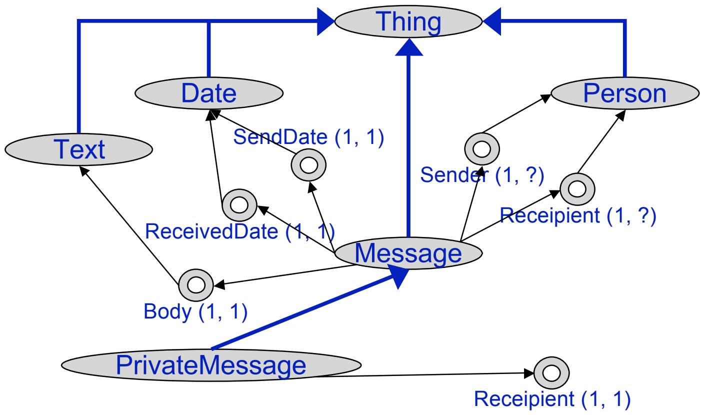
StarfleetMessage ≐ Message ⊓ ∀Sender.StarfleetCommander

Klassifikation neuer Konzepte



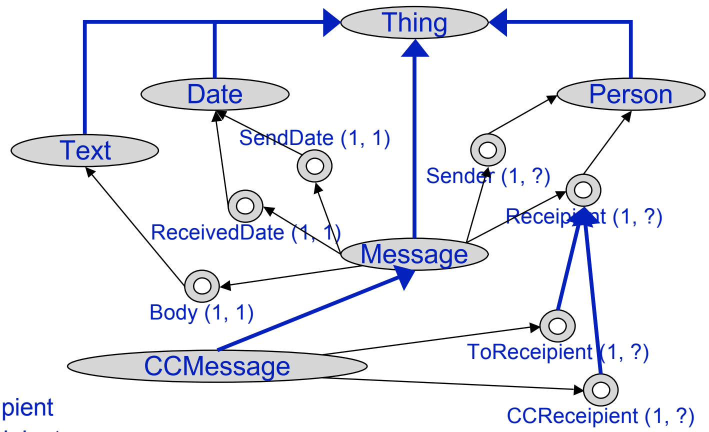
xMessage ≐ Message ⊓ ∃Sender.StarfleetCommander ⊓ (≤ 1 Sender)

Beispiel 3 (Brachman, Schmolze 1985)



PrivateMessage ≐ Message ⊓ (≤ 1 Receipient)

Beispiel 4 (Brachman, Schmolze 1985)



ToReceipient ⊑ Receipient
CCReceipient ⊑ Receipient
CCMessage ≐ Message ⊓ (≥ 1 ToReceipient) ⊓ (≥ 1 CCReceipient)

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik 12 – 20

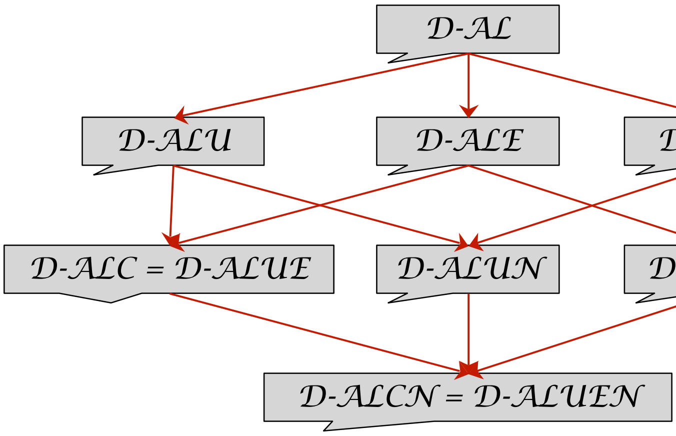
- Rolleninklusion (**ToReceipient ⊑ Receipient**) wird nur von einem Teil der Beschreibungslogiken unterstützt

Die Basissprache $\mathcal{D}$-$\mathcal{AL}$ und Erweiterungen

	$\mathcal{D}$-$\mathcal{AL}$	$\mathcal{D}$-$\mathcal{ALU}$	$\mathcal{D}$-$\mathcal{ALE}$	$\mathcal{D}$-$\mathcal{ALN}$	$\mathcal{D}$-$\mathcal{ALC}$
$\top$	+	+	+	+	+
$\bot$	+	+	+	+	+
$C \sqcap D$	+	+	+	+	+
$C \sqcup D$	–	+	–	–	–
$\neg A$	+	+	+	+	+
$\neg C$	–	–	–	–	+
$\forall R.C$	+	+	+	+	+
$\exists R.\top$	+	+	+	+	+
$\exists R.D$	–	–	+	–	–
$(\geq n\ R)$	–	–	–	+	–
$(\leq n\ R)$	–	–	–	+	–

- Das ‚AL' der Beschreibungslogiker steht für ‚Attributive Language'. Um die Verwechselung mit der AussagenLogik zu vermeiden, habe ich hier ein ‚D' davor gesetzt.

$\mathcal{D}$-$\mathcal{AL}$-Sprachfamilie (Ausdrucksmächtigkeit)



- Baader, Franz (2003). Appendix 1. Description logic terminology. In F. Baader, D. Calvanese, D.L. McGuinness, D. Nardi & P. Patel-Schneider (eds.) The Description Logic Handbook. Theory, Implementation and Application (pp. 485–495). Cambridge UP: Cambridge, NY. (dlhb-appendix)
- Nardi, Daniele & Ronald J. Brachman (2003). An introduction to description logics. In F. Baader, D. Calvanese, D.L. McGuinness, D. Nardi & P. Patel-Schneider (eds.) The Description Logic Handbook. Theory, Implementation and Application (pp. 1–40). Cambridge UP: Cambridge, NY. (dlhb-01)

Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
- Ableitungs-, Beweisverfahren

$\mathcal{L}_{DL}$: Bedeutung / Interpretation: Formal

Interpretationen sind Paare $\mathfrak{I}$ = <$\mathcal{D}$, $\mathcal{I}$ >

$\mathcal{D}$: nicht-leere Menge von Objekten (Domäne, Universum, Diskursbereich)

$\mathcal{I}$: Interpretation der frei verfügbaren Symbole, durch rekursive Definition erweitert auf alle Konzepte, Rollen und Individuenbezeichnungen

- Abbildung von Konzepten auf Teilmengen von $\mathcal{D}$
- Abbildung von Rollen auf Teilmengen von $\mathcal{D}^2$
- Abbildung von Individuenbezeichnungen auf ein Objekte in $\mathcal{D}$

Interpretation der Konstruktoren

Interpretationen sind Paare $\mathfrak{I} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$

$\mathcal{I}(\top) = \mathcal{D}$

$\mathcal{I}(\bot) = \varnothing$

$\mathcal{I}(C \sqcap D) = \mathcal{I}(C) \cap \mathcal{I}(D)$

$\mathcal{I}(C \sqcup D) = \mathcal{I}(C) \cup \mathcal{I}(D)$

$\mathcal{I}(\neg C) = \mathcal{D} \setminus \mathcal{I}(C)$

$\mathcal{I}(\forall R.C) = \{a \in \mathcal{D} \mid \forall b\, [(a, b) \in \mathcal{I}(R) \Rightarrow b \in \mathcal{I}(C)]\}$

$\mathcal{I}(\exists R.\top) = \{a \in \mathcal{D} \mid \exists b\, [(a, b) \in \mathcal{I}(R)]\}$

$\mathcal{I}(\exists R.D) = \{a \in \mathcal{D} \mid \exists b\, [(a, b) \in \mathcal{I}(R) \wedge b \in \mathcal{I}(D)]\}$

$\mathcal{I}((\geq n\ R)) = \{a \in \mathcal{D} \mid\ |\{b \in \mathcal{D} \mid (a, b) \in \mathcal{I}(R)\}| \geq n\}$

$\mathcal{I}((\leq n\ R)) = \{a \in \mathcal{D} \mid\ |\{b \in \mathcal{D} \mid (a, b) \in \mathcal{I}(R)\}| \leq n\}$

Rollenkonstruktoren mit Interpretation

$\mathcal{I}(U) =$	$\mathcal{D}\times\mathcal{D}$
$\mathcal{I}(Id) =$	$\{(a, a) \mid a \in \mathcal{D}\}$
$\mathcal{I}(R \sqcap S) =$	$\mathcal{I}(R) \cap \mathcal{I}(S)$
$\mathcal{I}(R \sqcup S) =$	$\mathcal{I}(R) \cup \mathcal{I}(S)$
$\mathcal{I}(\neg R) =$	$\mathcal{D}\times\mathcal{D} \setminus \mathcal{I}(R)$
$\mathcal{I}(R^{-}) =$	$\{(a, b) \in \mathcal{D}\times\mathcal{D} \mid (b, a) \in \mathcal{I}(R)\}$
$\mathcal{I}(R \circ S) =$	$\{(a, b) \in \mathcal{D}\times\mathcal{D} \mid \exists c\, [(a, c) \in \mathcal{I}(R) \wedge (c, b) \in \mathcal{I}(S)]\}$
$\mathcal{I}(R^{+}) =$	Transitive Hülle von $\mathcal{I}(R)$
$\mathcal{I}(R^{*}) =$	Reflexive, transitive Hülle von $\mathcal{I}(R)$
$\mathcal{I}(R\|_{C}) =$	$\mathcal{I}(R) \cap \mathcal{D}\times\mathcal{I}(C)$

$\mathcal{L}_{DL}$: Bedeutung / Interpretation: Formal (Forts.)

Interpretationen sind Paare $\mathfrak{I} = <\mathcal{D}, \mathcal{I}>$

Fortsetzung von $\mathcal{I}$ für Formeln

$\mathcal{I}((D_1 \sqsubseteq D_2))$ = wahr genau dann, wenn $\mathcal{I}(D_1) \subseteq \mathcal{I}(D_2)$.

$\mathcal{I}((D_1 \doteq D_2))$ = wahr genau dann, wenn $\mathcal{I}(D_1) = \mathcal{I}(D_2)$.

$\mathcal{I}(C(a))$ = wahr genau dann, wenn $\mathcal{I}(a) \in \mathcal{I}(C)$

$\mathcal{I}(R(a, b))$ = wahr genau dann, wenn $(\mathcal{I}(a), \mathcal{I}(b)) \in \mathcal{I}(R)$

Wir schreiben dann auch

$\mathfrak{I} \vDash (D_1 \sqsubseteq D_2)$ bzw. $\mathfrak{I} \vDash (D_1 \doteq D_2)$ bzw. $\mathfrak{I} \vDash C(a)$ …

und sagen

$\mathfrak{I}$ ist ein Modell der Formel / macht die Formel wahr.

Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
- Ableitungs-, Beweisverfahren

Äquivalenz und Subsumption bzgl. einer T-Box

Definitionen

Es seien D, D_1 und D_2 Konzept- oder Rollenbeschreibungen und $\mathcal{WB}$ eine Menge von T-Box-Axiomen.

- bzgl. $\mathcal{WB}$ subsumiert D_2 genau dann D_1 ($\mathcal{WB} \models (D_1 \sqsubseteq D_2)$) wenn für jede Interpretation $\Im = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, die alle Elemente aus $\mathcal{WB}$ wahr macht, gilt: $\Im \models (D_1 \sqsubseteq D_2)$.
- D ist (bzgl. $\mathcal{WB}$) genau dann inkonsistent (unerfüllbar), wenn jede Interpretation $\Im = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ (die alle Elemente aus $\mathcal{WB}$ wahr macht) gilt: $\mathcal{I}(D) = \varnothing$.
- …

➔Die Auswertung sollte in der Lage sein, solche semantischen Konsequenzen zu bestimmen.

Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
- Ableitungs-, Beweisverfahren

Tableau-Verfahren für Beschreibungslogiken

Ausgangspunkt

- Eigentliche Aufgabe wird auf (Un-)Erfüllbarkeitstest einer Formel zurückgeführt.
- Beispiel
  - ist C inkonsistent? → ist C(a) unerfüllbar ? (mit neuem a)
  - subsummiert C D ? → ist $(D \sqcap \neg C)(a)$ unerfüllbar ? (mit neuem a)

Initiales Tableau

- Formeln in Negations-Normalform (Negation nur an atomaren Konzeptsymbolen)

Tableau-Expansion

- entsprechend der Bedeutung der Konstruktoren
- Es seien Θ ein Tableau-Zweig und F_i Formeln aus Θ.

Tableau-Regeln für $\mathcal{ALUENC}$

	F_i	neue(r) Zweig(e)	Bedingung
$\sqcap$	$(C \sqcap D)(x)$	$\Theta' = \Theta \cup \{C(x), D(x)\}$	
$\sqcup$	$(C \sqcup D)(x)$	$\Theta' = \Theta \cup \{C(x)\}$ $\Theta'' = \Theta \cup \{D(x)\}$	
$\exists$	$(\exists R.C)(x)$	$\Theta' = \Theta \cup \{R(x, a), C(a)\}$	a ist neu
$\forall$	$(\forall R.C)(x), R(x, y)$	$\Theta' = \Theta \cup \{C(y)\}$	
$\geq$	$(\geq n\ R)(x)$	$\Theta' = \Theta \cup \{R(x, a_k) \mid 1 \leq k \leq n\}$ $\cup \{a_k \neq a_j \mid 1 \leq k < j \leq n\}$	a_k sind neu
$\leq$	$(\leq n\ R)(x), R(x, y_1),$ $\ldots, R(x, y_{n+1})$	$\Theta_{k,j} = \Theta[y_j / y_k]$	$1 \leq k < j \leq n+1$; $n*(n+1)/2$ Zweige; Substitution von y_j durch y_k

Abschlussbedingungen für Tableau-Zweige

Abgeschlossene Tableau-Zweige enthalten Widersprüche

- $\{D(x), \neg D(x)\} \subseteq \Theta$
- $\{\perp(x)\} \subseteq \Theta$
- $\{x \neq x\} \subseteq \Theta$

Nicht-abgeschlossene voll-expandierte Tableau-Zweige

- repräsentieren Modelle des Konzeptes
- signalisieren Konsistenz des Konzeptes

Tableau-Verfahren für $\mathcal{ALUENC}$: Korrektheit

Korrektheit (Soundness)

- jede Expansionsregel führt zu einer Menge von A-Boxen, deren Disjunktion erfüllbarkeitsäquivalent zur Ausgangs-A-Box ist
- Die ursprüngliche A-Box ist genau dann erfüllbar, wenn die Disjunktion der resultierenden A-Boxen erfüllbar ist.
- Die ursprüngliche A-Box ist genau dann erfüllbar, wenn (mind.) eine der resultierenden A-Boxen erfüllbar ist.

Tableau-Verfahren für $\mathcal{ALUENC}$: Termination

Termination

- Ausgehend von einer A-Box {$C(a_0)$} können höchstens endlich viele (echte) Expansionsschritte vorgenommen werden.
- Das Tableau-Verfahren terminiert mit einer Menge von Zweigen, die abgeschlossen oder maximal expandiert sind.

Begründung

- In jeder Formel $D(b)$, die in eine A-Box gelangt, ist D eine Teilbeschreibung von C. Für jedes b gibt es also nur endlich viele solche Einträge.
- Es werden höchstens endlich viele Konstanten eingeführt.
  - (Begründung nächste Folie)

Tableau-Verfahren für $\mathcal{ALUENC}$: Termination (2)

- Die Konstanten und Rollenzuordnungen bilden einen Baum mit der Wurzel a und c ist genau dann Nachfolger von b, wenn R(b, c) in der A-Box enthalten ist.
  - Die Konstanten und Rollenzuordnungen werden immer gemeinsam eingeführt.
  - Identifikation von Konstanten erfolgt nur, wenn einheitliche Rollenzuordnungen vorliegen.
- Jeder Knoten hat höchstens endlich viele direkte Nachfolgeknoten.
- Der Baum hat eine endliche Tiefe.
  - Beschreibungen von Nachfolgeknoten sind echte Teilbeschreibungen der Vorgängerknoten.
- Der Baum ist endlich.

Tableau-Verfahren für $\mathcal{ALUENC}$

Vollständigkeit

- Genau dann, wenn das Tableau-Verfahren mit einem nicht-abgeschlossenen Zweig terminiert, hat die ursprüngliche A-Box ein Modell.

Entscheidbarkeit

- Konzept-(In)Konsistenz mit leerer T-Box ist für $\mathcal{ALUENC}$ entscheidbar.

Aufwand

- Das geschilderte Verfahren hat exponentielle Komplexität sowohl für Zeit- als auch für Platzbedarf.
- Reduktion auf polynominellen Platzbedarf möglich.
- Konzept-(In)Konsistenz ist für $\mathcal{ALUENC}$ PSpace-vollständig

Die Beschreibungslogik $\mathcal{ALUENC}$

Eine Beschreibung

- ist genau dann erfüllbar, wenn es ein endliches Modell gibt

➢ **hat die endliche-Modell-Eigenschaft (finite model property)**

Eine Beschreibung

- ist genau dann erfüllbar, wenn es ein (endliches) Modell gibt, das einen Baum bildet
- (jeder Knoten über genau eine Rollen-Folge erreichbar)

➢ **hat die Baum-Modell-Eigenschaft (tree model property)**

Beschreibungslogiken: Varianten

Unterschiede zwischen verschiedenen Beschreibungslogiken

- Auswahl von Konzeptbildungsoperatoren
- Auswahl von Rollenbildungsoperatoren
- Auswahl von Operatoren zur Bildung von Formeln
- Berücksichtigung von Konstanten (für Objekte)

Auswirkungen

- Ausdrucksmächtigkeit und Verarbeitbarkeit
- Manchmal keine: Einschränkung von Formulierungsvarianten desselben Inhaltes
- Reine Konzeptsysteme vs. Konzeptsysteme + Weltausschnitt

Einordnung bezüglich anderer Logiken

Beschreibungslogiken sind

- ausdrucksschwächer als Prädikatenlogik

$\mathcal{ALU}$ und Erweiterungen sind

- ausdrucksreicher als Aussagenlogik

Entscheidbarkeit

- Prädikatenlogik ist semi-entscheidbar
- Aussagenlogik ist entscheidbar
- Bei Beschreibungslogiken gibt es entscheidbare und semi-entscheidbare Varianten
  - ➔gesucht wird nach entscheidbaren Varianten mit geringer Komplexität

Übersetzung in Prädikatenlogik

Konzepte entsprechen Formeln mit einer freien Variable

Rollen entsprechen zweistelligen Prädikatssymbolen.

- Hier wird davon ausgegangen, dass nur atomare Rollen vorliegen

Übersetzungsfunktion ϕ: $\mathcal{Var}(\mathcal{L}_{PL}) \times \mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{DL}) \rightarrow \mathcal{For}(\mathcal{L}_{PL})$

- bildet eine Variable x und eine Beschreibung auf eine prädikatenlogische Formel ab, in der maximal die Variable x frei vorkommt.
- (Es sei y eine Variable, die von x verschieden ist.)

Induktive Definition von ϕ

$\phi(x, \top) = \top$ $\qquad$ $\phi(x, \bot) = \bot$

$\phi(x, A) = A(x)$ $\qquad$ $\phi(x, \neg C) = \neg\phi(x, C)$

$\phi(x, C \sqcap D) = \phi(x, C) \wedge \phi(x, D)$ $\qquad$ $\phi(x, C \sqcup D) = \phi(x, C) \vee \phi(x, D)$

$\phi(x, \forall R.C) = \forall y\,[R(x, y) \supset \phi(y, C)]$

$\phi(x, \exists R.D) = \exists y\,[R(x, y) \wedge \phi(y, D)]$

- Lutz, C., U. Sattler & F. Wolter (2001). Description Logics and the Two-Variable Fragment. In D.L. McGuiness, P.F. Pater-Schneider, C. Goble & R. Möller (eds.) Proceedings of the 2001 International Workshop in Description Logics (DL-2001) , (pp. 66–75). Stanford, California, USA. Proceedings online available from http://SunSITE.Informatik.RWTH-Aachen.DE/Publications/CEUR-WS/

Übersetzung in aussagenlogische Multi-Modallogik

Konzepte entsprechen aussagenlogischen Formeln

Rollen werden über Paare von Modaloperatoren repräsentiert

- Hier wird davon ausgegangen, dass nur atomare Rollen vorliegen
- Für jede (atomare) Rolle R werden zwei duale Modal-Operatoren [R] und $\langle R \rangle$ eingeführt.

Übersetzungsfunktion ϕ: $\mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{DL}) \rightarrow \mathcal{For}(\mathcal{L}_{ML})$

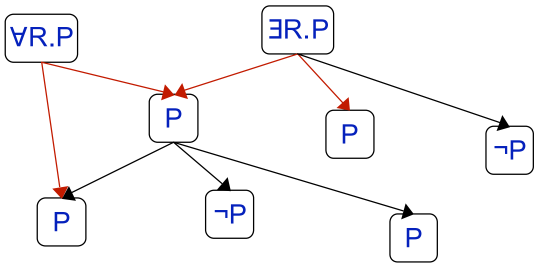
Induktive Definition von ϕ

$\phi(\top) = \top$	$\phi(\bot) = \bot$
$\phi(A) = A$	$\phi(\neg C) = \neg\phi(C)$
$\phi(C \sqcap D) = \phi(C) \wedge \phi(D)$	$\phi(C \sqcup D) = \phi(C) \vee \phi(D)$
$\phi(\forall R.C) = [R]\, \phi(C)$	$\phi(\exists R.D) = \langle R \rangle\, \phi(D)$

- Schild, K. (1991). A correspondence theory for terminological logics: Preliminary report. In In Proc. of the 12th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI-91) (pp. 466–471). Sydney, Australia. http://citeseer.ist.psu.edu/schild91correspondence.html

Überblick: korrespondierende Formeln

Modal-Logik	Beschreibungslogik	Prädikatenlogik
$\langle R \rangle$ P	∃R.P	$\exists y\ (R(x,y) \wedge P(y))$
[R] P	∀R.P	$\forall y\ (R(x,y) \rightarrow P(y))$



Resumee: Beschreibungslogiken

Beschreibungslogiken

- können als notationelle Variante von Multi-Modallogiken aufgefasst werden
- Erkenntnisse über Verarbeitungsmöglichkeiten lassen sich zwischen den Logik-Typen leicht übertragen

Kardinalitätsrestriktionen

- lassen sich in FO^2 mit ‚zählenden Quantoren' übersetzen.

Ausdrucksmächtige Beschreibungslogiken

- (Unentscheidbar, hohe Komplexität)
- ergeben sich aus Kombination von Konzeptbildungsoperatoren
- und insbesondere Spezifikation/Definition der Rollen