Logik & Semantik
12. Vorlesung
Mehrsortige Logik

Mehrsortige Logik

Logik und Logische Sprachen: Einige Zwischenbemerkungen

Logische Sprachen
- Sind Repräsentationssprachen
- Erlauben Schlüsse über Domänen
- Basieren auf Operator-Operanden Konstruktionen

Menschliche Konzeptualisierung von Domänen
- Basiert auf internen Repräsentationen
- Legt Kategorisierung der Entitäten in Domänen zugrunde

Logische Sprachen sind das Resultat menschlicher Kognition

Diese Zwischenbemerkungen sind als Überleitung zu den beiden letzten Abschnitten des Logik-Teils der LOS-Vorlesung zu verstehen:

Sortenlogiken und typisierte Logiken stellen weitere syntaktische und semantische Mittel zur Verfügung, mit denen die interne Struktur von Domänen berücksichtigt werden kann.

- Die Begriffe „Sorte“ und „Typ“ der Logik sind zwar beide im Hinblick auf den Begriff des „Typs“ oder besser „Datentyps“ der Informatik relevant, dürfen aber **nicht** mit diesem identifiziert werden. Hierauf sollte im weiteren Verlauf der beiden Abschnitte sorgfältig geachtet werden.
- Zur Sortenlogik in der Informatik, siehe u.a.:
  - Gallier, Jean H. (1987). *Logic for Computer Science*. New York: John Wiley. (chapter 10).
  - Enderton, Herbert B. (2001). A Mathematical Introduction to Logic. Harcourt, Academic Press: San Diego.
  - Sperschneider, V. & G. Antoniou (1991). Logic. A Foundation for Computer Science. Addison-Wesley: Workingham, England.
- Zu logischen Sprachen als Repräsentationsspprachen (und zu einigen Anwendungen der Idee der Sortierung in der Wissensrepräsentation), siehe auch:
  - Habel, Christopher (1986). *Prinzipien der Referentialität*. Berlin: Springer-Verlag.
    [Anm. C Habel: Ich habe das Buch 1984–85 geschrieben, und würde jetzt einiges anders machen, aber im Wesentlichen ist dies meine Haltung zur Wissensrepräsentation.]

Mehrsortige Logik – Ein motivierendes Beispiel (1)

Ein Postulat der Euklidischen Geometrie (Playfairs Axiom)

Zu jeder Geraden und jedem Punkt, der nicht auf ihr liegt, existiert genau eine Gerade, die durch den Punkt verläuft und parallel zu der Geraden ist.

$$(\forall x)\ (\forall y)\ ((\mathrm{line}(x) \wedge \mathrm{point}(y) \wedge \neg\mathrm{on}(y, x)) \supset (\exists z)\ (\mathrm{line}(z) \wedge \mathrm{on}(y, z) \wedge \mathrm{parallel}(x, z) \wedge (\forall v)\ ((\mathrm{line}(v) \wedge \mathrm{on}(y, v) \wedge \mathrm{parallel}(x, v)) \supset (z = v))))$$

- Einsortige Logik: Terme / Quantoren tragen keine „Information" über die intendierten Anwendungs- / Denotationsbereiche.

- Das hier formulierte Postulat ist eine Reformulierung von Euklids fünftem Postulat, dem „Parallelenpostulat". „Originalformulierung" (Übers. Thaer, Leipzig 1933):
- Gefordert soll sein:
  ...
  „Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind."
- Diese Reformulierung, auch als Playfairs Axiom (1795) bezeichnet, hat den Vorteil, dass im Kontrast zur Forderung der Existenz einer parallelen Geraden durch den Punkt, Arten nicht-euklidischer Geometrien charakterisiert werden können.

Mehrsortige Logik – Ein motivierendes Beispiel (2)

Unterscheidung von Objektsorten

- bei der Anwendung logischer Sprachen
- Beispiel: klassische Euklidische Geometrie
  Geraden, Punkt, Ebenen, Kreise, …
- Mehrsortige Logik: Terme / Quantoren tragen „Information" über die intendierten Anwendungs- / Denotationsbereiche.
- Beispiel: Variablen, die mit *l* beginnen, stehen für Geraden
  Variablen, die mit *p* beginnen, stehen für Punkte

Eine Reformulierung von Playfairs Axiom

$$(\forall l_1)(\forall p)\ (\neg\mathrm{on}(p, l_1) \supset (\exists l_2)\ (\mathrm{on}(p, l_2) \wedge \mathrm{parallel}(l_1, l_2) \wedge (\forall l_3)\ (\mathrm{on}(p, l_3) \wedge \mathrm{parallel}(l_1, l_3)) \supset (l_2 = l_3))))$$

Mehrsortige Logik – Die Grundidee

Die Menge der Terme von $\mathcal{L}_{PL}$ ist in Sorten unterteilt

- Sorten: eine nicht-leere endliche Menge
- Sortierung der Konstanten
- Sortierung der Argumentstruktur von Funktions- und Relationsymbolen
- Sortierung von Funktionswerten

Notationelle Varianten sortierter Quantifikation

- $(\forall\ l)$ bzw. $(\forall\ p)$ — die Variablenmengen sind unterschieden.
- $(\forall x\text{:LINE})$ bzw. $(\forall x^{LINE})$ — Variablen einer Sorte werden durch einen Index ausgezeichnet.
- $(\forall_{\boldsymbol{LINE}}\ x)$ — Für jede Sorte gibt es eigene Quantoren.

Mehrsortige Logik – Ausdrucksadäquatheit

In jedem Dreieck beträgt die Winkelsumme 180˚

einsortig: $(\forall x)\ (\text{dreieck}(x) \supset \text{winkelsumme}(x) = 180^\circ)$

mehrsortig: $(\forall dr)\ \text{winkelsumme}(dr) = 180^\circ$

Es gibt ein gleichseitiges Dreieck

einsortig: $(\exists x)\ (\text{dreieck}(x) \wedge \text{gleichseitig}(x))$

mehrsortig: $(\exists dr)\ \text{gleichseitig}(dr)$

Hierbei sei jeweils *dr* eine Variable der Sorte ‚Dreieck'

Sortenkorrektheit

Was ist von

(#) π ist eine Primzahl prim(π)

zu halten?

Zwei mögliche Reaktionen

- (#) ist falsch,
  dann ist ¬prim(π) wahr.
  Dies kann zu Fehlschlüssen führen:
  Eigenschaften von Nicht-Primzahlen: sie haben echte Teiler.
- (#) ist *nicht sinnvoll*, ist *sorteninkorrekt*, *sortal nicht korrekt*
  denn die Eigenschaft …*ist Primzahl* kann nur natürliche Zahlen zu- oder abgesprochen werden.

- Das Konzept der „sortalen Korrektheit" ist ein zentrales Konzept für die Semantik natürlicher Sprachen.

Signaturen

Definition

- Eine mehr-sortige Signatur ist ein Paar $\langle S, \Sigma\rangle$, wobei die Menge der Sortensymbole S eine endliche nicht-leere Menge ist und Σ eine aufzählbare Menge von Zeichenketten der Form f:$s_1s_2…s_n \to s$ oder P:$s_1s_2…s_n$, mit $s_1, s_2, …, s_n, s \in S$.
- Wenn f:$s_1s_2…s_n \to s \in \Sigma$, dann nennen wir f ein Funktionssymbol der Sorte $s_1s_2…s_n \to s$.
- Wenn c:$\to s \in \Sigma$, dann nennen wir c eine Konstante der Sorte s.
- Wenn P:$s_1s_2…s_n \in \Sigma$, dann nennen wir P ein Relationssymbol der Sorte $s_1s_2…s_n$.

Signatur: Ein Beispiel

Spezifikation eines Kellerspeichers (über natürlichen Zahlen)

Signatur: $\langle S, \Sigma \rangle$

Sorten: S = {stack, nat}

Σ = {0:→nat, succ: nat →nat, +:nat nat→nat, *:nat nat→nat,
ε:→stack, isempty: stack, push: stack nat→stack,
pop: stack→stack, top: stack→nat, depth: stack→nat}

Formeln dieser Sprache könnten sein

$(\forall n)\ (\forall s)\ \text{pop}(\text{push}(s, n)) = s$

$(\forall n)\ (\forall s)\ \text{top}(\text{push}(s, n)) = n$

Aufgabe 12-1

a) Ergänzen Sie die Spezifikation um folgende Bedingungen:

1) ε ist der einzige Stack, auf den isempty zutrifft.

2) depth gibtdie Anzahl der im Stack gespeicherten Objekte an

3) Liefert die Anwendung von succ auf zwei natürliche Zahlen dasselbe Ergebnis, dann sind die Zahlen identisch.

4) Addition von natürlichen Zahlen und Multiplikation

b) Beweisen Sie aus der Spezifikation (wenn Sie mögen, mit einem geeigneten Tableau):

$(\forall n)\ (\forall s)\ (\forall m)\ (\forall s')\ (\text{push}(s, n) = \text{push}(s', m) \supset (s = s' \wedge n = m))$

c) Das obige Beispiel hat das Problem, dass die Annahme, es handele sich bei top und pop um Funktionen zu unerwünschten Konsequenzen führen kann, denn was soll top(ε) oder pop(ε) sein? [Grundsätzlich hat die Logik Probleme mit partiellen Funktionen und diese Probleme werden durch die Sortierung nur zu einem Teil gelöst. In den freien Logiken wird die Möglichkeit, dass ein Term kein Objekt bezeichnet, gezielt behandelt.]

Machen Sie Vorschläge, wie man bei der Spezifikation mit top(ε) oder pop(ε) umgehen kann.

Aufgabe 12-2

Was verändert sich, wenn wir in dem Stack nicht natürliche Zahlen, sondern Objekte einer Sorte item speichern?

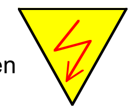
Aufgabe (ohne Nummer)

Spezifizieren Sie das Verhalten einer First-In-First-Out-Struktur (queue) in einer mehrsortigen Logik.

Mehrsortige Sprachrahmen (2)

Definition

- Eine sortenbasierte logische Sprache wird definiert durch eine Signatur $\langle S, \Sigma \rangle$ und eine sortierte Menge von Variablen.
- Für jedes s ∈ S existiert eine abzählbar unendliche Menge $\mathcal{V}_s$ von Variablen der Sorte s.
  - Die Variablen der verschiedenen Sorten sind voneinander verschieden und die Variablen sind auch von den Konstantensymbolen aus $\langle S, \Sigma \rangle$ verschieden.
  - Die Abbildung, die jeder Sorte ihre Variablen zuordnet, nennen wir die ‚sortierte Variablenmenge' $\mathcal{V}$.



- In dieser Variante der mehrsortigen Logik müssen die Sortensymbole nicht als Teile der Formeln auftreten, da die Variablenmengen von vorne herein unterschieden sind.
- Die Disjunktheitsforderung für Sortenzugehörigkeit von Variablen bzw. Konstantensymbolen sollte nicht mit einer Disjunktheitsforderung für die spätere Interpretation verwechselt werden.
  - Das Konstantensymbol „1" für eine Konstante der Sorte *nat* ist eben etwas anderes als das Konstantensymbol „1,0" für eine Konstante der Sorte *real*.

Terme der mehrsortigen Logik

Definition

Es sei $\langle \mathcal{S}, \Sigma\rangle$ eine Signatur und $\mathcal{V}$ eine sortierte Variablenmenge. Für jede Sorte s gilt: Die Menge ($\mathcal{Ter}_s(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$) der Terme der Sorte s ist die kleinste Menge für die gilt:

1. Jedes Konstantensymbol c mit $c{:}\to s \in \Sigma$ und jede Variable $v \in \mathcal{V}_s$ ist ein Element von $\mathcal{Ter}_s(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$.
2. Wenn $t_1,\ldots, t_n$ Terme sind, mit t_i ist von der Sorte s_i, und $f{:}s_1 s_2 \ldots s_n \to s \in \Sigma$, so ist $f(t_1,\ldots, t_n) \in \mathcal{Ter}_s(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$.

Definition

Eine Substitution σ ist sortentreu, wenn für jede Variable $v \in \mathcal{V}_s$ gilt: $v\sigma \in \mathcal{Ter}_s(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$

Die Bedingung 2 stellt die Sortenkorrektheit sicher und weißt außerdem eine Ergebnissorte zu.

Es ist durchaus zulässig, dass dasselbe Funktionssymbol mit verschiedenen Sorten in der Signatur auftritt. Allerdings sollte die Ergebnissorte von den Argumentsorten funktional abhängig sein. Deshalb dürfen auch die Konstanten nicht mehrfach auftreten.

Atomare Formeln der mehrsortigen Logik

Definition

Es sei $\langle \mathcal{S}, \Sigma\rangle$ eine Signatur und $\mathcal{V}$ eine sortierte Variablenmenge.

1. $\perp, \top \in \mathcal{AtFor}(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$ sind atomare Formeln.
2. Wenn $t_1,\ldots, t_n$ Terme sind, mit t_i ist von der Sorte s_i, und $P{:}s_1 s_2 \ldots s_n \in \Sigma$, so ist $P(t_1,\ldots, t_n) \in \mathcal{AtFor}(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$ eine atomare Formel.
3. In einer mehrsortigen Logik mit Identität zusätzlich: Wenn s eine Sorte ist und t_1, t_2 Terme der Sorte s sind, dann ist $(t_1 = t_2) \in \mathcal{AtFor}(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$ eine atomare Formel
4. Das sind alle atomaren Formeln.

Die Bedingung 2 stellt wieder die Sortenkorrektheit sicher.

Für die Anwendung der Gleichheitsrelation wird die Sortenübereinstimmung grundsätzlich vorausgesetzt.

Formeln der mehrsortigen Logik

Definition

Es sei $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ eine Signatur und $\mathcal{V}$ eine sortierte Variablenmenge. Die Menge der Formeln ($\mathcal{For}(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$) ist die kleinste Menge für die gilt:

1. Jede atomare Formel ist eine Formel.
2. Wenn F, G Formeln sind, so ist $\neg F \in \mathcal{For}(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$ und für jeden binären Junktor $\odot$ ist $(F \odot G) \in \mathcal{For}(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$.
3. Wenn F eine Formel ist und $v \in \mathcal{V}_s$, so sind $(\forall v)\ F$, $(\exists v)\ F \in \mathcal{For}(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$.

Wie man sieht: Für den Aufbau von komplexeren Formeln spielt die Sortendifferenzierung keine Rolle mehr.

Modell für eine Signatur

Definition

Ein *Modell* für eine Signatur $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ ist ein Paar $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, wobei

- $\mathcal{D}$ ordnet jeder Sorte $s \in \mathcal{S}$ eine nicht-leere Menge (*Domäne*) $\mathcal{D}_s$ zu.
- $\mathcal{I}$ ist eine Abbildung (*Interpretation*), die folgendes leistet:
  - für jedes $c{:}\to s \in \Sigma$ ist $\mathcal{I}(c{:}\to s) \in \mathcal{D}_s$
  - für jedes $f{:}s_1 s_2 \dots s_n \to s \in \Sigma$ ist $\mathcal{I}(f{:}s_1 s_2 \dots s_n \to s)$: $\mathcal{D}_{s1} \times \dots \times \mathcal{D}_{sn} \to \mathcal{D}_s$
  - für jedes $P{:}s_1 s_2 \dots s_n \in \Sigma$ ist $\mathcal{I}(P{:}s_1 s_2 \dots s_n) \subseteq \mathcal{D}_{s1} \times \dots \times \mathcal{D}_{sn}$

Sortentreue Zuweisung, Auswertung von Termen

Definition

Es sei $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ eine Signatur und $\mathcal{V}$ eine sortierte Variablenmenge.

Eine *(sortentreue) Zuweisung* für $\mathcal{V}$ in ein Modell $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ für $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ ist eine Abbildung $\mathcal{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{D}$, so dass für jede Sorte $s \in \mathcal{S}$ gilt: $\mathcal{A}(\mathcal{V}_s) \subseteq \mathcal{D}_s$

Definition (Termauswertung)

Sei $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ Modell für eine Signatur $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ und $\mathcal{A}$ eine (sortentreue) Zuweisung für $\mathcal{V}$ in $\mathcal{M}$.

1. Für $c{:}\to s \in \Sigma$ ist $c^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \mathcal{I}(c{:}\to s)$
2. Für $v \in \mathcal{V}_s$ ist $v^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \mathcal{A}(v)$
3. Für $f{:}s_1 s_2 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}er_{si}(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$ ist $[f(t_1, \ldots, t_n)]^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \mathcal{I}(f{:}s_1 s_2 \ldots s_n \to s)\ (t_1^{\mathcal{I},\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{A}})$

- Hiermit ergibt sich: Wenn t ein Term der Sorte s ist, dann ist $c^{\mathcal{I},\mathcal{A}} \in \mathcal{D}_s$

Auswertung für Formeln

Definition

Sei $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ Modell für eine Signatur $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ und und $\mathcal{A}$ eine (sortentreue) Zuweisung für $\mathcal{V}$ in $\mathcal{M}$.

1. $\bot^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \mathbf{f}$ $\quad\quad$ $\top^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \mathbf{t}$
2. Für $P{:}s_1 s_2 \ldots s_n \in \Sigma$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}er_{si}(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$ ist $[P(t_1, \ldots, t_n)]^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \mathbf{t}$ gdw. $\langle t_1^{\mathcal{I},\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{A}} \rangle \in \mathcal{I}(P{:}s_1 s_2 \ldots s_n)$
3. $[\neg X]^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \neg[X^{\mathcal{I},\mathcal{A}}]$
4. $[(X \odot Y)]^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = X^{\mathcal{I},\mathcal{A}} \odot Y^{\mathcal{I},\mathcal{A}}$
5. $[(\forall x)\ \Phi]^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \mathbf{t}$ gdw. für alle sortentreuen x-Varianten $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{A}$ gilt: $\Phi^{\mathcal{I},\mathcal{B}} = \mathbf{t}$ und sonst $\mathbf{f}$.
6. $[(\exists x)\ \Phi]^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \mathbf{t}$ gdw. für eine sortentreue x-Variante $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{A}$ gilt: $\Phi^{\mathcal{I},\mathcal{B}} = \mathbf{t}$ und sonst $\mathbf{f}$

Folgerbarkeit und Gültigkeit in mehrsortigen Logiken

Definition (Folgerbarkeit mit Sorten)

Sei $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ eine Signatur, $\mathcal{V}$ eine sortierte Variablenmenge und $X \in g\mathcal{F}or(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$.

X *folgt unter Berücksichtigung der Sorten* aus $\mathbf{C} \subseteq g\mathcal{F}or(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$, falls in allen Modellen von $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$, die alle Elemente von **C** wahr machen, X wahr ist. Wir schreiben: $\mathbf{C} \vDash_{\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle} X$.

X *ist unter Berücksichtigung der Sorten gültig*, falls X in allen Modellen von $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ wahr ist. Wir schreiben: $\vDash_{\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle} X$.

Genauer müßte man noch erwähnen, dass nur sortentreue Zuweisungen zu berücksichtigen sind. Aber das macht die Formulierung sehr komplex:

X *folgt unter Berücksichtigung der Sorten* aus $\mathbf{C} \subseteq g\mathcal{F}or(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V})$, falls in allen Modellen $\mathcal{M}$ von $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ und unter allen (sortentreuen) Zuweisungen $\mathcal{A}$ für $\mathcal{V}$ in $\mathcal{M}$, die alle Elemente von **C** wahr machen, X wahr ist. Wir schreiben: $\mathbf{C} \vDash_{\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle} X$.

X *ist unter Berücksichtigung der Sorten gültig*, falls X in allen Modellen $\mathcal{M}$ von $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ und allen (sortentreuen) Zuweisungen $\mathcal{A}$ für $\mathcal{V}$ in $\mathcal{M}$ wahr ist. Wir schreiben: $\vDash_{\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle} X$.

Ordnungssortierte Logiken

Obersorten und Untersorten

- In einer Signatur $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ ist $\mathcal{S}$ partiell geordnet
- Im Modell spiegelt sich diese Ordnung wieder als
- Wenn s_1 Untersorte von s_2 ist, dann gilt $\mathcal{D}_{s1} \subseteq \mathcal{D}_{s2}$.
- Für Substitutionen gilt, dass Variablen mit übergeordneten Sorten durch Terme mit untergeordneten Sorten ersetzt werden können.

Beispiel

- Natürliche Zahlen als Untersorte der ganzen Zahlen.

Simulation mehrsortiger Logiken in einsortigen Logiken

Einsortige Sprache mit Sortenprädikaten

- Es sei $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ eine Signatur und $\mathcal{V}$ eine sortierte Variablenmenge
- Die unsortierte Sprache $\mathcal{L}_{PL}(\Sigma)$ ergibt sich aus:
  - Alle Konstanten, Funktionssymbole und Relationssymbole aus Σ werden in $\mathcal{L}_{PL}(\Sigma)$ übernommen, die Sortenspezifikation dabei ‚vergessen', die Stelligkeit erhalten
  - $\mathcal{Sort}(\mathcal{S}) = \{\mathrm{sort}_s \mid s \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{Rel}_n(\mathcal{L}_{PL}(\Sigma))$ eine Menge einstelliger Prädikatssymbole, genannt *Sortenprädikate*.
  - Die Variablenmenge $\mathcal{Var}(\mathcal{L}_{PL}(\Sigma)) = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{V}_s$ ist unsortiert.
- Dann ist $\mathcal{For}(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V}) \subseteq \mathcal{For}(\mathcal{L}_{PL}(\Sigma))$

Simulation mehrsortiger Logiken in einsortigen Logiken

Sortenaxiome

- Es sei $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ eine Signatur und $\mathcal{V}$ eine sortierte Variablenmenge und es seien $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{Var}(\mathcal{L}_{PL}(\Sigma))$
- Die Sortenaxiome zu $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ sind:
  - $\mathcal{SorAx}(\mathcal{S}) = \{(\exists x)\ \mathrm{sort}_s(x) \mid s \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{For}(\mathcal{L}_{PL}(\Sigma))$
  - $\mathcal{SorAx}(\Sigma) = \{$
    $(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\ ((\mathrm{sort}_{s1}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{sort}_{sn}(x_n)) \supset \mathrm{sort}_s(f(x_1, \ldots, x_n)) \mid$
    $f{:}s_1 s_2 \ldots s_n \rightarrow s \in \Sigma\} \subseteq \mathcal{For}(\mathcal{L}_{PL}(\Sigma))$
  - $\mathcal{OrdAx}(\mathcal{S}) = \{(\forall x)\ (\mathrm{sort}_{s1}(x) \supset \mathrm{sort}_{s2}(x)) \mid$ Wenn s_1 Untersorte von $s_2\} \subseteq \mathcal{For}(\mathcal{L}_{PL}(\Sigma))$

Simulation mehrsortiger Logiken in einsortigen Logiken

Übersetzung von Formeln

Es sei $\langle \mathcal{S}, \Sigma \rangle$ eine Signatur und $\mathcal{V}$ eine sortierte Variablenmenge.

Die Übersetzungsfunktion $*$: $\mathcal{For}(\mathcal{S}, \Sigma, \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{For}(\mathcal{L}_{PL}(\Sigma))$, ist wie folgt definiert:

- Wenn F eine atomare Formel ist, dann ist $F^* = F$.
- Wenn F, G Formeln sind und $\odot$ ein binärer Junktor, so sind
  - $[\neg F]^* = \neg[F]^*$
  - $[(F \odot G)]^* = (F^* \odot G^*)$
- Wenn F eine Formel ist und $v \in \mathcal{V}_s$, so sind
  - $[(\forall v)\, F]^* = (\forall v)\, (\mathrm{sort}_s(v) \supset F^*)$
  - $[(\exists v)\, F]^* = (\exists v)\, (\mathrm{sort}_s(v) \wedge F^*)$
- Wenn $\mathcal{C}$ eine Formelmenge ist, dann ist $\mathcal{C}^* = \{F^* \mid F \in \mathcal{C}\}$

- Die Übersetzungsfunktion $*$ bildet jede Formel der mehrsortigen Logik auf eine Formel der einsortigen Logik ab.

Beziehung: Mehrsortige Logik – Einsortige Logik

mehrsortige Logik	einsortige Logik
Sorten $\mathcal{S}$	Sortenprädikate $\mathcal{Sort}(\mathcal{S})$ Sortenaxiome $\mathcal{SorAx}(\mathcal{S})$
Σ	Stelligkeit, Sortenaxiome $\mathcal{SorAx}(\Sigma)$
Ober- / Untersorte	Ordnungsaxiome $\mathcal{OrdAx}(\mathcal{S})$
Formel F	F^* : Übersetzung der Formel
Sortierung quantifizierter Variablen	Relativierte Quantifikation
$(\forall v)\, F$	$(\forall v)\, (\mathrm{sort}_s(v) \supset F^*)$
$(\exists v)\, F$	$(\exists v)\, (\mathrm{sort}_s(v) \wedge F^*)$

Wirksamkeit der Sortenaxiome

Theorem

Es sei $\langle S, \Sigma\rangle$ eine Signatur,
$\mathcal{Ax}(\langle S, \Sigma\rangle) = \mathcal{SorAx}(S) \cup \mathcal{SorAx}(\Sigma) \cup \mathcal{OrdAx}(S)$,
$\mathcal{V}$ eine sortierte Variablenmenge,
$X \in \mathcal{gFor}(S, \Sigma, \mathcal{V})$ und $\mathbf{C} \subseteq \mathcal{gFor}(S, \Sigma, \mathcal{V})$.
Dann gilt:

$\mathcal{Ax}(\langle S, \Sigma\rangle) \models X^*$ genau dann, wenn $\models_{\langle S, \Sigma\rangle} X$

$\mathbf{C}^* \cup \mathcal{Ax}(\langle S, \Sigma\rangle) \models X^*$ genau dann, wenn $\mathbf{C} \models_{\langle S, \Sigma\rangle} X$

- Dieses Theorem sagt nur über Formeln, die sortenkorrkt gebildet sind, etwas aus.

Sortenlogik im maschinellen Beweisen

Sortierung ist nützlich / effizienzsteigernd

- bei der Unifikation
- Beim Finden von Widerspruchspaaren
  Tableaux-Kalkül, Resolution

Die Subsumptionsbeziehung spielt eine zentrale Rolle bei

- Beschreibungslogiken / terminologischen Logiken
- Bei unifikationsbasierten Ansätzen für die Semantik natürlicher Sprachen