
Logik & Semantik

3. Vorlesung

Aussagenlogik



Grundkonzeption mehrwertiger Logiken

Dreiwertige Logiken

- Material zur Geschichte der mehrwertigen Logik und ein hervorragender Überblick über verschiedene Systeme mehrwertiger Logiken findet sich insbesondere bei:
 - Rescher, N. (1969). *Many-valued Logic*. New York: McGraw Hill.
- Ein ausführliches – mathematisches – Lehrbuch zu mehrwertigen Logiken ist:
 - Gottwald, Siegfried (1989). *Mehrwertige Logik*. Berlin: Akademie-Verlag.

Zweiwertige Logik – Mehrwertige Logiken

- Die klassische Logik ist *zweiwertig*, d.h. die Interpretationen finden über einer zweielementigen Menge von Wahrheitswerten statt, z.B. $\text{Tr} = \{t, f\}$
- Die Zweiwertigkeit spielt in einigen zentralen Prinzipien der klassischen Logik eine wesentliche Rolle, etwa im:
 - Prinzip vom Verbot des Widerspruchs:
Unerfüllbarkeit von $(P \wedge \neg P)$
 - Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten:
Allgemeingültigkeit von $(P \vee \neg P)$

} Bivalenz-
prinzipien

aber.....“muss das eigentlich so sein?“

- zweielementige Mengen von Wahrheitswerten:
 $\text{Tr} = \{t, f\}$ ist eine Wahl, häufig wird – wie bekannt sein sollte – auch $\text{Tr} = \{1, 0\}$ verwendet.
Was eigentlich relevant ist, ist das systematische Verhalten dieser Wahrheitswerte unter den ein- und zweistelligen Operatoren über Tr .
- Zu beachten ist, dass in klassischen zweiwertigen Logiken, die beiden oben aufgeführten Prinzipien „zusammenfallen“, sie sind ein Spezialfall des Zusammenhangs zwischen der Allgemeingültigkeit einer Formel, der Unerfüllbarkeit ihrer Negation und der Dualität von Disjunktion und Konjunktion.

Mehrwertige Logiken – Grundkonzeption

Der Interpretationsbereich mehrwertiger Logiken

- ist eine Wahrheitswertmenge Tr_n mit $n (> 2)$ Wahrheitswerten.

Mehrwertige Logiken unterscheiden sich u.a. darin,

- welche „Bedeutung“ den Wahrheitswerten zugewiesen wird, d.h. was die zusätzlichen Wahrheitswerte ausdrücken sollen,
 - z.B. *unbekannt, unbestimmt, undefiniert, sinnlos,...*
- welche Wahrheitswertfunktionen den ‚Standardjunktoren‘ zugeordnet werden,
- was als Tautologie angesehen wird.
- Die intendierte Interpretation bestimmt
 - die Wahl der Wahrheitswertfunktionen
 - die Charakterisierung der Tautologien

- Zu Interpretationen des dritten „Wahrheitswertes“ vgl. die einführende Übersicht zu dreiwertigen Logiken bei Rescher (1969).

Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
 - Keine Revision erforderlich, jede logische Sprache kann mehrwertig interpretiert werden
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
 - sind bei mehrwertigen Logiken neu zu spezifizieren !
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
 - müssen für mehrwertige Logiken angepasst werden !
- Ableitungs-, Beweisverfahren
 - müssen für mehrwertige Logiken angepasst bzw. neu entwickelt werden!

Dreiwertige Systeme $Tr_3 = \{t, f, i\}$

- Wir nennen eine Interpretation eines Junktors in einer mehrwertigen Logik **konservative Erweiterung**, wenn sie für die Wahrheitswerte **t** und **f** mit der Interpretation der klassischen, zweiwertigen Logik übereinstimmt.
- Für die Negation gibt es drei Möglichkeiten der konservativen Erweiterung.
- Nur bei \neg_i hat die doppelt-negierte Formel denselben Wahrheitswertverlauf wie die unnegierte Formel.

	\neg_t	\neg_i	\neg_f
t	f	f	f
i	t	i	f
f	t	t	t

Das dreiwertige System von Łukasiewicz: L_3

- $Tr_3 = \{t, f, i\}$
Der Wahrheitswert i steht für „indetermined“ (unbestimmt, unbekannt).
- \neg_i : „Wenn P unbestimmt ist, dann ist auch nicht-P unbestimmt“
- Dreiwertige Wahrheitswertfunktionen als konservative Erweiterung zweiwertiger WW-Funktionen

	\wedge_3			\vee_3			\supset_3		
	t	i	f	t	i	f	t	i	f
t	t		f	t		t	t		f
i									
f	f		f	t		f	t		t

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik

3 – 6

- Die Interpretation des dritten Wahrheitswertes als „unbestimmt“ ist auch im Bereich der Datenbanken häufig anzutreffen. Dies ist z.B. dann sinnvoll, wenn für eine Prädikation keine Information vorliegt.
- Beispiel: Für eine Person X ist das Geburtsdatum unbekannt. Es macht keinen Sinn, anzunehmen, X besäße kein Geburtsdatum. [Obwohl wir es in relationalen Datenbanken mit prädikatenlogischen, d.h. nicht mit aussagenlogischen, Konzeptionen zu tun haben, soll hier weiterhin am Datenbankbeispiel argumentiert werden.
- Wenn geburtsdatum (X) = „no info“, dann ergibt sich:

$$v(\text{geb.dat}(x) < \text{„1.1.1980“}) = i$$
 Für $v(\text{geb.dat}(x) \geq \text{„1.1.1980“})$ ergibt sich dann die folgende Rechnung:

$$v(\text{geb.dat}(x) \geq \text{„1.1.1980“}) = v(\neg (\text{geb.dat}(x) < \text{„1.1.1980“}))$$

$$= \neg i = i$$

Das System L_3 : Einige zweistellige Wahrheitswertfunktionen

- Die Erweiterung durch Ordnung der Wahrheitswerte

$f < i < t$

	\wedge_3			\vee_3			\supset_3		
	t	i	f	t	i	f	t	i	f
t	t	i	f	t	t	t	t	i	f
i	i	i	f	t	i	i	t	t	i
f	f	f	f	t	i	f	t	t	t

der „falscheste“ der „wahrste“ ??

- Łukasiewicz Zielsetzung: $(P \supset P)$ soll eine Tautologie sein.

Łukasiewiczs Wahl (d.h. Definition), für die Implikation im Fall (indefinit,indefinit) den Wahrheitswert „wahr“ zuzuweisen, ist nicht durch die intendierte Interpretation, d.h. $i \approx$ „unbestimmt“, gerechtfertigt.

Vielmehr wird diese Definition durchgeführt, um für $P \supset P$ die Auswertung zu „wahr“ sicherzustellen.

Die Aussage ‚wenn es übermorgen regnet, dann regnet es übermorgen‘ soll also auf jeden Fall als wahr angesehen werden, unabhängig davon, welchen Wahrheitswert wir der Aussage ‚übermorgen regnet es‘ zuordnen.

- Łukasiewicz hat auch noch weitere Symbole eingeführt um neben den oben angegebenen ‚schwachen‘ Formen der Konjunktion und Disjunktionen noch ‚stärkere‘ Formen bereitzustellen, die sich vergleichbar der oben angegebenen Implikation verhalten.

Aufgabe 3-1:

In einer dreiwertigen Logik gibt es grundsätzlich $3^5 = 243$ Möglichkeiten einen binären Junktore konservativ zu erweitern. Geben Sie für die Konjunktion und die Disjunktion systematische Prinzipien an, die die Wahl einschränken können. Können Sie die Wahl, die Łukasiewicz getroffen hat, mit diesen Prinzipien begründen?

Das System L_3 : $Tr_3 = \{1, 1/2, 0\}$

	\neg	\wedge_3			\vee_3			\supset_3		
		1	1/2	0	1	1/2	0	1	1/2	0
1	0	1	1/2	0	1	1	1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2	0	1	1/2	1/2	1	1	1/2
0	1	0	0	0	1	1/2	0	1	1	1

- $v(\neg X) = 1 - v(X)$
- $v(X \wedge Y) = \min(v(X), v(Y))$
- $v(X \vee Y) = \max(v(X), v(Y))$
- $v(X \supset Y) = \min(1, 1 - (v(X) - v(Y)))$
 $= 1 - \max(0, (v(X) - v(Y)))$

- Hier wird die Ordnung der Wahrheitswerte in $Tr_3 = \{1, 1/2, 0\}$ durch die $<$ -Ordnung über den *rationalen Zahlen* vermittelt.
- Entsprechend wird auch eine Charakterisierung der Wahrheitswertfunktionen durch arithmetische Funktionen über \mathbb{Q} vorgenommen.
- Für die starke Konjunktion wählt Łukasiewicz $\max(0, v(X) + v(Y) - 1)$, für die starke Disjunktion $\min(1, v(X) + v(Y))$.

Endlichwertige Logiken L_n

- Entsprechend zum dreiwertigen Łukasiewicz System kann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein System L_n definiert werden:

$$Tr_n = \{ i/(n-1) \mid i \in \{0, \dots, n-1\} \}$$

- $v(\neg X) = 1 - v(X)$
- $v(X \wedge Y) = \min(v(X), v(Y))$
- $v(X \vee Y) = \max(v(X), v(Y))$
- $v(X \supset Y) = \min(1, 1 - (v(X) - v(Y)))$
 $= 1 - \max(0, (v(X) - v(Y)))$

Aufgabe (ohne Nummer)

- Inwiefern unterscheiden sich die mehrwertigen Systeme L_n für geradzahlige und ungeradzahlige n ?
- Gibt es systematische Beziehungen zwischen den Tautologie-Mengen verschiedener mehrwertiger Systeme? Welche (bzw. welche Beziehungen zwischen den Anzahlen der Wahrheitswertmengen spielen dabei eine Rolle)?

Präsenzaufgabe 3-2



Berechnen Sie das Wahrheitswertverhalten der Formel

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q):$$

im System L_3 .

Vergleichen Sie das Wahrheitswertverhalten von

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$$

unter jeweils allen Interpretation im System der klassischen zweiwertigen Logik und im System L_3 .

Bivalenzprinzipien in L_3

Verbot des Widerspruchs: $\neg(P \wedge \neg P)$

Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten: $(P \vee \neg P)$

- haben denselben Wahrheitswertverlauf,
 - haben aber keinen konstant wahren Wahrheitswertverlauf.
- sind keine Tautologien (... im klassischen Sinn)

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$\neg(P \wedge \neg P)$	$(P \vee \neg P)$
t	f	f	t	t
i	i	i	i	i
f	t	f	t	t

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik

3 – 11

- Die beiden wichtigen Bivalenzprinzipien *Verbot des Widerspruchs* und *Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten* sind im System L_3 nicht unter jeder Belegung wahr.

Wahrheitswertverhalten in L_3

Feinere Unterscheidung als in zweiwertiger Logik

- $(P \supset Q)$ und $(\neg P \vee Q)$
- haben nicht denselben Wahrheitswertverlauf,
- sind nicht äquivalent (... im klassischen Sinn)

	$P \supset Q$			$\neg P \vee Q$		
$P \setminus Q$	t	i	f	t	i	f
t	t	i	f	t	i	f
i	t	t	i	t	i	i
f	t	t	t	t	t	t

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik

3 – 12

- Dies bedeutet, dass Umformungsverfahren, die im maschinellen Beweisen der klassischen zweiwertigen Logik erfolgreich und insbesondere zulässig sind, in der L_3 -Logik nicht unesehen angewendet werden dürfen.
- Zu klären ist also, was eigentlich Äquivalenz in einer mehrwertigen Logik bedeutet. Hiervon hängt auch ab, was überhaupt mit Umformungsverfahren erreicht werden kann.

Biimplikation in L_3



- bei üblicher Definition der Biimplikation
- nur bei $v(P)=v(Q)$ ergibt sich $v((P \equiv Q)) = t$
- identische Wahrheitswertverläufe sichern, dass $(P \equiv Q)$ den konstant wahren Wahrheitswertverlauf hat.

P	Q	P \supset Q	Q \supset P	(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)
t	t	t	t	t
t	i	i	t	i
t	f	f	t	f
i	t	t	i	i
i	i	t	t	t
i	f	i	t	i
f	t	t	f	f
f	i	t	i	i
f	f	t	t	t

- Insbesondere hat $(P \equiv P)$ den konstant wahren Wahrheitswertverlauf.

Gültigkeit – Unerfüllbarkeit in L_3

Definitionsversuch 1

- Eine Formel X heißt genau dann *gültig in L_3* , wenn für jede Interpretation ν gilt: $\nu(X) = \mathbf{t}$.
 - Eine Formel X heißt genau dann *unerfüllbar in L_3* , wenn für jede Interpretation ν gilt: $\nu(X) = \mathbf{f}$.
- $(P \vee \neg P), \neg(P \wedge \neg P)$ sind nicht gültig
 $(P \wedge \neg P)$ ist nicht unerfüllbar } im Sinne von Def.vers.1

Definitionsversuch 2

- Eine Formel X heißt genau dann *gültig in L_3^** , wenn für jede Interpretation ν gilt: $\nu(X) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{i}\}$.
- $(P \vee \neg P), \neg(P \wedge \neg P)$ sind gültig in L_3^*

- L_3^* ist ein alternatives System einer dreiwertigen Logik, das zwar über die gleichen Interpretationsvorschriften verfügt, aber andere Formeln als gültig (= allgemeingültig) ausweist.
- Dass $(P \vee \neg P), \neg(P \wedge \neg P)$ gültig in L_3^* sind, zeigt auf, dass diese Formeln nicht unbedingt die Zweiwertigkeit der Logik ausdrücken.

C₂-Gültigkeit, L₃-Gültigkeit, L^{*}₃-Gültigkeit

- L^{*}₃-gültige Formeln sind C₂-gültig, $\mathit{Taut}(L^*_3) \subseteq \mathit{Taut}(C_2)$
denn L^{*}₃-Interpretationen sind konservative Erweiterungen von C₂-Interpretationen
- L₃-gültige Formeln sind L^{*}₃-gültig, $\mathit{Taut}(L_3) \subseteq \mathit{Taut}(L^*_3)$
denn, wenn $v(X) = \mathbf{t}$, dann: $v(X) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{i}\}$.

- Genauer, es gilt
→ $\mathit{Taut}(L_3) \subsetneq \mathit{Taut}(L^*_3) \subsetneq \mathit{Taut}(C_2)$

C₂ – Klassische zweiwertige Logik

Eine C_2 -gültige Formel, die nicht L^*_3 -gültig ist

$$F = \neg(P \supset \neg P) \vee \neg(\neg P \supset P)$$

P	$\neg P$	$(P \supset \neg P)$	$\neg(P \supset \neg P)$	$(\neg P \supset P)$	$\neg(\neg P \supset P)$	F
t	f	f	t	t	f	t
i	i	t	f	t	f	f
f	t	t	f	f	t	t

- Der Łukasiewiczsche Designentscheidung in Bezug auf $P \supset P$ (vgl. Folie 3-7) führt dazu, dass in der i-Zeile der obigen Tafel, bei allen komplexeren Formeln t bzw. f auftreten, aber nicht i, und insofern \vee (F) nicht zu i ausgewertet wird.

Designierte Wahrheitswerte

Sei $\mathbb{L} = (\mathcal{L}, \text{Tr}_n, \mathcal{V}_{\text{op}}, \text{DTr})$ ein interpretiertes logisches System

- charakterisiert durch
 - Syntax und wahrheitswertfunktionale Auswertung
 - eine Wahrheitswertmenge Tr_n ($n \geq 2$) und
 - eine Menge designierter Wahrheitswerte $\text{DTr} \subseteq \text{Tr}_n$
- X ist \mathbb{L} -gültig, bzw. eine \mathbb{L} -Tautologie, wenn $\mathcal{V}(X) \in \text{DTr}$ für jede Bewertung \mathcal{V} .

\mathbb{L}	Tr	DTr
C_2	$\{t, f\}$	$\{t\}$
L_3	$\{t, i, f\}$	$\{t\}$
L_3^*	$\{t, i, f\}$	$\{t, i\}$

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik

3 – 17

- L_3 und L_3^* unterscheiden sich also darin, dass L_3 die Menge $\{t\}$, und L_3^* die Menge $\{t, i\}$ als Menge der designierten Wahrheitswerte aufweist.
- Kontradiktionen (unerfüllbare Formeln) betreffen dann
 - Entweder *nicht designierte WWe*, also $\text{Tr} \setminus \text{DTr}$
 - Oder *anti-designierte WWe*: $\text{aDTr} \subseteq \text{Tr}$
 - Disjunktheit von DTr und aDTr muss nicht unbedingt gefordert werden.

Das System B_3 (D. Bochvar) :

$i \approx$ widersprüchlich / paradox / bedeutungslos

- Das Basisprinzip der Bochvar-Logik:
„Widersprüchlichkeit setzt sich durch“

	\wedge_{B_3}			\vee_{B_3}			\supset_{B_3}		
	t	i	f	t	i	f	t	i	f
t	t	i	f	t	i	t	t	i	f
i	i	i	i	i	i	i	i	i	i
f	f	i	f	t	i	f	t	i	t

- Es gibt keine B_3 -gültigen Formeln, wenn $DTr = \{t\}$.
- für den Fall $DTr = \{t, i\}$ gilt: $Taut(B_3) = Taut(C_2)$

- Es gibt keine B_3 -gültigen Formeln, wenn $DTr = \{t\}$, gilt natürlich nur, wenn die logischen Konstanten top und bottom nicht zur Formelmenge gehören. Genauer formuliert sollte man sagen: Wenn $DTr = \{t\}$, dann gibt es keine B_3 -gültigen Formeln, in denen top und bottom nicht vorkommen.
- Bochvar selbst verwendet die Formulierung „Quasi-Tautologie“, falls $v(X) = f$ für keine Bewertung v , also für den Fall $DTr = \{t, i\}$.

Bimplikation in B_3

bei üblicher Definition der Bimplikation

- nur bei $v(P)=v(Q)$ ergibt sich $v((P \equiv Q)) = t$
- aber identische Wahrheitswertverläufe sichern nicht, dass $(P \equiv Q)$ den konstant wahren Wahrheitswertverlauf hat.

P	Q	P \supset Q	Q \supset P	(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)
t	t	t	t	t
t	i	i	i	i
t	f	f	t	f
i	t	i	i	i
i	i	i	i	i
i	f	i	i	i
f	t	t	f	f
f	i	i	i	i
f	f	t	t	t

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik

3 – 19

- Insbesondere hat $(P \equiv P)$ keinen konstant wahren Wahrheitswertverlauf.

Das System K_3 : Kleenes System einer „epistemischen Logik“

- Die von Kleene intendierte Interpretation von „i“ ist *undefiniert / unbekannt*.

	\wedge_{K_3}			\vee_{K_3}			\supset_{K_3}		
	t	i	f	t	i	f	t	i	f
t	t	i	f	t	t	t	t	i	f
i	i	i	f	t	i	i	t	i	i
f	f	f	f	t	i	f	t	t	t

- $(P \supset Q)$ und $(\neg P \vee Q)$ haben den gleichen Wahrheitswertverlauf
- $v(P) = i$ führt zu $v((P \supset P)) = i$

- Der Definitionskontext sind Untersuchungen zur Berechenbarkeit im Rahmen rekursiver Funktionen.

Das System K_3 : $Tr_3 = \{1, 1/2, 0\}$

	\neg	\wedge_3			\vee_3			\supset_3		
		1	1/2	0	1	1/2	0	1	1/2	0
1	0	1	1/2	0	1	1	1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2	0	1	1/2	1/2	1	1/2	1/2
0	1	0	0	0	1	1/2	0	1	1	1

- $v(\neg X) = 1 - v(X)$
- $v(X \wedge Y) = \min(v(X), v(Y))$
- $v(X \vee Y) = \max(v(X), v(Y))$
- $v(X \supset Y) = \max(1 - v(X), v(Y))$

- Hier wird die Ordnung der Wahrheitswerte in $Tr_3 = \{1, 1/2, 0\}$ durch die $<$ -Ordnung über den *rationalen Zahlen* vermittelt.
- Entsprechend wird auch eine Charakterisierung der Wahrheitswertfunktionen durch arithmetische Funktionen über \mathbb{Q} vorgenommen.
- Entsprechend zum dreiwertigen Kleene-System kann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein System K_n definiert werden.

Bimplikation in K_3

bei üblicher Definition der Bimplikation

- nur bei $v(P)=v(Q)$ ergibt sich $v((P \equiv Q)) = t$
- aber identische Wahrheitswertverläufe sichern nicht, dass $(P \equiv Q)$ den konstant wahren Wahrheitswertverlauf hat.

P	Q	P \supset Q	Q \supset P	(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)
t	t	t	t	t
t	i	i	t	i
t	f	f	t	f
i	t	t	i	i
i	i	i	i	i
i	f	i	t	i
f	t	t	f	f
f	i	t	i	i
f	f	t	t	t

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik

3 – 22

- Insbesondere hat $(P \equiv P)$ keinen konstant wahren Wahrheitswertverlauf.

Tautologien und Kontradiktionen in K_3

Tautologien

- $DTr = \{t\}$ keine K_3 -gültigen Formeln, da X zu i ausgewertet wird, wenn alle Aussagensymbole in X mit i belegt werden.
- $DTr = \{t, i\}$ $Taut(K_3) = Taut(C_2)$

Kontradiktionen / unerfüllbare Formeln

- Charakterisierung durch nicht-designierte WWe:
 X unerfüllbar in K_3 , wenn für jedes v gilt: $v(X) = f \in Tr \setminus DTr$
Dann gibt es keine K_3 -unerfüllbaren Formeln.
- Charakterisierung durch anti-designierte WWe: $aDTr = \{i, f\}$

- Der Fall $DTr = \{t\}$:
Die Formulierung „keine K_3 -gültigen Formeln“ ist nur dann korrekt, wenn wir K_3 ohne die logischen Konstanten „top“ und „bottom“ definiert haben. Wenn „top“ und „bottom“ zu K_3 gehören, dann gibt es eine (*triviale*) Tautologie, nämlich „top“ und weitere, in denen top oder bottom als Teilformeln auftreten (wie „top oder P“ und „nicht bottom“). Entsprechend gibt es eine triviale Kontradiktion, nämlich „bottom“.
- **Aufgabe 3-3**
Beweisen Sie: Im Fall $DTr = \{t, i\}$ gilt. $Taut(K_3) = Taut(C_2)$
- **Aufgabe 3-4**
Welche Einschränkungen ergeben sich für die Wahl von DTr und $aDTr$ und die Interpretation der Negation (s. 3-5), wenn für eine zu entwickelnde dreiwertige Logik folgendes gelten soll:
 - 1) Es gibt Tautologien, die keine Kontradiktionen sind.
 - 2) Es gibt Kontradiktionen, die keine Tautologien sind.
 - 3) X ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg X$ eine Kontradiktion ist.
 - 4) X ist genau dann eine Kontradiktion, wenn $\neg X$ eine Tautologie ist.
- Ergeben sich zusätzliche Schwierigkeiten, wenn wir zusätzlich folgendes erreichen wollen:
 - 5) Keine Formel ist sowohl Tautologie als auch Kontradiktion.
 - 6) (Vollständigkeit): Für jeden möglichen Wahrheitswertverlauf gibt es eine Formel, die diesen Wahrheitswertverlauf aufweist.

Ein Zwischenfazit zu mehrwertigen Logiken

Es gibt zahlreiche Parameter um die Semantik einer mehrwertigen Logik zu spezifizieren.

- Anzahl der Wahrheitswerte – Kardinalität von Tr
 - $|\text{Tr}| = 3$ vs. $|\text{Tr}| > 3$
 - $|\text{Tr}|$ endlich vs. $|\text{Tr}|$ nicht-endlich
- Festlegung der interpretierenden Wahrheitswertfunktion für Junktoren
- Designierte und anti-designierte WWe: Charakterisierung von Gültigkeit, Erfüllbarkeit, Folgerbarkeit, Äquivalenz.
- Die hier behandelten Junktorensysteme sind nicht vollständig:
 - Es gibt Wahrheitswertverläufe ohne zugehörige Formel.

Aufgabe 3-5

- Geben Sie eine Definition von Äquivalenz (nicht Biimplikation !) für mehrwertige Logiken (insbesondere L_3 und K_3) an, und zeigen Sie, dass die Ersetzungstheoreme auch für diese Definition gelten.
- Welche unterschiedlichen Optionen gibt es je nach Wahl der designierten Wahrheitswerte?
- Gelten nach Ihrer Definition (bei welcher Wahl von (anti-) designierten Wahrheitswerten) folgende Aussagen:
 - 1) Alle Tautologien sind äquivalent.
 - 2) Alle Kontradiktionen sind äquivalent.
 - 3) Keine Tautologie ist zu einer Kontradiktion äquivalent.

Mehrwertige Logiken – nicht-endliche Menge von Wahrheitswerten

Bekanntestes Beispiel:

Lotfi Zadeh's Fuzzy Logic

$$\text{Tr}_{\text{FL}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \}$$

- Häufig – und auch erfolgreich – in Informatikanwendungen eingesetzter Formalismus
- Aber: Die Bezeichnung „Logik“ ist nur beschränkt gerechtfertigt:
 - Semantische Kategorisierungen und Beziehungen sind kaum ausgearbeitet.
 - Beweis- und Ableitungsverfahren entsprechen bestenfalls ansatzweise den Standards logischer Systemen.
- Eher *fuzzy reasoning* als *fuzzy logic*

Überendlich-wertige Logiken:

Eine in Informatikanwendungen wichtige Variante der mehrwertigen Logiken ist die von Zadeh eingeführte *fuzzy logic*. Hierbei wird die Menge der *Reellen Zahlen* als Menge Tr der Wahrheitswerte angenommen.

- Zadeh, Lotfi A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8. 338–353.
- Zadeh, Lotfi A. (1975). Fuzzy logic and approximate reasoning. *Synthese*, 30. 407–428.

Programmierübung

Verwenden Sie die Dateien zur Aussagenlogik

- Einige Prädikate sind schon für die mehrwertige Logik vorbereitet (Wahrheitstafelausgabe, Belegungsgenerierung), hier müssen nur Kommentarklammern entfernt werden.
- Ändern Sie die Formelevaluation so, dass die Berechnung der L_3 oder der K_3 -Logik entspricht.
- Prüfen Sie, ob Sie korrekt gearbeitet haben, indem sie geeignete Formeln evaluieren.
- Ändern Sie die Bestimmung von Tautologien, Kontradiktionen etc. im Sinne der Vorschläge dieser Sitzung und evaluieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3-6

In der klassischen zweiwertigen Logik ist das Junktoreninventar $\{\neg, \vee\}$ vollständig: Zu jeder endlichen Menge von Aussagensymbolen und jedem erdenklichen Wahrheitswertverlauf dazu gibt es eine Formel, in der nur diese Junktoren auftreten und die den gegebenen Wahrheitswertverlauf hat.

Beschränkt man sich in der 3-wertigen Logik auf konservative Erweiterungen von ‚klassischen Junktoren‘, so erhält man kein vollständiges Junktoreninventar.

- a) Geben Sie einen (dreiwertigen) Wahrheitswertverlauf an, für den es keine Formel gibt, die den WWV aufweist und nur ‚klassische Junktoren‘ verwendet.
- b) Erläutern Sie, warum Sie der Meinung a) sind und geben Sie die Beweisidee an.
- c) Führen Sie den Beweis im Detail aus.