Logik & Semantik
5. Vorlesung
Tableau-Verfahren (Aussagenlogik)

Tableau-Verfahren

- Die Grundidee
- Basisdefinitionen
- Ableitungen mit Tableaux

Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
- Ableitungs-, Beweisverfahren
  - *Widerlegungsverfahren (refutation)*
    - sind eine spezielle Klasse von Beweisverfahren
    - basieren auf der Aufdeckung von Inkonsistenz in Formelmengen

Resolutionsverfahren	Konjunktive Normalform Klauselform
Tableau-Verfahren	Disjunktive Normalform Dualklauselform

Eine kurze Wiederholung

- Aussagensymbole, ihre Negationen und die beiden logischen Konstanten $\perp$, $\top$ bilden die Menge der *Literale*.
- Eine *duale Klausel* ist ein generalisierte Konjunktion $\langle X_1, X_2, \dots X_n \rangle$, in der alle Elemente Literale sind.
- Eine Formel ist in *disjunktiver Normalform*, wenn sie eine Disjunktion $[D_1, D_2, \dots D_n]$ von dualen Klauseln D_i ist.

Eine Disjunktion $[X_1, X_2, \dots X_n]$

- ist genau dann unerfüllbar, wenn alle X_i unerfüllbar sind.

Eine Konjunktion von Literalen $\langle X_1, X_2, \dots X_n \rangle$

- ist genau dann unerfülllbar, wenn für ein i $X_i = \perp$ oder für ein i und ein j gilt: $X_i = \neg X_j$

- s. Definition 2.8.2, Definition 2.8.3

Mögliche Verfahren

zur (Un-)Erfüllbarkeitsprüfung einer Formel F

- Bilde die Disjunktive Normalform $[D_1, D_2, \ldots D_n]$ zu F
- Lösche alle dualen Klauseln D_i, die $\perp$ oder ein Paar $X, \neg X$ enthalten.
- F ist genau dann unerfüllbar, wenn das Resultat [ ] ist.

➢ Dies ist die Grundidee des aussagenlogischen Tableau-Verfahrens

Tableau-Verfahren: Formelmengen

Ziel: Prüfung der (Un-)Erfüllbarkeit einer Formelmenge

- Erstellung einer einzigen Formel, die der DNF der Konjunktion der Formeln aus der Menge entspricht führt u.U. zu sehr langen Formeln, in denen wiederholt Ersetzungen durchzuführen sind.

Tableaux

- Datenstrukturen, die Formeln entsprechend organisieren, dabei aber bei der Verarbeitung einfacher zu handhaben sind

Über Aussagenlogik hinaus

- Die Grundideen verallgemeinern: Von DNF-Erzeugung zu Modell-Konstruktion.

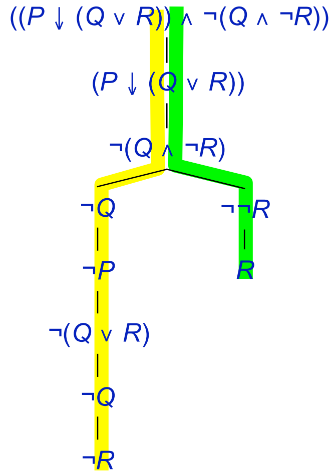
Tableau

Ein (semantisches) Tableau ist ein Baum *T*,

mit Formeln als Knotenmarkierungen, aufgebaut nach bestimmten Regeln

Ein Tableau-Zweig ist ein nicht-verzweigender, zusammenhängender Teilgraph, der die Wurzel und ein Blatt des Baumes enthält.

Als Variable für Zweige verwenden wir z.B. Θ



Varianten

Markierte Tableaux
  Knoten enthalten Formeln plus Markierungen

Formelmengentableaux
  Knoten enthalten Formelmengen

- Die in dieser Vorlesung hauptsächlich verwendete Variante der Tableaux-Verfahren ist die, die auch Fitting (1996, p.41ff) vorstellt.
- Bei Ben-Ari (2001, p.29ff) findet man eine Variante, in der Formelmengen an den Knoten stehen.
- Bei Nerode & Shore (1997) werden markierte Tableaux verwendet.
- Markierte Tableaux werden wir z.B. für mehrwertige Logiken kurz vorstellen.

Tableau-Expansion – Uniforme Notation

Gegeben ein Tableau *T*

Eine Expansion von *T* ist wie folgt möglich:
Sei Θ ein Zweig aus *T* und X ein Nicht-Literal aus Θ.

- Falls $X = \neg\top$, so verlängere Θ um $\bot$
- Falls $X = \neg\bot$, so verlängere Θ um $\top$
- Falls $X = \neg\neg Z$, so verlängere Θ um Z
- Falls X eine β-Formel, so verlängere Θ um die Verzweigung $\beta_1 \; \beta_2$
- Falls X eine α-Formel, so verlängere Θ um α_1 und um α_2

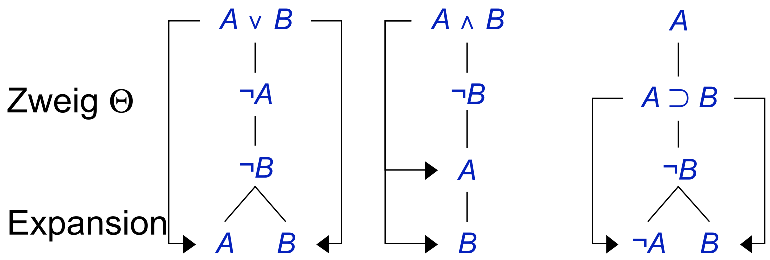
Tableau-Expansionsregeln

$$\frac{\neg\top}{\bot} \qquad \frac{\neg\bot}{\top} \qquad \frac{\neg\neg Z}{Z} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2} \qquad \frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

- Die Tableauexpansionsregeln stimmen mit den Dualklauselform-Regeln überein.

Tableaux – Beispiele (Expansion)

Konjunktiv			Disjunktiv		
α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$X \wedge Y$	X	Y	$\neg (X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg (X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$	$X \vee Y$	X	Y
$\neg (X \supset Y)$	X	$\neg Y$	$X \supset Y$	$\neg X$	Y



- Die Pfeile auf der linken und rechten Seite dienen nur der Veranschaulichung. Sie sind nicht Teil des Tableau. Insbesondere ist es nicht erforderlich, sie in der mündlichen Prüfung auch immer aufzumalen !

Tableau-Expansion

Ein Tableau-Zweig ist genau dann (un-)erfüllbar, wenn seine Formelmenge (un-)erfüllbar ist.

Beobachtungen (Hier informell, später im Detail)

Gegeben sei ein Tableau T, ein Zweig Θ aus T und T^* sei durch Expansion einer Formel von Θ aus T entstanden.

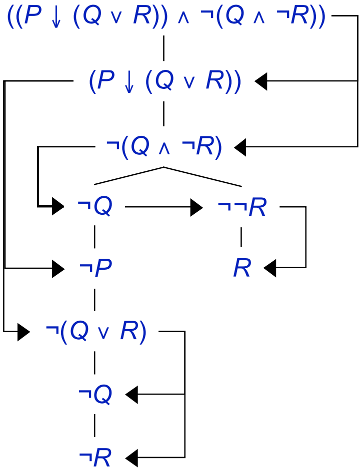
1. Wenn Θ zu Θ^* verlängert wird:
   Θ ist genau dann erfüllbar, wenn Θ^* erfüllbar ist.
2. Wenn Θ in die beiden Zweige Θ_1 und Θ_2 aufgespalten wird:
   Θ ist genau dann erfüllbar, wenn Θ_1 oder Θ_2 erfüllbar ist.

$$\frac{\neg\top}{\bot} \qquad \frac{\neg\bot}{\top} \qquad \frac{\neg\neg Z}{Z} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2} \qquad \frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

Aufgabe (ohne Nummer)

Geben Sie mögliche Expansionsregeln für die sekundären Junktoren an, die ebenfalls die in der Beobachtung geschilderte Bedingung erfüllen.

Eine Tableau-Expansion



Konjunktiv			Disjunktiv		
α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$X \wedge Y$	X	Y	$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$X \not\supset Y$	X	$\neg Y$	$\neg(X \not\supset Y)$	$\neg X$	Y
$X \not\subset Y$	$\neg X$	Y	$\neg(X \not\subset Y)$	X	$\neg Y$
$X \downarrow Y$	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg(X \downarrow Y)$	X	Y
$\neg(X \uparrow Y)$	X	Y	$X \uparrow Y$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X \supset Y)$	X	$\neg Y$	$X \supset Y$	$\neg X$	Y
$\neg(X \subset Y)$	$\neg X$	Y	$X \subset Y$	X	$\neg Y$
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$	$X \vee Y$	X	Y

- ACHTUNG: Dieses Tableau ist noch nicht vollständig expandiert. Was das heißt und warum das so ist: dazu später mehr.

Tableau zu einer Formelmenge

Definition 3.1.1

Sei $\boldsymbol{S} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine endliche Menge von Formeln aus $\mathcal{L}_{\mathrm{AL}}$.

1. Ein unverzweigtes Tableau, das genau die Knoten $A_1, \ldots, A_n$ hat, ist ein Tableau zu $\boldsymbol{S}$.
2. Falls $\boldsymbol{T}$ ein Tableau zu $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{T^*}$ das Resultat der Anwendung einer Tableauexpansionsregel auf $\boldsymbol{T}$ ist, so ist auch $\boldsymbol{T^*}$ ein Tableau zu $\boldsymbol{S}$.
3. Das sind alle Tableaux zu $\boldsymbol{S}$.

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ | \\ | \\ A_n \end{array}$$

$$\frac{\neg\top}{\bot} \qquad \frac{\neg\bot}{\top} \qquad \frac{\neg\neg Z}{Z} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2} \qquad \frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{array}}$$

Abgeschlossenes Tableau

Definition 3.1.2 (Abgeschlossenheit)

Ein Zweig Θ in einem Tableau ***T*** heißt genau dann *abgeschlossen*,

- wenn es eine Formel X gibt, so dass sowohl X als auch $\neg X$ in Θ auftreten, oder
- wenn $\perp$ in Θ auftritt.

$\Longrightarrow$Abschluss beruht auf Unerfüllbarkeit.

- Ein Zweig Θ heißt *atomar abgeschlossen*, falls Θ $\perp$ oder ein Paar komplementärer Literale A und $\neg A$ enthält.
- Ein Tableau ***T*** heißt (*atomar*) *abgeschlossen*, falls alle Zweige von ***T*** (atomar) abgeschlossen sind.

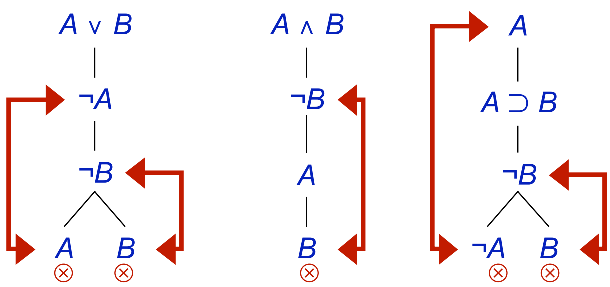
- Statt ‚abgeschlossen‘ sagen wir auch einfach ‚geschlossen‘
- Ist ein Zweig oder Tableau nicht abgeschlossen, dann nennen wir ihn/es auch ‚offen‘.
- Ein abgeschlossener Zweig muss nicht weiter expandiert werden. Es ist bereits offensichtlich, dass er nicht erfüllbar ist.
- Bei den offenen Zweigen ist hingegen noch nicht geklärt, ob sie erfüllbar sind.

Tableaux – Abschluss (Beispiele)

Definition 3.1.2 (Abgeschlossenheit)

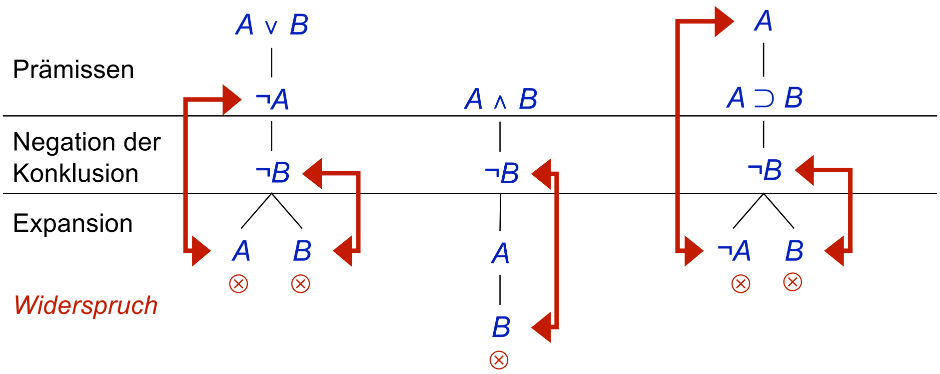
Ein Zweig Θ in einem Tableau ***T*** heißt genau dann *abgeschlossen*,

- wenn es eine Formel X gibt, so dass sowohl X als auch $\neg X$ in Θ auftreten, oder
- wenn $\bot$ in Θ auftritt.



Tableaux – Beispiele (Interpretation)

$\{A \vee B, \neg A\} \vdash_{pt} B$ $\{A \wedge B\} \vdash_{pt} B$ $\{A, A \supset B\} \vdash_{pt} B$



Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik 5 – 14

- $_{pt}$ steht für ‚propositional tableau' – ‚aussagenlogisches Tableau.

Tableau-Beweis

Definition 3.1.3

- Ein Tableau-Beweis für X ist ein abgeschlossenes Tableau zu $\{\neg X\}$.
- X ist genau dann ein Theorem des Tableau-Kalküls, wenn X einen Tableau-Beweis besitzt.
- Dass X ein Theorem des Tableau-Kalküls ist, symbolisieren wir durch $\vdash_{pt} X$.

Definition (3.9.3*)

- Ein Tableau-Beweis für X mit Prämissen aus **S** ist ein abgeschlossenes Tableau zu $\mathbf{S^*} \cup \{\neg X\}$, wobei **S*** eine endliche Teilmenge von **S** ist.
- X ist genau dann im Tableau-Kalkül ableitbar aus **S** (symbolisch $\mathbf{S} \vdash_{pt} X$), wenn X einen Tableau-Beweis mit Prämissen aus **S** hat.

- Tableau-Beweise sind Widerlegungsbeweise. D.h. einen Beweis für X zu führen, bedeutet, $\neg X$ zu widerlegen.
- Die Unterscheidung zwischen $\vdash_{pt} X$ bzw. $\vdash X$ werden wir vor allem dann verwenden, wenn der Tableau-Kalkül im Vergleich zu anderen Kalkülen betrachtet wird.

Aufgabe 5-1

Geben Sie Tableau-Beweise für die folgenden Formeln an:

- $(\neg P \supset Q) \supset ((P \supset Q) \supset Q)$
- $(P \uparrow P) \uparrow P$

Präsenzaufgabe 5-2

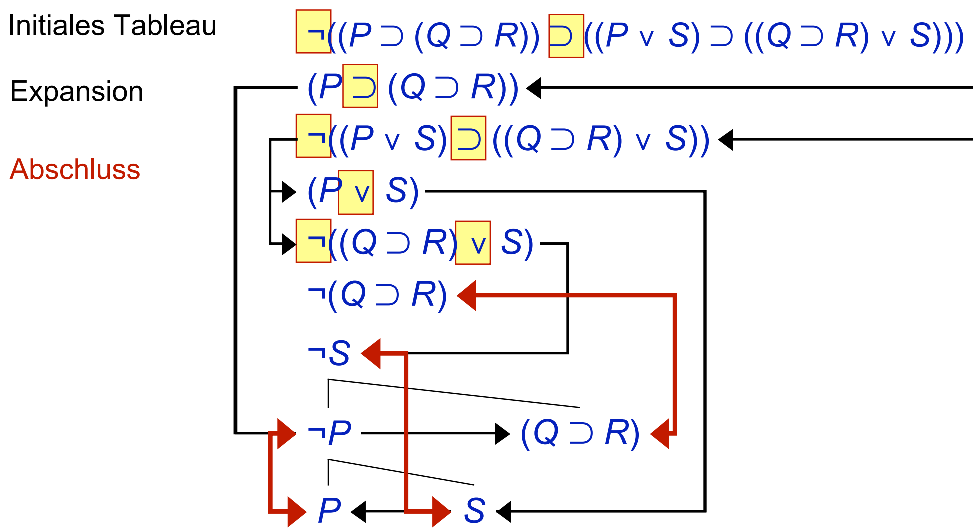
Beweisen Sie, dass die beiden in Vorl. 3 im Zusammenhang der Bivalenzprinzipien diskutierten Formeln

$\neg (P \wedge \neg P)$

$(P \vee \neg P)$

Theoreme des Tableau-Kalküls sind.

Beispiel: $\vdash_{pt}$ **((P ⊃ (Q ⊃ R)) ⊃ ((P ∨ S) ⊃ ((Q ⊃ R) ∨ S)))**



Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik 5 – 17

- Tableau-Expansion ist nicht-deterministisch. Es ist nicht festgelegt, welche Formel, d.h. welcher Knoten, expandiert wird.
- Das „Ende“ eines Tableau-Beweises, genauer der Schritt, wann die Tableau-Expansion nicht mehr weitergeführt wird, hängt von der grundsätzlichen Zielsetzung des Verfahrens ab, nämlich ein abgeschlossene Tableau zu erhalten.
- Hier liegt ein abgeschlossenes aber nicht atomar abgeschlossenes – Tableau vor.
  Dass dieses Tableau auch atomar abgeschlossen werden kann, zeigt die folgende Folie. (Aber dies erfordert weiteren Expansionsaufwand.)

Aufgabe (ohne Nummer)

Führen Sie den Beweis, d.h. die Tableau-Expansion, mit

a. der Strategie „Expandiere immer den obersten noch nicht bearbeiteten Knoten“

b. der Strategie „Expandiere immer den obersten noch nicht bearbeiteten Knoten, auf den eine α-Regel oder eine ¬¬-Regel anwendbar ist. Wende β-Regeln erst an, wenn keine α-Regel oder ¬¬-Regel anwendbar ist. “

durch.

Atomarer Abschluss (1. Version)

Initiales Tableau $\neg((P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \vee S) \supset ((Q \supset R) \vee S)))$

Expansion

$(P \supset (Q \supset R))$

$\neg((P \vee S) \supset ((Q \supset R) \vee S))$

$(P \vee S)$

Abschluss

$\neg((Q \supset R) \vee S)$

$\boxed{\neg}(Q \boxed{\supset} R)$

$\neg S$

$\neg P$ | P | S

$(Q \boxed{\supset} R)$

Q

$\neg R$

$\neg Q$ | R

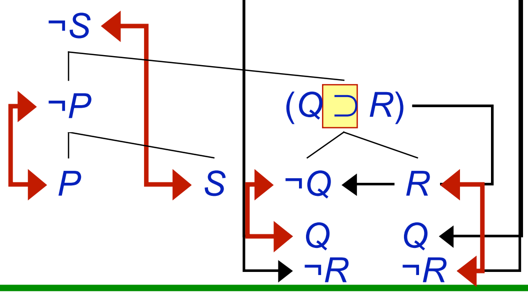
- Dadurch, dass ein atomarer Abschluss „angestrebt“ wird, müssen die Formel $\neg(Q \supset R)$ und $Q \supset R$ expandiert werden.

Atomarer Abschluss (2. Version)

Initiales Tableau $\neg((P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \vee S) \supset ((Q \supset R) \vee S)))$

Expansion
$(P \supset (Q \supset R))$
$\neg((P \vee S) \supset ((Q \supset R) \vee S))$
$(P \vee S)$

Abschluss
$\neg((Q \supset R) \vee S)$
$\boxed{\neg}(Q \boxed{\supset} R)$



- Wenn – wie im obigen Tableau – zuerst die Formel *(Q ⊃ R)* expandiert wird, muss anschließend die Formel ¬*(Q ⊃ R)* zweimal – nämlich für jeden der Zweige – expandiert werden.

Striktheit eines Tableau

Definition 3.1.4

- Ein Tableau ist genau dann *strikt*, wenn bei seiner Konstruktion auf keine Formel eine Tableauexpansion in einem Zweig mehrmals angewendet wurde.

Definition (vgl. Ben-Ari 2001, Def. 2.47)

- Ein Tableauzweig ist genau dann *vollendet*, wenn er atomar abgeschlossen ist oder keine strikte Expansion ermöglicht.
- Ein Tableau ist genau dann *vollendet*, wenn alle seine Zweige vollendet sind.

- Striktheit ist wichtig für die Implementation von maschinellen Verfahren des Tableau-Beweisens. (Termination!)
- Verzicht auf Striktheit ist häufig günstig, wenn Eigenschaften des Tableau-Verfahrens bewiesen werden.

Strikte Tableaux

Lemma

Wenn es zu ***S*** ein abgeschlossenes aussagenlogisches Tableau gibt, dann gibt es zu ***S*** auch ein abgeschlossenes striktes aussagenlogisches Tableau.

Beweisidee

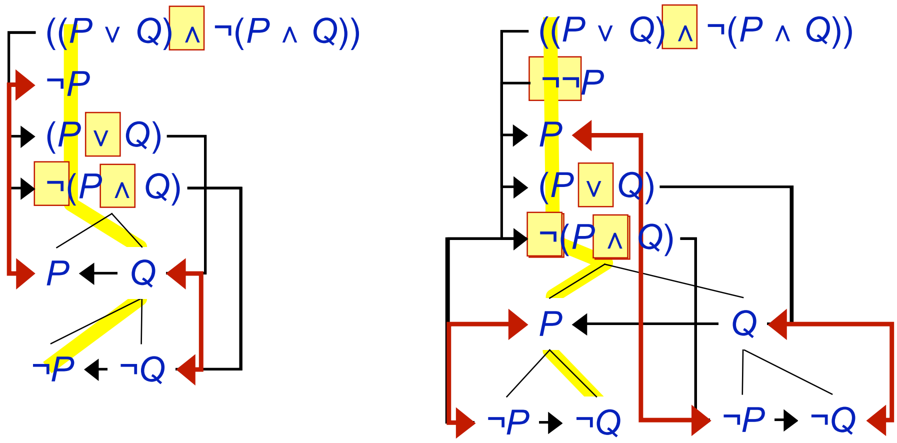
- Mehrfache Expansion der Formeln $\neg\top$, $\neg\bot$, $\neg\neg Z$, α, führt zur Wiederholung von Formeln im selben Zweig.
- Formelwiederholungen erhöhen die Abschlussmöglichkeiten nicht.
- Doppelte Expansion von β führt zu den vier Zweigen $<\Theta, \beta, \beta_1, \beta_2>$, $<\Theta, \beta, \beta_1, \beta_1>$, $<\Theta, \beta, \beta_2, \beta_2>$, $<\Theta, \beta, \beta_2, \beta_1>$.
- Sind diese abschließbar, dann sind auch $<\Theta, \beta, \beta_1>$ und $<\Theta, \beta, \beta_2>$ und sogar $<\Theta, \beta_1>$ und $<\Theta, \beta_2>$ abschließbar.

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik 5 – 21

- Die entsprechenden Bedingungen gelten nicht in der Modallogik oder der Prädikatenlogik.
- In beiden Logiken kann es erforderlich sein, bestimmte Formeln mehrfach zu expandieren.

- Hier nennen wir einen Zweig ‚abschließbar', wenn er zu einem abgeschlossenen Tableau expandiert werden kann.

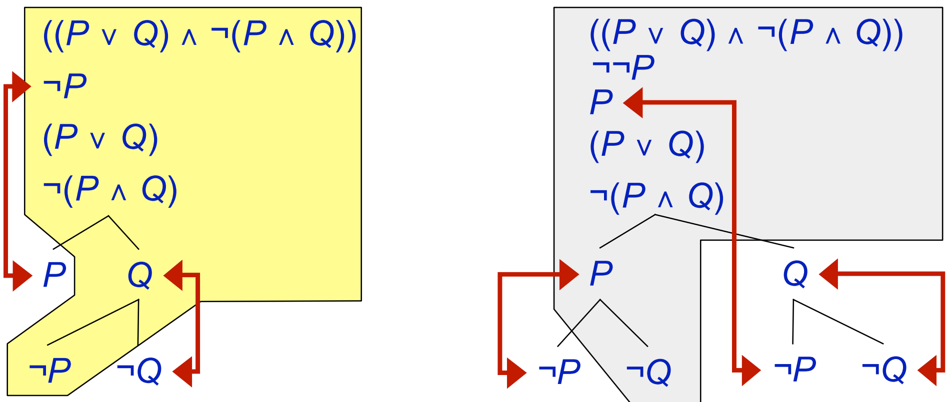
$\{((P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))\} \vdash_{pt} P$?
$\{((P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))\} \vdash_{pt} \neg P$?



Keine strikte Expansion möglich   Keine strikte Expansion möglich

Jeweils ein offener Zweig im vollendeten Tableau

Offene vollendete Zweige: Gegenbeispiele



	P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg\neg P$	$\neg(P \wedge Q)$	$(P \vee Q)$	$((P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$
v_1	f	t	t	f	f	t	t	t
v_2	t	f	f	t	t	t	t	t

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik 5 – 23

- Ist ein Zweig weder abgschlossen noch strikt expandierbar, so ist der Tableau-Beweis fehlgeschlagen. Entsprechend läßt sich aus den Formeln des Zweiges eine Interpretation ablesen, die die ursprüngliche Formelmenge erfüllt. Die Interpretation, die dem Zweig entspricht, macht genau die Aussagensymbole wahr, die als positive Literale in dem Zweig vorkommen, und die Aussagensymbole falsch, die in negativen Literalen des Zweiges vorkommen. (Kommt ein Aussagensymbol in einer komplexen Formel des Zweiges vor aber nicht in einem Literal, dann ist dessen Interpretation frei wählbar.)
- Man kann (im Einzelfall) leicht nachprüfen, dass unter der so definierten Interpretation tatsächlich jede Formel des Zweiges wahr wird. Zu zeigen, dass dieses auch garantiert werden kann, ist natürlich etwas aufwändiger.
- Im Fall der Aussagenlogik entspricht die Konstruktion der DNF und Löschung der unerfüllbaren Konjunktionen genau der Konstruktion von erfüllenden Interpretationen. Bei komplizierteren Logiken wird es dann darum gehen, das Tableau-Verfahren um solche Expansionsregeln zu ergänzen, die der Konstruktion erfüllender Interpretationen dienen.

Verzweigungsfaktor einer Formel

Definition

Der *Verzweigungsfaktor* $\boldsymbol{v}$: $\mathcal{For}(\mathcal{L}_{\mathrm{AL}}) \rightarrow \mathbb{N}$ ist definiert durch:

- Rekursionsbasis$_{\mathrm{UN}}$
  - Ist P ein Aussagensymbol, so ist $\boldsymbol{v}(P) = \boldsymbol{v}(\neg P) = 1$
  - $\boldsymbol{v}(\top) = \boldsymbol{v}(\bot) = 1$ $\quad$ $\boldsymbol{v}(\neg\top) = \boldsymbol{v}(\neg\bot) = 1$
- Rekursionsschritt$_{\mathrm{UN}}$
  - $\boldsymbol{v}(\neg\neg X) = \boldsymbol{v}(X)$
  - $\boldsymbol{v}(\alpha) = \boldsymbol{v}(\alpha_1) * \boldsymbol{v}(\alpha_2)$ $\quad$ $\boldsymbol{v}(\beta) = \boldsymbol{v}(\beta_1) + \boldsymbol{v}(\beta_2)$

Lemma

Ein striktes Tableau zu $\boldsymbol{S} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ hat maximal

$\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}(A_i)$ verschiedene Zweige.

Implementation eines Tableau-Beweisers: Skizze

Tableauexpansionsregeln

- werden als geordnet angesehen (Negation und α vor β).
- Tableau ist als Liste von Zweigen realisiert.
- Zweige sind Listen von Formeln.
- Test der Abgeschlossenheit: Test auf atomaren Abschluss

Ablauf des Verfahrens

- Alle möglichen Expansionen werden durchgeführt.
- Test auf Abgeschlossenheit erfolgt bei Ergänzung eines Literals
- Abgeschlossene Zweige werden aus dem Tableau entfernt.

- Ausführlich dargestellt in Abschnitt 3.2 von M. Fitting (1996)

- Test der Abgeschlossenheit: Hier tritt ein Effizienzdilemma auf:
  - Die Einschränkung, den atomaren Abschluss zu testen, erleichtert das Testen.
  - Andererseits kann dadurch der Expansionsaufwand ansteigen.

PROLOG-Programmpaket tableauSimpleAL

Tableau
- Liste von Zweigen

Zweig
- `open(List1, List2, List3)`
- `closed(List1, List2, List3)`

  `List1`: Liste mit noch nicht expandierten Formeln

  `List2`: Liste mit Literalen des Zweigs

  `List3`: Liste mit bereits expandierten Formeln (überflüssig !)

Knoten / Tableau-Einträge
- Formeln

PROLOG-Programmpaket tableauAL

Tableau

- Liste von Zweigen

Zweig

- `open(List1, List2, List3)`
  `List1`: Liste mit noch nicht expandierten Formeln
  `List2`: Liste mit Literalen des Zweigs
  `List3`: Liste mit bereits expandierten Formeln (überflüssig !)
- `closed(Justifications)`
  `Justifications`: Rechtfertigungen, z.B. verwendete Annahmen

Knoten / Tableau-Einträge

- verschiedene Varianten: Formeln, Formeln mit Rechtfertigungen, markierte Formeln mit Rechtfertigungen

Markierte Tableaux: Aussagenlogik

Knoten im Tableau tragen zusätzlich Markierungen

- Markierungen T und F für: Formel soll wahr bzw. falsch sein.
- Expansionsregeln

$$\frac{\mathrm{T}\ \neg X}{\mathrm{F}\ X} \qquad \frac{\mathrm{T}\ \alpha}{\begin{array}{c}\mathrm{T}\ \alpha_1\\ \mathrm{T}\ \alpha_2\end{array}} \qquad \frac{\mathrm{T}\ \beta}{\mathrm{T}\ \beta_1 \mid \mathrm{T}\ \beta_2} \qquad \frac{\mathrm{F}\ \neg X}{\mathrm{T}\ X} \qquad \frac{\mathrm{F}\ \beta}{\begin{array}{c}\mathrm{F}\ \beta_1\\ \mathrm{F}\ \beta_2\end{array}} \qquad \frac{\mathrm{F}\ \alpha}{\mathrm{F}\ \alpha_1 \mid \mathrm{F}\ \alpha_2}$$

- Abschlussregel: Ein Zweig des markierten Tableaus ist abgeschlossen,
  - wenn er für eine Formel X sowohl T X als auch F X
  - oder T $\bot$ oder F $\top$ enthält

- Beispiel: Nerode & Shore verwenden markierte Tableaux
- Auch der Übersichtsartikel von Fitting beginnt mit markierten Tableaux

- Kommt T X in einem Zweig eines markierten Tableau vor, so kann dies gedeutet werden als: Wenn es überhaupt ein Modell dieses Zweiges gibt, dann macht dieses Modell die Formel X wahr. Entsprechend besagt F X: Wenn es überhaupt ein Modell dieses Zweiges gibt, dann macht dieses Modell die Formel X falsch. Die Dualität der α **und β-Formeln führt damit dazu, dass T α und F β in vergleichbarer Weise expandiert werden.**

Markierte Tableaux: Mehrwertige Aussagenlogik

Grundidee

- Für jeden Wahrheitswert wird eine Markierung verwendet.
- Expansionsregeln müssen aus den Wahrheitswertverläufen der Junktoren generiert werden.
- Abschlussregel: Ein Zweig des markierten Tableaus ist abgeschlossen,
  - wenn er für eine Formel *X* Knoten mit verschiedenen Markierungen enthält
- Ein Theorem eines ‚mehrwertigen Tableau-Kalküls' ist eine Formel *X*, so dass es für jede Markierung M, die einem nicht-designierten Wahrheitswert entspricht, ein abgeschlossenes Tableau zu {M *X*} gibt.

- Viele Details hierzu (auch, wie man die Expansionsregeln gewinnt) findet man in
- Hähnle, Reiner (1999). Tableaux for many-valued logics. In M. D'Agostino, D.M. Gabbay, R. Hähnle & J. Posegga (eds.) Handbook of Tableau Methods (pp. 529–580). Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

- Hier gilt entsprechend: Kommt M *X* in einem Zweig eines markierten Tableau vor, so kann dies gedeutet werden als: Wenn es überhaupt eine sinnvolle Interpretation dieses Zweiges gibt, dann bewertet diese Interpretation die Formel *X* mit dem M entsprechenden Wahrheitswert.
- Dies motiviert die Abschlussbedingung: keine Interpretation kann dieselbe Formel mit mehreren Wahrheitswerten interpretieren.
- Auch die Expansionsregeln ergeben sich nun unmittelbar (s. nächste Folie)

Beispiel Tableau-Expansion in mehrwertiger Logik

Łukasiewicz: Konjunktion in L_3

- T steht für **t**
- F steht für **f**
- I steht für **i**
- Designierte Wahrheitswerte: {**t**} oder {**t**, **i**}

$\wedge_3$	t	i	f
t	t	i	f
i	i	i	f
f	f	f	f

$$\frac{\mathrm{T}\; X \wedge Y}{\begin{array}{c}\mathrm{T}\; X\\ \mathrm{T}\; Y\end{array}} \qquad \frac{\mathrm{F}\; X \wedge Y}{\mathrm{F}\; X \mid \mathrm{F}\; Y} \qquad \frac{\mathrm{I}\; X \wedge Y}{\begin{array}{c|c|c}\mathrm{T}\; X & \mathrm{I}\; X & \mathrm{I}\; X\\ \mathrm{I}\; Y & \mathrm{T}\; Y & \mathrm{I}\; Y\end{array}}$$

Tableau-Kalkül – Ausblick

Korrektheit & Vollständigkeit

- ist noch zu zeigen!

Erweiterbarkeit der Tableau-Konzeption

- durch Expansionsregeln für die zusätzlichen Operatoren
  - Prädikatenlogik: All- und Existenzquantor
  - Modallogik: Notwendigkeits- und Möglichkeitsoperator
- Gegebenenfalls durch Anpassung der Abschlussbedingungen

Tableau-basierte Theorembeweiser

- Sicherstellung der Termination
- Wann, wo und wie oft werden Tableauexpansionsregeln angewendet?

Aufgabe 5-3

a. **Überlegen Sie, wie die Expansionsregeln für Tableauxbeweise im Rahmen dreiwertige Łukasiewicz Systems für die Junktoren**
- Negation
- Disjunktion
- Implikation

formuliert werden müssen.

b. **Geben Sie Tableau-Beweise vermittels markierter Tableaux für das dreiwertige Łukasiewicz System für die folgenden Formeln an:**
- $\neg(((A \vee B) \wedge \neg A) \wedge \neg B)$
- $\neg((A \wedge B) \wedge \neg B)$
- $\neg((A \wedge (A \supset B)) \wedge \neg B)$