Logik & Semantik
6. Vorlesung
Tableaux

Tableaux-Verfahren

- Termination, Korrektheit und Vollständigkeit

$$\frac{\neg\top}{\bot} \qquad \frac{\neg\bot}{\top} \qquad \frac{\neg\neg Z}{Z} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2} \qquad \frac{\alpha}{\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}}$$

Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
- Ableitungs-, Beweisverfahren

Ziel

- Korrektheit: Das Verfahren darf nichts falsch machen !
  - Nur Tautologien sind beweisbar / Theoreme.
  - Nur folgerbare Formeln sind ableitbar.
- Vollständigkeit: Das Verfahren soll alles können.
  - Alle Tautologien sind beweisbar / Theoreme.
  - Alle folgerbaren Formeln sind ableitbar.

- Englische Begriffe:
- Korrekt(heit): sound(ness)
- Vollständig(keit): complete(ness)

AL-Tableaus: Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Ben-Ari (2001) 2.49)

Es sei ***T*** ein vollendetes Tableau für eine aussagenlogische Formel F. F ist genau dann unerfüllbar, wenn ***T*** abgeschlossen ist.

Vollständigkeit: Wenn F unerfüllbar ist, dann ist ***T*** abgeschlossen

Korrektheit: Wenn ***T*** abgeschlossen ist, dann ist F unerfüllbar.

Korollar (Ben-Ari (2001) 2.52)

Das Tableau-Verfahren ist eine Entscheidungsprozedur für die Gültigkeit aussagenlogischer Formeln.

→Korrektheit, Vollständigkeit, Termination

Zu beachten

- zu einer Formel F kann es mehrere vollendete Tableaux geben.

Leitfaden durch diese Sitzung (1)

Termination

- bei strikter Expansion
- Existenz eines vollendeten Tableaus

Korrektheit

Vollständigkeit

Kompaktheit

Existenz eines vollendeten Tableaus

Satz

Zu jeder endlichen Menge ***S*** von Formeln der Aussagenlogik gibt es mindestens ein (endliches) vollendetes Tableau.

- Wir beweisen allgemeiner

Satz

Zu jeder endlichen Menge ***S*** von Formeln der Aussagenlogik terminiert die strikte Tableau-Expansion stark.

- vgl. Ben-Ari (2001) Theorem 2.48

Termination

Satz

- Zu jeder endlichen Menge ***S*** von Formeln der Aussagenlogik terminiert die strikte Tableau-Expansion stark.

Beweis

- Wir greifen (natürlich) wieder auf Königs Lemma zurück.
- Wir bilden zu jeder Expansionsfolge einen Baum, dessen Knoten Tableau-Zweige sind.
  - Das initiale Tableau hat nur einen Zweig, dieser bildet die Wurzel des Baumes.
  - Jeder während der Expansion erzeugte Zweig bildet einen Knoten.
  - Die Kanten entsprechen den Expansionsschritten.
  - Verzweigungen entsprechen β-Expansionen.
  - Die Blätter sind die vollendeten Tableau-Zweige, die zusammen das vollendete Tableau bilden.

Termination (2)

Satz

- Zu jeder endlichen Menge ***S*** von Formeln der Aussagenlogik terminiert die strikte Tableau-Expansion stark.

Beweis (Fortsetzung)

- Als Rang eines Knotens bezeichnen wir die Summe der Anwendung der Funktion rang auf die Formeln des Zweiges, die noch nicht expandiert wurden.
- Der Rang der Menge ***S*** bildet eine obere Schranke für die Tiefe des Baumes und diese Tiefe entspricht der maximalen Zahl erforderlicher Expansionsschritte.
- Der Baum und damit auch die Anzahl der Expansionsschritte ist endlich (Königs Lemma !), da
  - der Baum endlich verzweigend ist und
  - jeder Zweig nur eine endliche Länge aufweist

- Die Endlichkeit des Baumes garantiert sogar die effektive Konstruierbarkeit des Tableaus (in endlicher Zeit) und damit die Entscheidbarkeit des Erfüllbarkeitsproblems für endliche Formelmengen.
- Für eine unendliche Formelmenge ***S*** funktioniert die obige Überlegung natürlich nicht, da es keine obere Schranke für die Länge der Tableau-Zweige geben könnte.

Leitfaden durch diese Sitzung (1)

✓**Termination**

Korrektheit

- Def: Erfüllbarkeit eines Tableau
- Theorem: Expansion erhält Erfüllbarkeit
- Theorem: Nur unerfüllbare Formelmengen haben ein abgeschlossenes Tableau
- Def: Tableau-Beweis, im Tableau-Kalkül ableitbar
- Ergebnis: Nur Tautologien haben einen Tableau-Beweis
- Ergebnis: Nur folgerbare Formeln sind im Tableau-Kalkül ableitbar

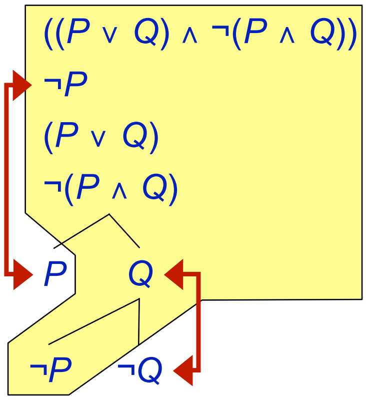
Vollständigkeit

Kompaktheit

Erfüllbarkeit von Tableaux

Definition 3.4.1 (Erfüllbarkeit)

- Eine Menge ***S*** von Formeln aus $\mathcal{L}_{AL}$ ist *erfüllbar*, falls eine Bewertung ν existiert, die alle Elemente aus ***S*** zu **t** auswertet.
- Ein Tableau-Zweig Θ ist *erfüllbar*, falls die Menge der Formeln aus Θ erfüllbar ist.
- Ein Tableau ***T*** ist *erfüllbar*, falls wenigstens ein Zweig von ***T*** erfüllbar ist.



	P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(P \vee Q)$	$((P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$
ν_1	f	t	t	f	t	t	t

Erfüllbarkeit und Tableauexpansion

Satz 3.4.2

Die Anwendung einer Tableauexpansionsregel auf ein erfüllbares Tableau führt zu einem erfüllbaren Tableau.

Beweis

- Es sei ***T*** ein erfüllbares Tableau.
- ***T*** besitzt einen erfüllbaren Zweig τ.
  Es gibt also eine Belegung ν, die alle Formeln in τ wahr macht.
- ***T**** sei das Ergebnis der Anwendung einer Tableau-Expansionsregel auf einen Zweig Θ von ***T***.
- Zu zeigen ist, dass ***T**** einen erfüllbaren Zweig hat.
- Genauer wird gezeigt, dass ν einen Zweig von ***T**** erfüllt.

Erfüllbarkeit und Tableauexpansion (Beweis)

Fall 1: $\Theta \neq \tau$

→ τ ist ein Zweig von ***T****, den ν erfüllt.

Fall 2: $\Theta = \tau$

- X sei die expandierte Formel aus Θ. Damit gilt: $\nu(X)$ = **t**

→ Fallunterscheidungen nach Expansionsregel.

- $X \neq \neg\top$, da $\nu(\neg\top)$ = **f**

Fall 2.a: $X = \neg\bot$

T* entsteht aus ***T*** durch Verlängerung von Θ um $\top$: $\Theta^* = < \Theta, \top >$

- $\nu(\top)$ = **t** **also:** ν erfüllt Θ^*

Fall 2.b: $X = \neg\neg Z$

T* entsteht aus ***T*** durch Verlängerung von Θ um Z : $\Theta^* = < \Theta, Z >$

- $\nu(\neg\neg Z)$ = **t**, damit auch $\nu(Z)$ = **t** **also:** ν erfüllt Θ^*

Erfüllbarkeit und Tableauexpansion (2. Forts.)

Fall 2.c: X ist eine α-Formel

T* entsteht aus ***T*** durch Verlängerung von Θ um α_1 und α_2:

$\Theta^* = < \Theta, \alpha_1, \alpha_2 >$

- **t** = $\nu(X) = \nu(\alpha_1) \wedge \nu(\alpha_2)$, also $\nu(\alpha_1) = \nu(\alpha_2) =$ **t**, also ν erfüllt Θ^*

Fall 2.d: X ist eine β-Formel

T* entsteht aus ***T*** durch Aufspaltung von Θ.

Es entstehen die Zweige $< \Theta, \beta_1>$ und $< \Theta, \beta_2>$

- Da **t** = $\nu(X) = \nu(\beta_1) \vee \nu(\beta_2)$, gilt $\nu(\beta_1) =$ **t** oder $\nu(\beta_2) =$ **t**

also: ν erfüllt einen der Zweige $< \Theta, \beta_1>$ oder $< \Theta, \beta_2>$

$$\begin{array}{c} \Theta \\ \wedge \\ \beta_1 \quad \beta_2 \end{array}$$

Korrektheit des Tableauverfahrens

Satz 3.4.3

Falls es zur Formelmenge ***S*** ein abgeschlossenes Tableau gibt, so ist ***S*** nicht erfüllbar.

Beweis

- Ein initiales Tableau zu ***S*** ist ein Zweig, der nur Formeln aus ***S*** enthält. (Def. 3.1.1)
- Alle Tableaux zu ***S*** sind daraus durch Expansionsregeln erzeugt. (Def.)
- Tableau-Expansionsregeln erhalten Erfüllbarkeit. (Satz. 3.4.2)
- Abgeschlossene Tableaux sind nicht erfüllbar. (Def. 3.1.2)
- Wenn ein abgeschlossenes Tableau zu ***S*** existiert, dann existiert ein unerfüllbares initiales Tableau zu ***S***.
- Wenn ein unerfüllbares initiales Tableau zu ***S*** existiert, dann ist ***S*** unerfüllbar.

- Natürlich gilt damit auch
- Wenn es zu einer Formelmenge mehrere vollendete Tableaux gibt, dann sind entweder alle abgeschlossen oder alle nicht abgeschlossen.
- Entsprechend ist es völlig egal, welches der möglichen Tableaux man erzeugt.

Tableau-Beweis

Definition 3.1.3

- Ein *Tableau-Beweis* für X ist ein abgeschlossenes Tableau zu $\{\neg X\}$.
- X ist genau dann ein *Theorem des Tableau-Kalküls*, wenn X einen Tableau-Beweis besitzt.
- Dass X ein Theorem des Tableau-Kalküls ist, symbolisieren wir durch $\vdash_{\mathbf{pt}} X$.

Definition (3.9.3*)

- Ein *Tableau-Beweis* für X *mit Prämissen aus* $\boldsymbol{S}$ ist ein abgeschlossenes Tableau zu $\boldsymbol{S}^* \cup \{\neg X\}$, wobei $\boldsymbol{S}^*$ eine endliche Teilmenge von $\boldsymbol{S}$ ist.
- X ist genau dann *im Tableau-Kalkül ableitbar aus* $\boldsymbol{S}$ (symbolisch $\boldsymbol{S} \vdash_{\mathbf{pt}} X$), wenn X einen Tableau-Beweis mit Prämissen aus $\boldsymbol{S}$ hat.

- Tableau-Beweise sind Widerlegungsbeweise. D.h. einen Beweis für X zu führen, bedeutet, $\neg X$ zu widerlegen.

Korrektheit des Tableauverfahrens

Theorem 3.4.4

Falls es für X einen Tableaubeweis gibt, so ist X gültig, d.h. eine Tautologie.

➔ Tableaubeweise sind korrekt.

Beweis

- X besitzt einen Tableaubeweis, (Voraussetzung)
- dann besitzt $\{\neg X\}$ ein abgeschlossenes Tableau, (Def. 3.1.3)
- dann ist $\neg X$ nicht erfüllbar, (Satz 3.4.3)
- dann ist X gültig.

Aufgabe (ohne Nummer)

Machen Sie sich klar, dass folglich aussagenlogische Tableaubeweiser korrekt sind, unabhängig davon, welche Restriktionen oder Strategien bei der Beweisführung eingesetzt werden.

Korrektheit des Tableauverfahrens

Theorem 3.9.4*

Wenn X mit dem Tableau-Kalkül aus einer Formelmenge $\boldsymbol{S}$ ableitbar ist, dann folgt X aus $\boldsymbol{S}$.

Beweis

- Voraussetzung: X ist mit dem Tableau-Kalkül aus $\boldsymbol{S}$ ableitbar.
- Dann gibt es eine endliche Teilmenge $\boldsymbol{S}^*$ von $\boldsymbol{S}$, so dass es ein abgeschlossenes Tableau zu $\boldsymbol{S}^* \cup \{\neg X\}$ gibt. (Def.)
- Dann ist $\boldsymbol{S}^* \cup \{\neg X\}$ nicht erfüllbar. (3.4.3)
- Und $\boldsymbol{S} \cup \{\neg X\}$ ist ebenfalls nicht erfüllbar.
- Damit folgt X aus $\boldsymbol{S}$.

Leitfaden durch diese Sitzung (3)

✓**Termination**

✓**Korrektheit**

Vollständigkeit

- Def: Hintikka-Mengen
- Theorem: Tableau-Zweige und Hintikka-Mengen
- Theorem: Hintikka-Mengen sind erfüllbar
- Theorem: Vollständigkeit bei strikter Expansion
- Def: Tableaukonsistenz
- Theorem: Tableaukonsistenz sichert Erfüllbarkeit
- Ergebnis: Alle Tautologien sind beweisbar
- Theorem: Kompaktheit
- Ergebnis: Alle folgerbaren Formeln sind ableitbar

Hintikka-Mengen

Definition 3.5.1 (*Hintikka-Menge*)

Eine Menge $\boldsymbol{H}$ von Formeln aus $\mathcal{L}_{AL}$ heißt (aussagenlogische) *Hintikka-Menge*, falls gilt:

- Für alle Aussagensymbole A gilt: Nicht beide $A \in \boldsymbol{H}$ und $\neg A \in \boldsymbol{H}$
- $\bot \notin \boldsymbol{H}$ und $\neg\top \notin \boldsymbol{H}$

} Konsistenz-bedingungen

- Falls $\neg\neg Z \in \boldsymbol{H}$, dann $Z \in \boldsymbol{H}$.
- Falls $\alpha \in \boldsymbol{H}$, dann $\alpha_1 \in \boldsymbol{H}$ und $\alpha_2 \in \boldsymbol{H}$.
- Falls $\beta \in \boldsymbol{H}$, dann $\beta_1 \in \boldsymbol{H}$ oder $\beta_2 \in \boldsymbol{H}$.

} Vollständigkeits-bedingungen

Beispiele

- { } , {A}, {A ∧ ¬B, A, ¬B}, {A ⊃ ¬B, ¬A}

- Jaakko Hintikka
  Finnischer Logiker, der seit Mitte der 1950er wesentliche Beiträge zur Beziehung zwischen Semantik und Beweistheorie geleistet hat. Schwerpunkte;
  - Modallogik
  - Formale Semantik für natürliche Sprache
  - Spieltheoretische Semantik
- Die Vollständigkeitsbedingungen werden auch als Abschlussbedingungen oder „abwärts-Erfüllungsbedingungen" bezeichnet.
  Wenn $X \in \boldsymbol{H}$ und dann auch gewisse, syntaktisch einfachere $X' \in \boldsymbol{H}$.

Aufgabe (ohne Nummer).

Beweisen Sie: Die Menge der Aussagensymbole ist eine Hintikka-Menge.

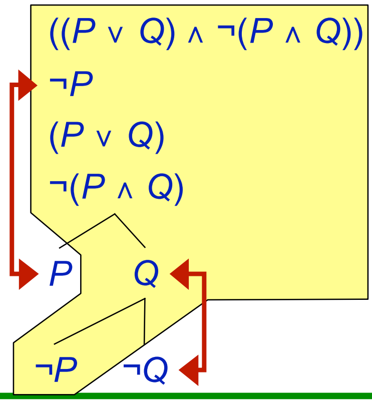
Vgl. Ben-Ari (2001) Def. 2.57

Beispiel: Hintikka-Menge

Lemma

Es sei ***T*** ein Tableau und τ ein vollendeter Zweig von ***T***, der nicht atomar abgeschlossen ist. Dann bilden die Formeln von τ eine Hintikka-Menge.

Beispiel



Vgl. Ben-Ari (2001) Theorem 2.59

Beispiel: Hintikka-Menge

Lemma

Es sei ***T*** ein Tableau und τ ein vollendeter Zweig von ***T***, der nicht atomar abgeschlossen ist. Dann bilden die Formeln von τ eine Hintikka-Menge.

Beweis

- Es sei **M** die Menge der Formeln von τ.
- Da τ nicht atomar abgeschlossen ist, erfüllt **M** die Konsistenzbedingungen für Hintikka-Mengen.
- Da τ vollendet ist, ist innerhalb von τ jede expandierbare Formel bereits expandiert worden. Durch die Expansion wird jeweils eine entsprechende Vollständigkeitsbedingung für Hintikka-Mengen erfüllt. Dementsprechend erfüllt **M** auch die Vollständigkeitsbedingungen.

Hintikkas Lemma

Satz 3.5.2 (*Hintikkas Lemma*)

Jede (aussagenlogische) *Hintikka-Menge* ist erfüllbar.

Beweis

Sei H eine aussagenlogische Hintikka Menge. Für die Belegung v_H gelte:
Für alle Aussagensymbole A : $v_H(A) = \mathbf{t}$ gdw. $A \in H$, sonst $\mathbf{f}$.

Behauptung

- Dann gilt für alle Formeln $X \in H$, dass $v_H(X) = \mathbf{t}$.

Induktionsanfang$_{\mathbf{UN}}$

- Wegen der Konsistenzbedingung sind $\bot \notin H$ und $\neg\top \notin H$.
- Zudem gilt $v_H(\top) = \mathbf{t}$ und $v_H(\neg\bot)$ unabhängig von H.
- Sei A ein Aussagensymbol.
  - Ist $A \in H$, dann gilt $v_H(A) = \mathbf{t}$ nach Definition von v_H.
  - Ist $\neg A \in H$, dann ist wegen der Konsistenzbedingung $A \notin H$ und es gilt $v_H(A) = \mathbf{f}$ nach Definition von v_H und damit $v_H(\neg A) = \mathbf{t}$.

Vgl. Ben-Ari (2001), Theorem 2.60

Hintikkas Lemma (Induktionsschritt)

Induktionsannahme$_{\text{UN}}$ (IA)

- Es sei α eine α-Formel, β eine β-Formel und G eine beliebige Formel, so dass für alle $F \in \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, G\}$ gilt: Wenn $F \in H$, dann $\nu_H(F) = \mathbf{t}$.

Induktionsschritt$_{\text{UN}}$

- Zu zeigen: für alle $F \in \{\alpha, \beta, \neg\neg G\}$ gilt: Wenn $F \in H$, dann $\nu_H(F) = \mathbf{t}$.
- Wenn $\neg\neg G \in H$, dann (Vollständigkeitsbedingung) auch $G \in H$, nach IA $\nu_H(G) = \mathbf{t}$, also auch $\nu_H(\neg\neg G) = \mathbf{t}$.
- Wenn $\alpha \in H$, dann (Vollständigkeitsbedingung) auch $\alpha_1, \alpha_2 \in H$, nach IA $\nu_H(\alpha_1) = \mathbf{t}$ und $\nu_H(\alpha_2) = \mathbf{t}$ also (Th. 2.6.1) $\nu_H(\alpha) = \mathbf{t}$.
- Wenn $\beta \in H$, dann (Vollständigkeitsbedingung) auch $\beta_1 \in H$ oder $\beta_2 \in H$, nach IA $\nu_H(\beta_1) = \mathbf{t}$ oder $\nu_H(\beta_2) = \mathbf{t}$, also (Th. 2.6.1) auch $\nu_H(\beta) = \mathbf{t}$.

Resumee

- Nach dem Prinzip der strukturellen Induktion zur Uniformen Notation (Th 2.6.3) gilt also für alle Formeln $X \in H$, dass $\nu_H(X) = \mathbf{t}$

Vollständigkeit bei strikter Expansion

Theorem 3.8.1*

Es sei X eine Tautologie und $\boldsymbol{T}$ ein vollendetes Tableau zu $\{\neg X\}$. Dann ist $\boldsymbol{T}$ ein atomar abgeschlossenes Tableau.

Beweis

- Sei τ ein beliebiger Zweig von $\boldsymbol{T}$. Zu zeigen ist, dass τ atomar abgeschlossen ist.
- Da X eine Tautologie ist, ist $\neg X$ unerfüllbar.
- Sei **M** die Formelmenge von τ. **M** enthält $\neg X$ und ist damit unerfüllbar.
- Da $\boldsymbol{T}$ vollendet ist, ist auch τ vollendet.
- Also (Satz 3.5.2) ist **M** keine Hintikka-Menge.
- Da τ keine strikte Expansion zulässt, erfüllt **M** die Vollständigkeitsbedingungen.
- Also muss **M** die Konsistenzbedingungen verletzen (Def. 3.5.1).
- **M** enthält damit $\perp$ oder ein Paar A und $\neg A$.
- Also ist τ atomar abgeschlossen (Def. 3.1.2).

- maW: Jedes vollendete Tableau zur Negation einer Tautologie ist atomar abgeschlossen.

Tableaukonsistenz

Definition 3.7.1

Eine endliche Menge ***S*** von Formeln der Aussagenlogik ist genau dann *tableaukonsistent*, falls es kein geschlossenes Tableau zu ***S*** gibt.

Satz (3.7.2*)

Ist eine endliche Menge ***S*** von Formeln der Aussagenlogik *tableaukonsistent*, dann ist ***S*** erfüllbar.

Beweis

Zu jeder endlichen Menge ***S*** von Formeln der Aussagenlogik gibt es mindestens ein (endliches) vollendetes Tableau.

Ist ***S*** tableaukonsistent, dann ist dieses Tableau nicht abgeschlossen und damit erfüllbar, ebenso wie ***S***.

Vollständigkeit des Tableauverfahrens

Theorem 3.7.3 (*Vollständigkeitstheorem*)

Falls X gültig ist, so besitzt X einen Tableaubeweis.

Beweis

Angenommen X ist gültig
dann ist $\{\neg X\}$ unerfüllbar
dann ist $\{\neg X\}$ nicht tableaukonsistent, (3.7.2*)
dann gibt es ein abgeschlossenes Tableau für $\{\neg X\}$, (Def.)
dann besitzt X einen Tableaubeweis (Def.)

Kompaktheitstheorem

Theorem 3.6.3

Sei ***S*** eine (abzählbare) Menge von Formeln der Aussagenlogik. Wenn alle endlichen Teilmengen von ***S*** erfüllbar sind, dann ist ***S*** erfüllbar.

Beweis

- ist in (fast) allen Logikbüchern und den Unterlagen zur Grundstudiumslogik (F1) zu finden.

➢ Zu beachten ist hier, dass dieses KEINE Aussage über ein Beweissystem ist und somit der Satz eigentlich in Abschnitt 2 dieser Vorlesung gehört.

- Vgl. Ben-Ari (2001), Theorem 3.43

Vollständigkeit des Tableauverfahrens

Theorem 3.9.4*

Wenn X aus einer Formelmenge $\boldsymbol{S}$ folgt, dann ist X mit dem Tableau-Kalkül aus $\boldsymbol{S}$ ableitbar.

Beweis

- Voraussetzung: X folgt aus $\boldsymbol{S}$.
- $\boldsymbol{S} \cup \{\neg X\}$ ist nicht erfüllbar.
- Es gibt eine endliche Teilmenge $\boldsymbol{S}^*$, so dass $\boldsymbol{S}^* \cup \{\neg X\}$ nicht erfüllbar ist. (Kompaktheit)
- $\boldsymbol{S}^* \cup \{\neg X\}$ ist nicht tableaukonsistent. (3.6.2, 3.7.2*)
- Es gibt ein abgeschlossenes Tableau zu $\boldsymbol{S}^* \cup \{\neg X\}$. (Def)
- X ist mit dem Tableau-Kalkül aus $\boldsymbol{S}$ ableitbar. (Def)

Vorlesung 6: Zusammenfassung der Argumentationslinie

Termination
- Existenz vollendeter Tableaux

Korrektheit
- Abgeschlossene Tableaux sind unerfüllbar
- Nur Tautologien haben einen Tableau-Beweis
- Nur folgerbare Formeln sind im Tableau-Kalkül ableitbar

Vollständigkeit
- Hintikka-Mengen sind erfüllbar
- Tableaukonsistenz sichert Erfüllbarkeit
- Alle Tautologien sind beweisbar

Kompaktheit
- Kompaktheit
- Alle folgerbaren Formeln sind ableitbar