

---

**Logik & Semantik**  
**7. Vorlesung**  
**Prädikatenlogik – 1**

---

**Syntax der Prädikatenlogik**  
**Semantik der Prädikatenlogik: Grundbegriffe**  
**(Variablen-)Substitutionen**



## Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

---

### Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
- Ableitungs-, Beweisverfahren

## Aussagenlogik → Prädikatenlogik

---

### Übergang zu einem System ausdrucksstärkerer Sprachen

- **Aussagenlogische Basis**  
Junktoren und aussagenlogische Konstanten  
(feste Interpretation)
- **Kern aller prädikatenlogischen Sprachen**
  - Quantoren:  $\forall, \exists$  (feste Interpretation)
  - Die (abzählbare) Menge der Individuen-Variablen:  $v_1, v_2, \dots, x, y, z, \dots$   
(kontextabhängige Interpretation: Quantorenbindung)
- **Jeweils spezifisch für einzelne prädikatenlogische Sprachen**  
Relations-, Funktionssymbole und Konstanten  
(freie Interpretation)
- **Hilfssymbole:**  $), (, ,$  (Das Komma gehört jetzt auch dazu.)

- Weitere Differenzierungen ergeben sich, wenn Relations- oder Funktionsvariablen eingeführt werden.
- Variablen können auch nach Sorten differenziert werden. Dann ist auch für die Funktions- und Relationssymbole durch eine Signatur anzugeben, welche Sorteneffekte sie haben bzw. welche sortalen Anforderungen sie an ihre Argumente haben. s. hierzu den Foliensatz so mehrsortigen Logiken.

## First-order languages

---

### Definition (5.1.2) (Prädikatenlogische Sprache)

Eine prädikatenlogische Sprache  $\mathcal{L}_{\text{PL}}(\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C})$  ist festgelegt durch:

- Eine – endliche oder abzählbare – Menge  $\mathbf{R}$  von *Relationssymbolen* (auch: *Prädikatensymbole*).  
Jedem  $P \in \mathbf{R}$  ist eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  zugeordnet (*Stelligkeit* von  $P$ ).
- Eine – endliche oder abzählbare – Menge  $\mathbf{F}$  von *Funktionssymbolen*.  
Jedem  $f \in \mathbf{F}$  ist eine *Stelligkeit*  $n \in \mathbb{N}$  zugeordnet.
- Eine – endliche oder abzählbare – Menge  $\mathbf{C}$  von *Konstanten* (*Individuenkonstanten*).

In der Prädikatenlogik gibt es zwei Arten zusammengesetzter Ausdrücke: Terme und Formeln

- Die individuelle Ausgestaltung einer prädikatenlogischen Sprache erfolgt dadurch, dass die Relations- und Funktionssymbole und Konstanten festgelegt werden.  
Diese Symbole können – in Analogie zu natürlichen Sprachen – als das Lexikon der prädikatenlogischen Sprachen angesehen werden.
- Die Festlegung der Mengen  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{C}$  legt fest, worüber wir überhaupt in  $L$  sprechen wollen bzw. können.
- Syntax und Semantik der Prädikatenlogik sind so angelegt, dass wir sie für auf der Grundlage eines gemeinsamen – syntaktischen und semantischen – Kerns festlegen, der dann für beliebige  $\mathcal{L}_{\text{PL}}(\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C})$  Anwendung finden kann.  
Immer dann, wenn durch den Kontext festgelegt ist, welche  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{C}$  gemeint sind, werden wir  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$  statt  $\mathcal{L}_{\text{PL}}(\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C})$  schreiben.
- Man könnte natürlich auch 0-stellige Relationssymbole entsprechend den Aussagesymbolen einführen. Sie spielen aber keine große Rolle in der Prädikatenlogik und werden daher meistens weggelassen. Ebenso kann man Funktionssymbole weglassen und ggf. durch Relationssymbole entsprechende Bedingungen ausdrücken.

## Notationskonventionen

---

### Verabredung

- Um Bezug auf eine prädikatenlogische Sprache zu nehmen, schreiben wir kurz  $\mathcal{L}_{PL}$ .
- $Rel(\mathcal{L}_{PL})$  steht für die Menge der Relationssymbole.
- $Rel_n(\mathcal{L}_{PL})$  steht für die Menge der n-stelligen Relationssymbole.
- $Fun(\mathcal{L}_{PL})$  steht für die Menge der Funktionssymbole.
- $Fun_n(\mathcal{L}_{PL})$  steht für die Menge der n-stelligen Funktionssymbole.
- $Kon(\mathcal{L}_{PL})$  steht für die Menge der Konstanten.
- $Var(\mathcal{L}_{PL})$  steht für die Menge der Variablen.

## Terme

### Definition 5.1.2 (Terme)

Die Menge  $\mathit{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  der **Terme** von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$  ist die kleinste Menge, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Jede Variable ist ein Term von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$ . ( $\mathit{Var}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \subseteq \mathit{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$ )
2. Jede Konstante ist ein Term von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$ . ( $\mathit{Kon}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \subseteq \mathit{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$ )
3. Falls  $f \in \mathit{Fun}_n(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  und  $t_1, \dots, t_n$  Terme von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$  sind, so ist  $f(t_1, \dots, t_n)$  ein Term aus  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$ .

**Beispiele** ( $a \in \mathit{Kon}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$   $x \in \mathit{Var}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$   $f \in \mathit{Fun}_1(\mathcal{L}_{\text{PL}})$   $g \in \mathit{Fun}_2(\mathcal{L}_{\text{PL}})$ )  
 $a, x, f(a), g(x, a), g(a, a), f(g(x, a)), g(f(a), g(x, a)), f(f(g(x, a)))$

- Wir können dasselbe natürlich auch folgendermaßen ausdrücken:

Die Menge  $\mathit{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  der **Terme** von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$  ist die kleinste Menge, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $\mathit{Var}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \subseteq \mathit{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$ .
2.  $\mathit{Kon}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \subseteq \mathit{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$ .
3.  $\{f(t_1, \dots, t_n) \mid f \in \mathit{Fun}_n(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \text{ und } t_1, \dots, t_n \in \mathit{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}})\} \subseteq \mathit{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$ .

Aufgabe (ohne Nummer)

- Definieren Sie, welche Terme Teilterm eines Terms sind.
- Schreiben Sie obige Definition der Term-Menge so um, dass für zweistellige Funktionen die Infixnotation verwendet werden kann (wie in dem Ausdruck  $(2 + 3)$ ).

## Prinzip der Strukturellen Induktion für Terme

---

### Theorem

Eine Eigenschaft  $Q$  gilt für alle Terme der Prädikatenlogik, wenn

#### Induktionsbasis

- Jede Variable und jede Konstante besitzt die Eigenschaft  $Q$ .

#### Induktionsschritt

- Falls  $f \in Fun_n(\mathcal{L}_{PL})$  und  $t_1, \dots, t_n$  Terme sind, die die Eigenschaft  $Q$  haben, dann hat  $f(t_1, \dots, t_n)$  die Eigenschaft  $Q$ .

## Prinzip der Strukturellen Rekursion für Terme

### Theorem

Es sei  $\mathbf{D}$  eine Menge, und Funktionen seien wie folgt gegeben:

$$f_{\text{var}}: \text{Var}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \rightarrow \mathbf{D} \quad f_{\text{kon}}: \text{Kon}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \rightarrow \mathbf{D}$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Funktion

$$f_{\text{fun}(n)}: \text{Fun}_n(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \rightarrow (\mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D})$$

Dann existiert genau eine Funktion  $f: \text{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \rightarrow \mathbf{D}$ , so dass gilt:

- **Rekursionsbasis**

Für jede Variable  $x$  ist  $f(x) = f_{\text{var}}(x)$

Für jede Konstante  $c$  ist  $f(c) = f_{\text{kon}}(c)$

- **Rekursionsschritt**

Für jedes  $f \in \text{Fun}_n(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  und  $t_1, \dots, t_n$  Terme gilt:

$$f(f(t_1, \dots, t_n)) = f_{\text{fun}(n)}(f)(f(t_1), \dots, f(t_n))$$

Allgemeiner ist die folgende Formulierung (aber das, was wir nachher brauchen, ist die Formulierung die oben steht):

- Theorem

Es sei  $\mathbf{D}$  eine Menge, und Funktionen seien wie folgt gegeben:

$$f_{\text{var}}: \text{Var}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \rightarrow \mathbf{D}$$

$$f_{\text{kon}}: \text{Kon}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \rightarrow \mathbf{D}$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Funktion

$$f_{\text{fun}(n)}: \text{Fun}_n(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \rightarrow (\text{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}})^n \times \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D})$$

Dann existiert genau eine Funktion  $f: \text{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \rightarrow \mathbf{D}$ , so dass gilt:

- **Rekursionsbasis**

Für jede Variable  $x$  ist  $f(x) = f_{\text{var}}(x)$

Für jede Konstante  $c$  ist  $f(c) = f_{\text{kon}}(c)$

- **Rekursionsschritt**

Für jedes  $f \in \text{Fun}_n(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  und  $t_1, \dots, t_n$  Terme gilt:

$$f(f(t_1, \dots, t_n)) = f_{\text{fun}(n)}(f)(t_1, \dots, t_n, f(t_1), \dots, f(t_n))$$

Zwei wichtige Typen von Funktionen, die nach dem Rekursionsprinzip definiert sind (und in diesem Foliensatz angesprochen werden), sind die Auswertung auf Basis eines Modells und einer (Variablen-)Belegung und die (Variablen-)Substitutionen.

## Formeln

### Definition 5.1.3 (atomare Formel)

1.  $\perp$ ,  $\top$  sind *atomare Formeln* und
2. falls  $R \in \text{Rel}_n(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  und  $t_1, \dots, t_n$  Terme von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$  sind, so ist  $R(t_1, \dots, t_n)$  eine *atomare Formel* von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$ .
3. Das sind alle *atomaren Formeln*.

### Definition 5.1.4 (Formeln)

Die Menge  $\text{For}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  der *Formeln* von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$  ist die kleinste Menge, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Jede atomare Formel von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$  ist eine *Formel* von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$ .
2. Falls  $X$  eine Formel von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$ , dann ist auch  $\neg X$  eine *Formel*.
3. Falls  $\odot$  ein binärer Junktor und  $X, Y$  Formeln von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$  sind, dann ist auch  $(X \odot Y)$  eine *Formel* von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$ .
4. Falls  $Y$  eine Formel von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$  und  $x$  eine Variable ist, dann sind  $(\forall x) Y$  und  $(\exists x) Y$  *Formeln* von  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$ .

- Durch die Definition von *atomaren Formeln* ist jetzt innerhalb der Prädikatenlogik eine syntaktische Ebene geschaffen, die den Anschluss an die Konzepte der Aussagenlogik bietet.
- Der zuerst einmal wichtigste Punkt ist dabei, dass atomare Formeln der Prädikatenlogik – gegenüber der Aussagenlogik – eine größere „Ausdruckskraft“ besitzen.  
Diese wird z.B. benötigt, wenn mit einer prädikatenlogischen / relationalen Sprache Information über die Welt repräsentiert werden soll.  
→ Relationale Datenbanken, Wissensrepräsentationssysteme.

Die Syntax der prädikatenlogischen Sprachen kennt viele „dialektale“

Unterschiede im Hinblick auf die Schreibweise quantifizierter Ausdrücke. Hier einige Schreibweisen, die die gleiche Quantor-Skopus Konstellation betreffen:

- $(\forall x) Y$  Fitting
- $((\forall x) Y)$  Nerode / Shore (1997)
- $\forall x Y$  Schöning, Ben-Ari
- $\forall x . Y$  Reynolds
- $\forall x : Y$
- $\forall x [Y]$  Eschenbach, wenn sie darf

- Die klassische Variante sieht übrigens wie folgt aus:
- Allquantor:  $(x) F$
- Existenzquantor:  $(Ex) F$  bzw.  $(\exists x) F$
- Beachten Sie die Klammerungskonventionen: Bei komplexer syntaktischer Struktur ist Klammerung notwendig. Ein Klammerpaar zuviel, kann eigentlich nie schaden.

## Prinzip der Strukturellen Induktion (PL-Formeln)

---

### Theorem

Eine Eigenschaft  $Q$  gilt für alle Formeln der Prädikatenlogik gdw.:

### Induktionsbasis

- Jede atomare Formel besitzt die Eigenschaft  $Q$ .

### Induktionsschritt

- Falls die Formel  $X$  die Eigenschaft  $Q$  hat, dann hat auch  $\neg X$  die Eigenschaft  $Q$ .
- Falls die Formeln  $X$  und  $Y$  die Eigenschaft  $Q$  haben und  $\odot$  ein binärer Junktor ist, dann hat auch  $(X \odot Y)$  die Eigenschaft  $Q$ .
- Falls die Formel  $X$  die Eigenschaft  $Q$  hat und  $x$  eine Variable ist, dann haben auch  $(\forall x) X$  und  $(\exists x) X$  die Eigenschaft  $Q$ .

## Prinzip der Strukturellen Rekursion (PL-Formeln)

---

### Theorem

Es existiert genau eine Funktion  $f$  definiert über der Menge der Formeln der Prädikatenlogik ( $For(\mathcal{L}_{PL})$ ), so dass gilt:

- **Rekursionsbasis**

Der Wert von  $f$  ist auf den atomaren Formeln explizit spezifiziert.

- **Rekursionsschritt**

Der Wert  $f(\neg X)$  ist spezifiziert über  $f(X)$ .

Der Wert  $f((X \odot Y))$  ist spezifiziert über  $f(X)$  und  $f(Y)$ , wobei  $\odot$  ein binärer Junktor ist.

Die Werte  $f((\forall x) X)$  und  $f((\exists x) X)$  sind spezifiziert über  $f(X)$ .

- Die obige Formulierung des Rekursionsprinzips ist sehr speziell. Im allgemeinen wird ein komplizierter formuliertes Prinzip benötigt, dass besser der Variabilität von Variablen Rechnung tragen kann.

## Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

---

### Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
- Ableitungs-, Beweisverfahren

## Semantik der Prädikatenlogik: Modell

---



### Definition 5.3.1 (Modell)

Ein *Modell* für  $\mathcal{L}_{PL}$  ist ein Paar  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ , wobei

- $\mathcal{D}$  eine beliebige, nicht leere Menge (*Grundmenge*, *Domäne*), ist
- $\mathcal{I}$  eine Abbildung (*Interpretation*) ist, die folgendes leistet:
  - für jedes  $c \in \text{Kon}(\mathcal{L}_{PL})$  ist  $\mathcal{I}(c) \in \mathcal{D}$
  - für jedes  $f \in \text{Fun}_n(\mathcal{L}_{PL})$  ist  $\mathcal{I}(f): \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$  eine n-stellige Funktion
  - für jedes  $P \in \text{Rel}_n(\mathcal{L}_{PL})$  ist  $\mathcal{I}(P) \subseteq \mathcal{D}^n$  eine n-stellige Relation
- Wir schreiben auch  $c^{\mathcal{I}}$  statt  $\mathcal{I}(c)$ ,  $f^{\mathcal{I}}$  statt  $\mathcal{I}(f)$  und  $P^{\mathcal{I}}$  statt  $\mathcal{I}(P)$

- Im Bereich der Logik ist eine Vielzahl von Begriffssystemen zu finden, bei denen teilweise sogar „Überlappungen“ vorliegen.

Fitting	Schöning	weiteres Englisch	weiteres Deutsch
model	Struktur	structure	Modell
domain	Grundmenge	universe	Universum
interpretation			
assignment	Wert	value assignment	Wertzuweisung, Belegung

- Schöning verwendet den Begriff „Modell“ für Strukturen, die gewisse Formeln wahr machen. (vgl. hierzu Folie 17).
- Die hier vorgenommene Unterscheidung in Interpretation und Zuweisung (assignment, Belegung) hat insbesondere das Ziel, die unterschiedliche „Auswertung“ von Variablen und den drei Typen von Symbolen (Konstanten, Funktionssymbolen und Relationssymbolen) auch in der Benennung deutlich zu machen.
- Bei Schöning wird diese Unterscheidung nicht vorgenommen. Das, was hier in Interpretation und Zuweisung getrennt ist, wird bei Schöning von vornherein in einer Funktion  $A$  (Wert genannt) zusammengefasst.

## Beispiel: Modelle

---

$$\{a\} = \text{Kon}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \{f\} = \text{Fun}_1(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \{g\} = \text{Fun}_2(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \{P\} = \text{Rel}_2(\mathcal{L}_{\text{PL}})$$

	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$
$\mathcal{D}$	$\mathbb{N}$	$\{\text{🚗}, \text{✈️}, \text{🏠}\}$
$I(a)$	1	🏠
$I(f): \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$	$n \mapsto n + 1$	🏠 $\mapsto$ 🚗, 🚗 $\mapsto$ ✈️, ✈️ $\mapsto$ 🏠
$I(g): \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$	$(n, m) \mapsto n + m$	$(, ) \mapsto$ 🏠
$I(P)$	$\{(n, m) \mid m > n\}$	$\{(\text{✈️}, \text{🚗})\}$

## Zuweisung – Variablenbelegungen

---

### Definition 5.3.2 (Zuweisung, Belegung)

Eine *Belegung* oder *Zuweisung* in ein Modell  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$  ist eine Abbildung  $\mathcal{A}: \text{Var}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \rightarrow \mathcal{D}$

Wir schreiben auch  $x^{\mathcal{A}}$  statt  $\mathcal{A}(x)$ .

### Definition 5.3.4 (x-Varianten)

Sei  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$  ein Modell für  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$ ,  $x$  eine Variable und  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  seien Zuweisungen in  $\mathcal{M}$ .  $\mathcal{B}$  ist eine *x-Variante* von  $\mathcal{A}$ , falls  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  allen von  $x$  verschiedenen Variablen denselben Wert zuweisen und für  $x$  selbst denselben oder unterschiedliche Werte zuordnen.

- Man beachte: Jede Zuweisung ist eine x-Variante ihrer selbst.
- Man beachte, dass die einzige wichtige Beziehung zwischen den Interpretationen der Modelle und den Belegungen in dem Modell ist, dass sie auf dieselbe Domäne Bezug nehmen.

## Zuweisung / Belegung – Auswertung von Termen



### Definition 5.3.3 (Auswertung von Termen)

Sei  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$  Modell für  $\mathcal{L}_{PL}$  und  $\mathcal{A}$  eine Zuweisung in  $\mathcal{M}$ . Für jeden Term  $t \in \text{Ter}(\mathcal{L}_{PL})$  ergibt sich ein Wert  $t^{\mathcal{I}, \mathcal{A}}$  in  $\mathcal{D}$  durch:

1. Für  $c \in \text{Kon}(\mathcal{L}_{PL})$  ist  $c^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = c^{\mathcal{I}}$
2. Für  $v \in \text{Var}(\mathcal{L}_{PL})$  ist  $v^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = v^{\mathcal{A}}$
3. Für  $f \in \text{Fun}_n(\mathcal{L}_{PL})$  und  $t_1, \dots, t_n \in \text{Ter}(\mathcal{L}_{PL})$  ist
 
$$[f(t_1, \dots, t_n)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = f^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{A}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{A}})$$

	$a$	$f(a)$	$g(a, f(a))$
$\mathcal{M}_1$	1	2	3
$\mathcal{M}_2$			

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik

7 – 16

- Definition 5.3.3 zeigt, dass der Unterschied in der Auswertung von Konstanten und Variablen gerade darin liegt, dass das eine Mal die Interpretation, das andere Mal die Zuweisung für die Auswertung verantwortlich ist.

Aufgabe (ohne Nummer)

Begründen Sie, warum die Wertzuweisung eindeutig festgelegt ist.

## Auswertung von Formeln

### Definition 5.3.5

Sei  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$  Modell für  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$  und  $\mathcal{A}$  eine Zuweisung in  $\mathcal{M}$ . Für jedes  $\Phi \in \text{For}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  ergibt sich ein Wert  $\Phi^{\mathcal{I}, \mathcal{A}}$  aus  $\text{Tr} = \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$  durch:

1.  $\perp^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{f}$        $\top^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$
2.  $[P(t_1, \dots, t_n)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$  gdw.  $\langle t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{A}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} \rangle \in P^{\mathcal{I}}$
3.  $[\neg X]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \neg[X]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}}$
4.  $[(X \odot Y)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = X^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} \odot Y^{\mathcal{I}, \mathcal{A}}$
5.  $[(\forall x) \Phi]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$  gdw. für alle  $x$ -Varianten  $\mathcal{B}$  zu  $\mathcal{A}$  gilt:  $\Phi^{\mathcal{I}, \mathcal{B}} = \mathbf{t}$  und sonst  $\mathbf{f}$ .
6.  $[(\exists x) \Phi]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$  gdw. für eine  $x$ -Variante  $\mathcal{B}$  zu  $\mathcal{A}$  gilt:  $\Phi^{\mathcal{I}, \mathcal{B}} = \mathbf{t}$  und sonst  $\mathbf{f}$ .

### Aufgabe 7-1

- Bestimmen sie die Wahrheitswerte der Formeln  $(\forall x) P(x, f(x))$  und  $(\exists x) P(f(x), x)$  in den Modellen  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  bei einer Zuweisung, die Sie sich frei wählen können.

## Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

---

### Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- **semantischer Kategorisierungen und Beziehungen**
- Ableitungs-, Beweisverfahren

## „wahr in einem Modell“, Gültigkeit, Erfüllbarkeit



### Definition 5.3.6

- Eine Formel  $\Phi \in \text{For}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  ist genau dann *wahr im Modell*  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ , wenn  $\Phi^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$  für alle Zuweisungen  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{M}$ .
- Eine Formel  $\Phi$  ist genau dann *gültig* (eine *Tautologie*), wenn sie in allen Modellen für  $\mathcal{L}_{\text{PL}}$  wahr ist.
- Eine Menge  $S$  von Formeln ist genau dann *erfüllbar im Modell*  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ , wenn es eine Zuweisung  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{M}$  gibt, so dass  $\Phi^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$  für alle  $\Phi \in S$ .
- Eine Menge  $S$  von Formeln ist genau dann *erfüllbar*, wenn es ein Modell gibt, in dem  $S$  erfüllbar ist.
- Eine Menge  $S$  von Formeln ist genau dann *unerfüllbar*, wenn es kein Modell gibt, in dem  $S$  erfüllbar ist.

- „wahr im Modell  $\mathcal{M}$ “ bezieht sich auf wahrmachende Auswertungen, die durch „wahrmachende Zuweisungen“ ausgelöst sind. Die Variablenbelegungen spielen dabei nur für freie Variablen eine Rolle, da die Auswertung von Ausdrücken mit Quantoren stets die Menge aller Belegungen berücksichtigt.
- Eine Formel  $\Phi$  ist genau dann *erfüllbar im Modell*  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ , wenn es eine Zuweisung  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{M}$  gibt, so dass  $\Phi^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$ .
- Eine Formel ist genau dann *erfüllbar*, wenn es ein Modell gibt, in dem sie erfüllbar ist.
- Eine Formel ist genau dann *unerfüllbar* (eine *Kontradiktion*), wenn es kein Modell gibt, in dem sie erfüllbar ist.
- Eine Formel  $\Phi$  ist genau dann *falsifizierbar im Modell*  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ , wenn es eine Zuweisung  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{M}$  gibt, so dass  $\Phi^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{f}$ .
- Eine Formel ist genau dann *falsifizierbar*, wenn es ein Modell gibt, in dem sie falsifizierbar ist.

### Aufgabe 7-2

Zeigen Sie, dass die folgende Formel gültig ist.

$$[(\forall x) [P(x) \supset Q(x)] \wedge P(a)] \supset Q(a)$$

## $(\exists x) P(x) \supset P(c)$ ist erfüllbar – Ein Beispiel

---

### Ziel

- Wir müssen ein Modell  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$  und eine Zuweisung  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{M}$  finden, so dass  $[(\exists x) P(x) \supset P(c)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$
- Das heißt:  $[(\exists x) P(x)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{f}$  (1)  
oder  $[P(c)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$  (2)
- Wir wählen (2). Dafür muss gelten:  $c^{\mathcal{I}} \in P^{\mathcal{I}}$
- Wir wählen:  $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$ ,  $P^{\mathcal{I}} = \{2\}$ ,  $c^{\mathcal{I}} = 2$
- Es gibt natürlich beliebig viele Alternativen.

**Gibt es einen systematischen Weg, Modelle zu erzeugen?**

## $(\exists x) P(x) \supset P(c)$ ist falsifizierbar – Ein Beispiel

---

### Ziel

- Wir müssen ein Modell  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$  und eine Zuweisung  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{M}$  finden, so dass  $[(\exists x) P(x) \supset P(c)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{f}$
- Das heißt:  $[(\exists x) P(x)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$  (1)  
und  $[P(c)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{f}$  (2)
- Wegen (1):  $[P(x)]^{\mathcal{I}, \mathcal{B}} = \mathbf{t}$  für eine  $x$ -Variante  $\mathcal{B}$  zu  $\mathcal{A}$  bzgl.  $\mathcal{M}$ .
- Dann muss also gelten:  $x^{\mathcal{B}} \in P^{\mathcal{I}}$  und  $c^{\mathcal{I}} \notin P^{\mathcal{I}}$
- Also müssen wir aufpassen, dass  $x^{\mathcal{B}} \neq c^{\mathcal{I}}$  möglich ist.
- Wir wählen:  $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$ ,  $P^{\mathcal{I}} = \{2\}$ ,  $c^{\mathcal{I}} = 1$
- Für jedes  $\mathcal{A}$  gibt es eine  $x$ -Varianten  $\mathcal{B}$  zu  $\mathcal{A}$  bzgl.  $\mathcal{M}$   
(mit  $x^{\mathcal{B}} = 2$ ), so dass  $[P(x)]^{\mathcal{I}, \mathcal{B}} = \mathbf{t}$  und damit  $[(\exists x) P(x)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$

**Gibt es einen systematischen Weg, Modelle zu erzeugen?**

## $(\forall x) P(x) \supset P(c)$ ist gültig – Ein Beispiel

---

### Annahme $(\forall x) P(x) \supset P(c)$ nicht gültig

dann gibt es  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ , so dass  $(\forall x) P(x) \supset P(c)$  in  $\mathcal{M}$  nicht erfüllt wird,

- d.h. es gibt bzgl.  $\mathcal{M}$  eine Zuweisung  $\mathcal{A}$ , so dass  $[(\forall x) P(x) \supset P(c)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{f}$

- Damit gilt:  $[(\forall x) P(x)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$  (1)  
und  $[P(c)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{f}$  (2)

- Wegen (1):  $[P(x)]^{\mathcal{I}, \mathcal{B}} = \mathbf{t}$  für alle  $x$ -Varianten  $\mathcal{B}$  zu  $\mathcal{A}$  bzgl.  $\mathcal{M}$ .

- Wir betrachten nun die  $x$ -Variante  $\mathcal{B}$  mit  $x^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{I}}$

- Dann muss also gelten:  $x^{\mathcal{B}} \in P^{\mathcal{I}}$  und  $c^{\mathcal{I}} \notin P^{\mathcal{I}}$  aber  $x^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{I}}$

- Widerspruch! Also kann die Annahme nicht gelten und die Formel ist gültig.



## $(\forall x) P(x) \supset (\exists y) P(y)$ ist gültig – Ein Beispiel

---

### Annahme $(\forall x) P(x) \supset (\exists y) P(y)$ nicht gültig

dann gibt es  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ , so dass  $(\forall x) P(x) \supset (\exists y) P(y)$  in  $\mathcal{M}$  nicht erfüllt wird,

- d.h. es gibt bzgl.  $\mathcal{M}$  eine Zuweisung  $\mathcal{A}$ , so dass

$$[(\forall x) P(x) \supset (\exists y) P(y)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{f}$$

- Damit gilt:  $[(\forall x) P(x)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{t}$  (1)

und  $[(\exists y) P(y)]^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = \mathbf{f}$  (2)

- Wegen (1):  $[P(x)]^{\mathcal{I}, \mathcal{B}} = \mathbf{t}$  für alle  $x$ -Varianten  $\mathcal{B}$  zu  $\mathcal{A}$  bzgl.  $\mathcal{M}$ .
- Wegen (2):  $[P(y)]^{\mathcal{I}, \mathcal{C}} = \mathbf{f}$  für alle  $y$ -Varianten  $\mathcal{C}$  zu  $\mathcal{A}$  bzgl.  $\mathcal{M}$ .
- Wir betrachten nun den Fall  $\mathcal{B} = \mathcal{A}$  und  $\mathcal{C}(y) = \mathcal{B}(x)$
- Dann muss also gelten:  $x^{\mathcal{B}} \in P^{\mathcal{I}}$  und  $y^{\mathcal{C}} \notin P^{\mathcal{I}}$  aber  $x^{\mathcal{B}} = y^{\mathcal{C}}$
- Widerspruch! Also ist die Annahme nicht zulässig.

## Aussagenlogik in der Prädikatenlogik

---

### Satz

Es sei  $F \in \text{For}(\mathcal{L}_{AL})$  und  $G \in \text{For}(\mathcal{L}_{PL})$  sei aus  $F$  wie folgt entstanden:

- jedes Aussagensymbol wurde durch eine prädikatenlogische Formel ersetzt,
- gleiche Aussagensymbole wurden durch gleiche Formeln ersetzt.

Dann gilt:

- Wenn  $F$  eine Tautologie ist, dann ist  $G$  eine Tautologie.
- Wenn  $F$  eine Kontradiktion ist, dann ist  $G$  eine Kontradiktion.

### Viele Ergebnisse der Aussagenlogik sind auf die Prädikatenlogik übertragbar

---

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik

7 – 24

- Das Ziel der Prädikatenlogik ist nun, noch mehr Formeln zu Tautologien oder Kontradiktionen zu machen, als durch den obigen Satz gegeben sind.
- Alles, was dazu kommt, hat mit den Variablen und den Quantoren zu tun.
- Deshalb gibt es auch Logiker (oder Logik-Lehrer), die die Aussagenlogik als ‚Junktorenlogik‘ und die Prädikatenlogik als ‚Quantorenlogik‘ bezeichnen. Diese (sehr logische :-)) Benennung hat sich leider noch nicht durchgesetzt.

## Freies und gebundenes Vorkommen von Variablen

---

### Definition (5.1.6) (*Freies Vorkommen* von Variablen)

1. Alle Variablen-Vorkommen in einer atomaren Formel sind **frei** in dieser Formel.
2. In  $\neg A$  sind genau die V-Vorkommen **frei**, die in  $A$  frei sind.
3. Die **freien** V-Vorkommen in  $(A \odot B)$  sind die freien V-Vorkommen in  $A$  vereinigt mit den freien V-Vorkommen in  $B$ .
4. Die **freien** V-Vorkommen in  $(\forall x) A$  bzw.  $(\exists x) A$ , sind die freien V-Vorkommen in  $A$  mit Ausnahme aller Vorkommen von  $x$ .  
Ein V-Vorkommen ist **gebunden**, falls es nicht frei ist.

### Zu beachten

Die Zuweisung  $\mathcal{A}$  ist bei der Interpretation von  $\Phi^{\mathcal{I}, \mathcal{A}}$  nur für die Bewertung der freien Variablen-Vorkommen in  $\Phi$  zuständig.

- vg. Ben-Arie (2001), Def. 5.7
- Die Konzepte *frei* und *gebunden* betreffen Variablen unter der Berücksichtigung ihres Vorkommens in einer Formel. Hierbei ist von besonderer Wichtigkeit sich klar zu machen, dass eine Variable an verschiedenen Stellen in einer Formel *vorkommen* kann, und diese unterschiedlichen *Vorkommen* (*occurrences*) von unterschiedliche Art sein könne.  
Im Hinblick auf *frei* und *gebunden* ist die syntaktische Beziehung zu (*Bindung durch*) Quantoren von Bedeutung.
- Vorkommen einer Variable  $\approx$  Variablen-Vorkommen wird in der obigen Definition durch V-Vorkommen abgekürzt.
- In verschiedenen Logiken treten noch weitere Operatoren auf, die Variablen binden können: das berühmte Lambda bindet eine Variable um eine Funktion zu bilden (dazu werden wir noch kommen), Russells Iota-Operator bindet eine Variable und wird mit einer Formel kombiniert, das Resultat ist dann ein Term. Russell diskutierte an diesem Beispiel, wie der definite Artikel im Singular (im Deutschen: der, die, das) in einer Logik-artigen Sprache repräsentiert werden könnte.

## Freie Variablen, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

---



### Satz

Es sei  $\Phi \in \text{For}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  eine Formel und  $x$  eine Variable. Dann gilt

- $\Phi$  ist genau dann wahr im Modell  $\mathcal{M}$ , wenn  $(\forall x) \Phi$  wahr im Modell  $\mathcal{M}$  ist.
- $\Phi$  ist genau dann gültig, wenn  $(\forall x) \Phi$  gültig ist.
  
- $\Phi$  ist genau dann erfüllbar im Modell  $\mathcal{M}$ , wenn  $(\exists x) \Phi$  erfüllbar in  $\mathcal{M}$  ist.
- $\Phi$  ist genau dann erfüllbar, wenn  $(\exists x) \Phi$  erfüllbar ist.
- $\Phi$  ist genau dann unerfüllbar, wenn  $(\exists x) \Phi$  unerfüllbar ist.

## Geschlossene Formeln

---

### Definition

Ein Term heißt genau dann *geschlossen*, wenn in ihm keine Variable vorkommt.

$gTer(\mathcal{L}_{PL})$  ist die Menge der geschlossenen Terme von  $\mathcal{L}_{PL}$ .

### Definition 5.1.7 (geschlossene Formel)

Eine Formel von  $\mathcal{L}_{PL}$ , die kein freies V-Vorkommen aufweist, heißt *geschlossene Formel* von  $\mathcal{L}_{PL}$ . (Wir schreiben auch  $gFor(\mathcal{L}_{PL})$ ).

### Lemma

Eine geschlossene Formel  $\Phi \in gFor(\mathcal{L}_{PL})$  ist genau dann wahr im Modell  $\mathcal{M}$ , wenn  $\{\Phi\}$  erfüllbar im Modell  $\mathcal{M}$  ist.

- Für die Interpretation einer geschlossenen Formel  $\Phi$  ist die Zuweisung nicht ausschlaggebend. Genauer gesagt gilt für beliebige Zuweisungen  $\Phi^{I,A} = \Phi^{I,B}$ . Deshalb schreiben wir teilweise auch einfach  $\Phi^I$ , um uns auf die Interpretation von  $\Phi$  zu beziehen.
- Vgl. Nerode/Shore (1997), Def. 2.3 : ‚ground term‘ (für geschlossener Term‘, Def. 2.6: ‚sentence‘ (für geschlossenen Formel)

## Äquivalenz

---

### Definition (Ben-Ari (2001) 5.21\*)

Zwei prädikatenlogische Formeln  $X, Y \in \text{For}(\mathcal{L}_{PL})$  sind genau dann *äquivalent*, wenn für alle Modelle  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ , und für alle Zuweisungen  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{M}$  gilt:  $X^{\mathcal{I}, \mathcal{A}} = Y^{\mathcal{I}, \mathcal{A}}$ .

### Beispiel

- $(\forall x) (\exists y) (R(x, y) \wedge Q(y, x))$  und  $(\forall x) (\exists y) (Q(y, x) \wedge R(x, y))$  sind äquivalent
- $(\forall x) P(x)$  und  $P(x)$  sind nicht äquivalent.
- $(\forall x) P(x)$  und  $(\exists x) P(x)$  sind nicht äquivalent.

## Folgerbarkeit

---

### Definition 5.10.1

Eine geschlossene Formel  $X$  ist eine *Folgerung* aus einer Menge  $S$  geschlossener Formeln, falls  $X$  wahr ist in allen Modellen, die alle Elemente von  $S$  wahr machen.

Wir schreiben:  $S \models X$

### Beispiel

- Aus  $\{(\forall x) P(x)\}$  folgt  $P(a)$ .
- Aus  $\{P(a)\}$  folgt  $(\exists x) P(x)$ .
- Aus  $\{P(a)\}$  folgt nicht  $(\forall x) P(x)$ .
- Aus  $\{(\forall x) P(x)\}$  folgt  $(\exists x) P(x)$ .

## Kompaktheit

---

### Theorem (5.9.1\*) (Ben-Ari, 2001, 5.40): Kompaktheitstheorem

Sei  $S \subseteq gFor(\mathcal{L}_{PL})$ . Wenn alle endlichen Teilmengen von  $S$  erfüllbar sind, dann ist  $S$  erfüllbar.

### Satz 5.10.2

Es sei  $X$  eine geschlossene Formel und  $S$  eine Menge geschlossener Formeln.

$S \models X$  genau dann, wenn  
 $S_0 \models X$  für eine endliche Teilmenge  $S_0 \subseteq S$ .

Satz 5.10.2 kann wie folgt interpretiert werden: Jede Konsequenz einer beliebigen Informationsmenge ist auch schon Konsequenz einer endlichen Informationsmenge.

## Definition eines logischen Systems: Generelles Schema

---

### Spezifikation

- einer formalen Sprache (zur Repräsentation)
- von Evaluations- / Interpretationsprinzipien
- semantischer Kategorisierungen und Beziehungen
- **Ableitungs-, Beweisverfahren**
  - (Variablen-)Substitutionen  
(z.B. für Umformungsverfahren,  
Uniforme Notation)

## Substitutionen – Definition

---

### Definition 5.2.1 ((Variablen-)Substitution)

Eine (Variablen-)Substitution  $\sigma$  ist eine Abbildung:

$$\sigma : \text{Var}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \rightarrow \text{Ter}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$$

Statt  $\sigma(x)$  wird häufig  $x\sigma$  und auch  $[x]\sigma$  geschrieben.

### Substitutionen

- werden (gleich) verallgemeinert, so dass sie auf beliebige Ausdrücke der Logik (Terme, Formeln) angewendet werden können.
- Vorher aber noch etwas Terminologie und ein paar Spezialfälle

- Weiteres zu Substitutionen:
  - Fitting (1996): Abschnitt 5.2, pp. 113– 117
  - Schönig (1995), pp. 63ff

## Substitutionen – endliche Basis

---

### Definition 5.2.6+8 (*Basis / Stützmenge einer Substitution*)

Die *Basis* einer Substitution  $\sigma$  ist die Menge der Variablen, die ‚echt betroffen‘ sind:

$$\text{bas}(\sigma) := \{x \in \text{Var}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \mid x\sigma \neq x\}.$$

- $\sigma$  hat eine *endliche Basis*, falls  $\text{bas}(\sigma)$  endlich ist.
- Falls  $\sigma$  die endliche Basis  $\{x_1, \dots, x_n\}$  hat, und für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt:  $x_i\sigma = t_i$ , so schreiben wir:  
$$\sigma = \{x_1 / t_1, \dots, x_n / t_n\}$$
- Die identische Substitution wird durch  $\{ \}$  bezeichnet.

### Beispiel

- $\sigma = \{x / f(y), z / a\}$ :  $\text{bas}(\sigma) = \{x, z\}$
- $[g(f(z), g(y, x))]\sigma = g(f(a), g(y, f(y)))$

In der Regel interessieren uns nur Substitutionen mit endlicher Basis, da jede Formel nur endliche viele Variablen enthält.

Aufgabe (ohne Nummer)

- Welches sind die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede zwischen diesen Substitutionen und den Ersetzungen, die wir in der Aussagenlogik betrachtet haben.

## Substitution – Modifikation

### Definition 5.2.10

Sei  $\sigma$  eine Substitution und  $x$  eine Variable. Mit  $\sigma_x$  bezeichnen wir die Substitution, die für alle  $y \in \text{Var}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  folgender Bedingung genügt:

$$y \sigma_x = \begin{cases} y \sigma & \text{für } y \neq x \\ x & \text{für } y = x \end{cases}$$

$\sigma_x$  ist wie  $\sigma$ ,  
nur, dass  $x$  nicht  
verändert wird.

Also wird  $x$  gewissermaßen aus der Basis der Substitution entfernt.

### Beispiel

- $\sigma = \{x / f(y), z / a\}$ :  $\text{bas}(\sigma) = \{x, z\}$
- $\sigma_x = \{z / a\}$ :  $\text{bas}(\sigma_x) = \{z\}$        $\sigma_z = \{x / f(y)\}$ :  $\text{bas}(\sigma_z) = \{x\}$
- $\sigma_w = \{x / f(y), z / a\}$ :  $\text{bas}(\sigma_w) = \{x, z\}$

## Substitutionen – Definition

### Definition 5.2.2 (Erweiterung zu $\sigma : \mathcal{Ter}(\mathcal{L}_{PL}) \rightarrow \mathcal{Ter}(\mathcal{L}_{PL})$ )

Sei  $\sigma$  eine Substitution.  $\sigma$  wird zu einer Abbildung  $\mathcal{Ter}(\mathcal{L}_{PL}) \rightarrow \mathcal{Ter}(\mathcal{L}_{PL})$  fortgesetzt. Da die neue Funktion eine eindeutige Fortsetzung (rekursive Definition !) von  $\sigma$  ist, verwenden wir für beide Funktionen dieselbe Bezeichnung  $\sigma$  :

- $c\sigma = c$  für Konstanten  $c \in \mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{PL})$
- $[f(t_1, \dots, t_n)]\sigma = f([t_1]\sigma, \dots, [t_n]\sigma)$ , falls  $f \in \mathcal{Fun}_n(\mathcal{L}_{PL})$

### Beispiel

$$\begin{aligned} & h(g(x), h(y, z))\{x/ g(y), z/ a\} \\ &= h(g(x) \{x/ g(y), z/ a\}, h(y, z) \{x/ g(y), z/ a\}) \\ &= h(g(x \{x/ g(y), z/ a\}), h(y \{x/ g(y), z/ a\}, z \{x/ g(y), z/ a\})) \\ &= h(g(g(y)), h(y, a)) \end{aligned}$$



- Weiteres zu Substitutionen:
  - Fitting (1996): Abschnitt 5.2, pp. 113– 117
  - Schöning (1995), pp. 63ff

## Substitutionen – Komposition

---

### Definition 5.2.3

Es seien  $\sigma$  und  $\tau$  Substitutionen. Als *Komposition* von  $\sigma$  und  $\tau$  bezeichnen wir diejenige Substitution  $\rho$ , für die gilt: Für alle Variablen  $x$  ist  $x\rho = [x\sigma]\tau$ . Anstelle von  $\rho$  schreiben wir auch  $\sigma\tau$ .

### Lemma 5.2.4

Es seien  $\sigma$  und  $\tau$  Substitutionen. Dann gilt für **jeden Term  $t$**  (nicht nur die Variablen):  $[t]\sigma\tau = [t\sigma]\tau$ .

### Theorem

Die Komposition von zwei Substitutionen mit endliche Basis ist eine Substitution mit endlicher Basis.

### Beispiel

- $\sigma = \{x / f(y), z / a\}$ ,  $\tau = \{y / c, z / c\}$ ,  $\sigma\tau = \{x / f(c), z / a, y / c\}$

### Aufgabe 7-3

- a. Sei  $\sigma = \{x / y\}$  und  $\tau = \{y / c\}$ , wobei  $x$  und  $y$  Variablen sind und  $c$  eine Konstante ist.

Zeigen Sie:  $\sigma\tau = \{x / c, y / c\}$

- b. Beweisen Sie, dass die Komposition von Substitutionen assoziativ ist, d.h.:

$$(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$$

- c. Beweisen Sie Lemma 5.2.4

## Substitution bei Formeln

### Definition 5.2.11

Sei  $\sigma$  eine Substitution. Für  $\sigma$  wird (nach dem Rekursionsprinzip) eine Abbildung  $\text{For}(\mathcal{L}_{\text{PL}}) \rightarrow \text{For}(\mathcal{L}_{\text{PL}})$  definiert. Für die neue Funktion verwenden wir auch die Bezeichnung  $\sigma$ . Für sie gilt:

1.  $\perp\sigma = \perp$        $\top\sigma = \top$   
 $[P(t_1, \dots, t_n)]\sigma = P([t_1]\sigma, \dots, [t_n]\sigma)$  , falls  $P \in \text{Rel}_n(\mathcal{L}_{\text{PL}})$
2.  $[\neg X]\sigma = \neg [X]\sigma$
3.  $[(X \odot Y)]\sigma = ([X]\sigma \odot [Y]\sigma)$  für jeden binären Junktor  $\odot$
4.  $[(\forall x) \Phi]\sigma = (\forall x) [\Phi]\sigma_x$
5.  $[(\exists x) \Phi]\sigma = (\exists x) [\Phi]\sigma_x$

- Die Verwendung von  $\sigma_x$  statt  $\sigma$  bei der Substitution von Formeln mit Quantoren – bzgl.  $x$  – als Hauptoperator sorgt dafür, dass die durch Quantoren gebundenen Variablen nicht durch Substitution „umbenannt“ werden.
- Substitution respektiert damit die Bindung der Variablen durch Quantoren. Die Quantoren schaffen damit Namensräume, entsprechend der Variablendeklaration in Programmiersprachen.

## Substitution bei Formeln

---

### Beispiel

$$\sigma = \{x/ f(y), z/ a\}, \sigma_x = \{z/ a\}, \sigma_z = \{x/ f(y)\}, \sigma_y = \sigma$$

$$[P(x, z) \vee (\forall x) P(f(z), g(y, x))] \sigma$$

$$= [P(x, z)] \sigma \vee [(\forall x) P(f(z), g(y, x))] \sigma$$

$$= [P(x, z)] \sigma \vee (\forall x) [P(f(z), g(y, x))] \sigma_x$$

$$= P(f(y), a) \vee (\forall x) P(f(a), g(y, x))$$

$$[(\exists y) P(x, y) \vee (\forall z) P(f(z), g(y, x))] \sigma$$

$$= [(\exists y) P(x, y)] \sigma \vee [(\forall z) P(f(z), g(y, x))] \sigma$$

$$= (\exists y) [P(x, y)] \sigma_y \vee (\forall z) [P(f(z), g(y, x))] \sigma_z$$

$$= (\exists y) P(f(y), y) \vee (\forall z) P(f(z), g(y, f(y)))$$

- Beim zweiten Beispiel bindet der Existenzquantor nach der Substitution eine Variable, die durch die Substitution eingeführt wurde.
- Dieser Effekt ist im Allgemeinen (sehr) unerwünscht, da dieselbe Substitution angewandt auf äquivalente Formeln damit nicht unbedingt zu äquivalenten Formeln führt.
- Der Effekt lässt sich aber nicht einfach in der Definition der Substitution verhindern. Daher greifen LogikerInnen hier zu einem anderen Mittel: Sie klassifizieren Substitutionen danach, ob sie für eine Formel geeignet sind oder nicht (mehr hierzu auf den kommenden Folien).

## Präsenzaufgabe

### Aufgabe

- Geben Sie zwei äquivalente prädikatenlogische Formeln  $F$  und  $G$  sowie eine Substitution  $\sigma$  an, so dass  $F\sigma$  und  $G\sigma$  nicht äquivalent sind (und zeigen Sie dieses auch.)
- Welche Forderungen müssen an eine Substitution  $\sigma$  (in Bezug auf  $F$  und  $G$ ) gestellt werden, damit die Äquivalenz von  $F\sigma$  und  $G\sigma$  garantiert werden kann?

## Substitution in Formeln – 2

### Definition 5.2.12

Die Substitution  $\sigma$  ist *frei in Bezug auf eine Formel  $F$* , falls gilt:

1.  $F$  ist atomar oder
2.  $F = \neg X$  und  $\sigma$  ist frei bzgl.  $X$  oder
3.  $F = (X \odot Y)$  und  $\sigma$  ist frei bzgl.  $X$  und bzgl.  $Y$  oder
4.  $F = (\forall x) \Phi$  bzw.  $F = (\exists x) \Phi$  und  $\sigma_x$  ist frei bzgl.  $\Phi$ , und für jede Variable  $v$ , die in  $F$  frei vorkommt, gilt, dass  $x$  nicht in  $v\sigma$  vorkommt.

### Beispiel

$\sigma = \{x / f(y), z / a\}$  ist nicht frei bzgl.  $(\forall y) P(f(z), g(y, x))$

$[(\forall y) P(f(z), g(y, x))]\sigma = (\forall y) P(f(a), g(y, f(y)))$

### Satz 5.2.13

Falls  $\sigma$  frei ist bzgl.  $X$  und  $\tau$  frei ist bzgl.  $X\sigma$ , dann gilt:  $[X]\sigma\tau = [X\sigma]\tau$

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik

7 – 40

In dem obigen Beispiel entsteht durch die Substitution eine Bindung. Sowas ist in vielen Fällen nicht erwünscht und kann nicht passieren, wenn die Substitution frei bzgl. der Formel, auf die sie angewendet wird, ist.

Aufgabe (ohne Nummer)

- Beweisen Sie Satz 5.2.13.
- Beweisen Sie: Wenn eine Substitutionen jede Variable aus ihrer Basis auf einen geschlossenen Term abbildet, dann ist sie frei bzgl. jeder Formel.

## Präsenzaufgabe

### Formeln

- $R(f(z), y) \vee R(x, g(y))$
- $R(a, x) \vee (\exists x) R(f(z), x)$
- $R(y, x) \supset (\exists x) R(y, x)$
- $(\forall z) ((\forall y) R(z, y) \supset (\exists x) R(x, y))$

### Substitutionen

- $\{x/ f(x), y/ x\}$
- $\{z/ x, x/ z\}$
- $\{y/ f(x), z/ x\}$
- $\{y/ f(a), z/ b, x/ f(b)\}$

**Welche Substitution ist frei in Bezug auf welche Formel ?  
(Begründung !)**

## Semantischer Effekt der Substitution: Überführung

### Satz 5.3.7

Sei  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$  ein Modell für  $\mathcal{L}_{PL}$ ,  $\Phi \in \text{For}(\mathcal{L}_{PL})$ ,  $x$  eine Variable und  $t$  ein geschlossener Term. Sei  $\mathcal{A}$  eine Zuweisung mit  $x^{\mathcal{A}} = t^{\mathcal{I}}$ .

Dann gilt:  $[\Phi\{x/t\}]^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \Phi^{\mathcal{I},\mathcal{A}}$ .

Sogar für jede  $x$ -Variante  $\mathcal{B}$  zu  $\mathcal{A}$  gilt:  $[\Phi\{x/t\}]^{\mathcal{I},\mathcal{B}} = \Phi^{\mathcal{I},\mathcal{A}}$ .

### Satz 5.3.8

Sei  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$  ein Modell für  $\mathcal{L}_{PL}$ ,  $\Phi \in \text{For}(\mathcal{L}_{PL})$  und  $\sigma$  eine Substitution, die bzgl.  $\Phi$  frei ist. Sei  $\mathcal{B}$  eine beliebige Zuweisung in  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{A}$  diejenige Zuweisung, bei der für alle Variablen  $x$  gilt:  $x^{\mathcal{A}} = [x \sigma]^{\mathcal{I},\mathcal{B}}$ .

Dann gilt:  $[\Phi \sigma]^{\mathcal{I},\mathcal{B}} = \Phi^{\mathcal{I},\mathcal{A}}$ .

- Diese beiden Sätze betreffen die Zusammenhänge, die bei Schönig als Überführungen bezeichnet werden.
- Die Aussage ist: Der semantische Wert, den eine Formel nach Substitution in einem Modell  $\mathcal{M}$  unter einer Zuweisung  $\mathcal{A}$  erhält ( $[\Phi \sigma]^{\mathcal{I},\mathcal{A}}$ ) ergibt sich in demselben Modell  $\mathcal{M}$  aber evtl. mit einer anderen Belegung  $\mathcal{B}$  für die ursprüngliche Formel ( $\Phi^{\mathcal{I},\mathcal{B}}$ ). Die Belegung  $\mathcal{B}$  ist eindeutig durch die Substitution, das Modell und die Belegung  $\mathcal{A}$  bestimmt. Die Umkehrung gilt nicht unbedingt. z.B. kann die Formel  $P(x) \vee \neg P(y)$  wahr oder falsch sein, die Formel  $P(x) \vee \neg P(x)$  ist aber immer wahr.

Aufgabe (ohne Nummer)

Beweisen Sie die Sätze 5.3.7 und 5.3.8.

## Gebundene Umbenennung

---

### Satz

Seien  $x$  und  $y$  Variablen und  $\Phi$  eine Formel aus  $\mathcal{L}_{PL}$ , in der  $y$  nicht frei vorkommt.

Wenn die Substitution  $\{x / y\}$  frei ist bzgl.  $\Phi$ , dann sind

- die Formeln  $(\forall x) \Phi$  und  $(\forall y) [\Phi \{x / y\}]$  äquivalent.
- die Formeln  $(\exists x) \Phi$  und  $(\exists y) [\Phi \{x / y\}]$  äquivalent.

### Beispiel

$(\forall x) P(x)$  und  $(\forall y) P(y)$  sind äquivalent.

$(\forall x) P(x, y)$  und  $(\forall y) P(y, y)$  sind aber nicht äquivalent.

[ $y$  kommt in  $P(x, y)$  frei vor.]

$(\forall x) (\exists y) P(x, y)$  und  $(\forall y) (\exists y) P(y, y)$  sind aber nicht äquivalent.

[ $\{x / y\}$  ist nicht frei bzgl.  $(\exists y) P(x, y)$ ]

## Aufgaben

---

### Aufgabe 7-1

Bestimmen sie die Wahrheitswerte der Formeln  $(\forall x) P(x, f(x))$  und  $(\exists x) P(f(x), x)$  in den Modellen  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  bei einer Zuweisung, die Sie sich frei wählen können.

### Aufgabe 7-2

Zeigen Sie, dass die Formel

$$[(\forall x) [P(x) \supset Q(x)] \wedge P(a)] \supset Q(a)$$

gültig ist.

