# Logik & Semantik
# 9. Vorlesung
# Prädikatenlogische Tableaux

**Prädikatenlogische Tableaux**

**Sprachfragmente**

- AE-Formeln – AE-Tableaux
- Monadische Prädikatenlogik

**Spracherweiterung**

- Prädikatenlogik mit Identität – Tableaux

## Prädikatenlogische Tableaux – Tableauexpansion für γ- und δ-Formeln

$$\frac{\gamma}{\gamma(t)} \qquad\qquad \frac{\delta}{\delta(p)}$$

Für einen geschlossenen Term $t$ — Für einen neuen Parameter $p$

### Prädikatenlogische Tableau-Expansion

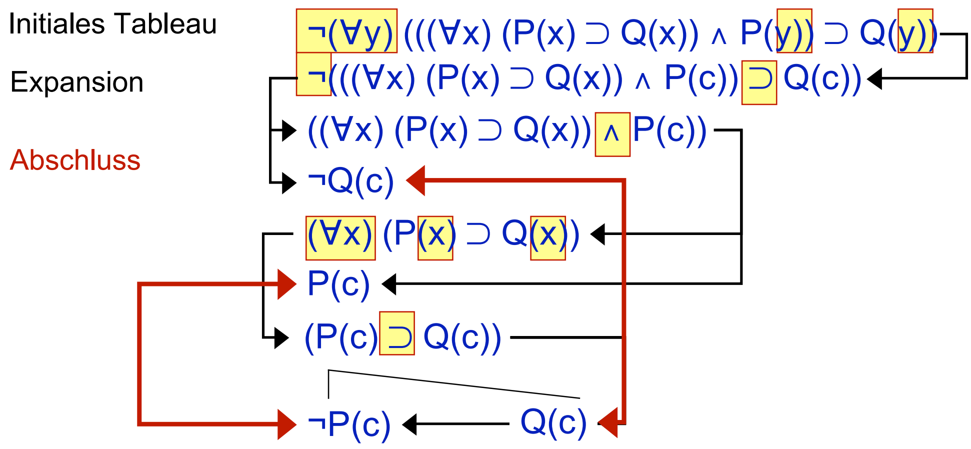
1. In der γ-Expansion kann jeder geschlossene Term von $\mathcal{L}_{PL}{}^{par}$ verwendet werden.
2. In der δ-Expansion können nur neue Parameter verwendet werden, d.h. solche, die noch nicht im Tableau (bzw. Zweig) auftreten.
   (Prinzip der Skolemisierung)



- Alle anderen Tableau-Regeln bleiben wie zuvor.

- Tableau-Beweise sind Beweise von Formeln aus $\mathcal{L}_{PL}$ , aber sie verwenden dabei durchaus Formeln aus $\mathcal{L}_{PL}{}^{par}$.

$\vdash_{ft} (\forall y)\,(((\forall x)\,(P(x) \supset Q(x)) \wedge P(y)) \supset Q(y))$






- ft steht für ‚first-order tableau‘

Aufgabe 9-1

Geben Sie Tableau-Beweise für die folgenden Formeln an:

(Aber Vorsicht ! nicht alle sind beweisbar. Wie erkennen sie diese?)

$(\exists x)\,(\forall y)\,R(x, y) \supset (\forall y)\,(\exists x)\,R(x, y)$

$(\forall x)\,(\exists y)\,(\forall z)\,(\exists w)\,(R(w, z) \supset R(x, y))$

$(\exists x)\,(P(x) \vee Q(x)) \supset ((\exists x)\,P(x) \vee (\exists x)\,Q(x))$

$((\exists x)\,P(x) \vee (\exists x)\,Q(x)) \supset (\exists x)\,(P(x) \vee Q(x))$

$(\exists x)\,(P(x) \wedge Q(x)) \supset ((\exists x)\,P(x) \wedge (\exists x)\,Q(x))$

$((\exists x)\,P(x) \wedge (\exists x)\,Q(x)) \supset (\exists x)\,(P(x) \wedge Q(x))$

## $(\forall y)\,(\forall x)((\forall z)(P(x, z) \supset P(y, z)) \supset Q(x, y)) \vdash_{ft} (\forall x)\,Q(x, x)$

$(\forall y)\,(\forall x)((\forall z)(P(x, z) \supset P(y, z)) \supset Q(x, y))$

$\neg(\forall x)\,Q(x, x)$

$\neg\,Q(c, c)$

$(\forall x)((\forall z)(P(x, z) \supset P(c, z)) \supset Q(x, c))$

$((\forall z)(P(c, z) \supset P(c, z)) \supset Q(c, c))$

$\neg(\forall z)(P(c, z) \supset P(c, z))$ $\qquad$ $Q(c, c)$

$\neg(P(c, d) \supset P(c, d))$

$P(c, d)$

$\neg P(c, d)$

$(\forall y)\,(\forall x)((\forall z)(P(x, z) \supset P(y, z)) \supset Q(x, y))\ ?\vdash_{ft}\ (\forall x)\, Q(x, x)$

$(\forall y)\,(\forall x)((\forall z)(P(x, z) \supset P(y, z)) \supset Q(x, y))$

$\neg(\forall x)\, Q(x, x)$

$(\forall x)((\forall z)(P(x, z) \supset P(c, z)) \supset Q(x, c))$

$((\forall z)(P(c, z) \supset P(c, z)) \supset Q(c, c))$

$\neg(\forall z)(P(c, z) \supset P(c, z))$ $\longleftarrow$ $Q(c, c)$

$\neg(P(c, d) \supset P(c, d))$ $\qquad$ $\neg\, Q(d, d)$

$P(c, d)$

$\neg P(c, d)$ **Abschluss hier noch nicht möglich**

Expansionsreihenfolge ist für den Beweis entscheidend



- Genauer gesagt: Bei der hier gewählten Reihenfolge müsste nun die Formel $(\forall y)\,(\forall x)((\forall z)(P(x, z) \supset P(y, z)) \supset Q(x, y))$ noch ein weiteres Mal mit d expandiert werden, Dan kommt man auch wie bei der vorherigen Expansion zum Abschluss.

## $\vdash_{ft}$ $(\exists x)(P(x) \supset (\forall x)\, P(x))$

$\neg(\exists x)(P(x) \supset (\forall x)\, P(x))$

$\neg(P(a) \supset (\forall x)\, P(x))$

$P(a)$

$\neg(\forall x)\, P(x)$

$\neg P(b)$

$\neg(P(b) \supset (\forall x)\, P(x))$

$P(b)$

$\neg(\forall x)\, P(x)$

**Eine Formel muss zweimal expandiert werden**

$? \vdash_{ft} (\forall x)(\exists y)\, R(x, y) \supset (\exists y)(\forall x)\, R(x, y)$

$\neg((\forall x)(\exists y)\, R(x, y) \supset (\exists y)(\forall x)\, R(x, y))$

$(\forall x)(\exists y)\, R(x, y)$

$\neg(\exists y)(\forall x)\, R(x, y)$

$(\exists y)\, R(a, y)$

$R(a, b)$

$\neg(\forall x)\, R(x, a)$

$\neg R(c, a)$

$(\exists y)\, R(c, y)$

$R(c, d)$

**Wann können wir die Expansion abbrechen?**

## Aussagenlogisches und prädikatenlogisches Tableau

**Aussagenlogisches Tableau**
- Reihenfolge der Expansion beliebig
- Keine Formel muss in einem Zweig mehrfach expandiert werden
- vollständige Expansion einer Formel erfordert nur endlich viele Schritte
- Beliebiger Abschluss und atomarer Abschluss gleichwertig

➔Entscheidungsverfahren

**Prädikatenlogisches Tableau**
- Reihenfolge der Expansion wichtig ($\delta$)
- Mehrfachexpansion im selben Zweig ($\gamma$) kann entscheidend sein
- vollständige Expansion einer Formel kann unendlich viele Schritte erfordern
- Beliebiger Abschluss und atomarer Abschluss gleichwertig
- Semi-Entscheidungsverfahren



- Prädikatenlogik erster Stufe ist nicht entscheidbar. Das heißt, dass es zu jedem Verfahren, das Beweise führen kann, mindestens eine Formel gibt, bei der dieses Verfahren in Schwierigkeiten kommt. Man kann sich also Verfahren überlegen, die für viele Formeln schnell zum Ergebnis kommen, aber keines, das für alle Formeln in vorhersehbarer Zeit zum Ergebnis kommt.

## Prädikatenlogische Tableaux: Korrektheit

**Definition 6.3.1: (Erfüllbarkeit eines Tableau-Zweiges 3.4.2)**

- Ein (prädikatenlogischer) Tableau-Zweig $\Theta$ ist erfüllbar, falls die Menge der Formeln aus $\Theta$ erfüllbar ist.
- Ein (prädikatenlogisches) Tableau ist erfüllbar, wenn einer seiner Zweige erfüllbar ist.

**Satz 6.3.2 (entspricht 3.4.2)**

Die Anwendung einer Tableauexpansionsregel auf ein erfüllbares (prädikatenlogisches) Tableau führt zu einem erfüllbaren Tableau.

**Beweis** (Aussagenlogischer Teil $\Rightarrow$ 3.4.2,
Quantoren $\Rightarrow$ 5.5.1 / Erfüllbarkeit von $\gamma$- und $\delta$-Formeln)

## Korrektheit des Tableauverfahrens

### Satz 6.3.3 (Korrektheit, entspricht 3.4.4)

Falls die (prädikatenlogische) Formel $X$ einen Tableaubeweis besitzt, dann ist $X$ gültig.

### Theorem (starke Korrektheit, entspricht 3.9.4)

Wenn die (prädikatenlogische) Formel $X$ mit dem Tableau-Kalkül aus einer Formelmenge $\boldsymbol{S}$ ableitbar ist, dann folgt $X$ aus $\boldsymbol{S}$.

### Beweise

- Im wesentlichen wie im aussagenlogischen Fall unter Verwendung von Satz 6.3.2.

## Systematische PL-Tableaux

**Definition (Vgl. Ben-Ari, 2001, Algorithmus 5.29)**

Ein Tableau ist ein systematisches Tableau zu einer prädikatenlogischen Formel F, wenn folgendes gilt:

- Die Wurzel enthält die Formel F.
- Jeder endliche Zweig ist als geschlossen oder offen markiert.

Für jeden Zweig $\tau$ sei jeweils $U(\tau)$ die Menge der in $\tau$ auftretenden Formeln.

1. $\tau$ ist genau dann als geschlossen markiert, wenn $U(\tau)$ ein Paar komplementärer Literale enthält (und endlich ist).
2. Kommt in einen offenen Zweig $\tau$ eine $\alpha$-, $\beta$ oder $\delta$-Formel in $\tau$ vor, so wird sie in $\tau$ expandiert, bevor eine $\gamma$-Formel expandiert wird.
3. Sind alle $\alpha$-, $\beta$ oder $\delta$-Formel im offenen Zweig $\tau$, die vor Knoten n auftauchen, auch vor diesem Knoten expandiert, dann trägt n alle Formeln, die dadurch entstehen, dass alle $\gamma$-Formeln, die in $\tau$ vor n auftauchen, bezüglich aller geschlossenen Terme, die in $\tau$ vor n auftauchen (mindestens aber einer Konstanten a), expandiert werden. Tauchen alle Formeln von n in $\tau$ schon vor n auf, dann ist $\tau$ als offen markiert (und endlich).



- Nach obiger Formulierung dürfen an den Knoten auch (endliche) Formelmengen annotiert werden.

- 2. soll auch als erfüllt gelten, wenn das Resultat der Formelexpansion schon vor der Formel im Zweig steht, z.B. weil eine Formel im selben Zweig mehrfach erzeugt aber nur einmal expandiert wurde.
- Kommt in $\tau$ keine $\gamma$-Formel vor, dann wird in 3. die leere Formelmenge erzeugt und $\tau$ als offen markiert.

- Obige Formulierung ist vielleicht weniger dynamisch als die Algorithmus-Formulierung von Ben-Ari. Allerdings dürfte klar sein, dass die obige Beschreibung auch für unendliche Zweige zutreffen kann. (NB: Ich (CE) finde es schwer vorstellbar, dass ein Algorithmus als Ausgabe eine Tableau mit unendlichen Zweigen hat.)

## Vollständige Expansion in systematischen Tableaux

**Lemma (Ben-Ari, 2001) 5.30***

Sei $\tau$ ein offener Zweig eines systematischen Tableaus, n ein Knoten aus $\tau$ und A eine expandierbare Formel von n.

Dann enthält $\tau$ einen Knoten m, der das Produkt der Expansion von A enthält.

Wenn A eine $\gamma$-Formel ist, dann ist für jeden Term t aus $U(\tau)$ ein Knoten m enthalten, so dass $\gamma(t)$ zum Knoteninhalt von m gehört.

**Beweis**

Zur Übung.

**Theorem (Ben-Ari, 2001) 5.32***

Sei $\tau$ ein offener Zweig eines systematischen Tableaus, dann ist die Menge der in $\tau$ auftretenden Formeln eine Hintikka-Menge.

## Vollständigkeit des Tableauverfahrens

### Theorem (Ben-Ari, 2001) 5.34

Falls die (prädikatenlogische) Formel $X$ gültig ist, dann ist das / jedes systematische Tableau zu $X$ geschlossen.

### Beweis

- Ergibt sich aus 5.32 (offene Zweige tragen Hintikka-Mengen) und 5.33 (Hintikka-Mengen sind erfüllbar)

### Beobachtung

- Geschlossene systematische Tableau sind stets endlich.

## Kompaktheit

**Theorem (5.9.1*) (Ben-Ari, 2001, 5.40): Kompaktheitstheorem**

Sei $\boldsymbol{S} \subseteq \mathcal{gFor}(\mathcal{L}_{\mathrm{PL}})$. Wenn alle endlichen Teilmengen von $\boldsymbol{S}$ erfüllbar sind, dann ist $\boldsymbol{S}$ erfüllbar.

**Satz 5.10.2**

Es sei $X$ eine geschlossene Formel und $\boldsymbol{S}$ eine Menge geschlossener Formeln.

$\boldsymbol{S} \models X$ genau dann, wenn

$\boldsymbol{S}_0 \models X$ für eine endliche Teilmenge $\boldsymbol{S}_0 \subseteq \boldsymbol{S}$.



Satz 5.10.2 kann wie folgt interpretiert werden: Jede Konsequenz einer beliebigen Informationsmenge ist auch schon Konsequenz einer endlichen Informationsmenge.

Diese Folie gehört eigentlich in den Abschnitt zur Semantik der Prädikatenlogik, aber das Kompaktheitstheorem ist für den zweiten Satz auf der folgenden Folie wichtig.

## Vollständigkeit des Tableauverfahrens

**Theorem 6.4.3 (Vollständigkeit, entspricht 3.7.3)**

Falls die (prädikatenlogische) Formel *X* gültig ist, so besitzt *X* einen Tableaubeweis.

**Theorem (starke Vollständigkeit entspricht 3.9.4)**

Wenn die (prädikatenlogische) Formel *X* aus einer Formelmenge ***S*** folgt, dann ist *X* mit dem Tableau-Kalkül aus ***S*** ableitbar.

**Beweise**

- Ergeben sich aus den vorherstehenden Theoremen und der Definition von Tableaubeweis.
- kann man auch bei Fitting 1996 nachlesen.

## Tableau-Verfahren für Prädikatenlogik

### Zusammenfassung

- Das Tableau-Verfahren für die Prädikatenlogik ist
  - Korrekt (6.3.3) und
  - Vollständig (6.4.3)
- Trotzdem gibt es kein Entscheidungsverfahren für Gültigkeit in der Prädikatenlogik (Foliensatz 8)!

- Kein Verfahren, das systematische Tableau konstruiert, kann die Termination garantieren.

Logik & Semantik
9. Vorlesung
Prädikatenlogische Tableaux

Prädikatenlogische Tableaux

**Sprachfragmente**

- AE-Formeln – AE-Tableaux
- Monadische Prädikatenlogik

Spracherweiterung

- Prädikatenlogik mit Identität – Tableaux

## Ein entscheidbares Sprachfragment

**Definition 8.5.2* (AE-Formeln)**

- Eine geschlossene prädikatenlogische Formel ist in *Prenex-Form*, wenn kein Quantor einem Junktor untergeordnet ist.
- Eine geschlossene prädikatenlogische Formel in Prenex-Form ohne Funktionssymbole und Konstanten, in der kein Allquantor im Skopus eines Existenzquantors steht, ist eine *eigentliche AE-Formel*.
- Eine prädikatenlogische Formel, die äquivalent zu einer eigentlichen AE-Formel ist, nennen wir auch *AE-Formel*.
- Das sind alle AE-Formeln.

**Beispiel**

$(\forall y)(\exists x)(P(x) \supset P(y))$ also auch $(\exists x)(P(x) \supset (\forall x)\, P(x))$

Ch. Habel / C. Eschenbach: Logik & Semantik 9 – 19

- Selbstverständlich gibt es Formeln, die keine AE-Formeln sind.
- Es gibt systematische Umformungsverfahren mit denen man zu einer Formel eine äquivalente Formel in Prenex-Form erzeugen kann.
- Das im folgenden geschilderte Verfahren funktioniert für die eigentlichen AE-Formeln.

- Die Menge der AE-Formeln ist selbstverständlich nicht unter Negation abgeschlossen. Die Negation einer (eigentliche) AE-Formel ist eine EA-Formel.

## AE-Tableaux

### Konstruktion von AE-Tableaux

- Nach einer γ-Expansion, darf keine δ-Expansion mehr erfolgen.
- Striktheit: Außer γ-Formeln darf keine Formel mehrfach (im selben Zweig) expandiert werden.

### Expansionsregeln

| $\dfrac{\gamma}{\gamma(p)}$ | $\dfrac{\gamma}{\gamma(p_0)}$ | $\dfrac{\delta}{\delta(p)}$ |
|---|---|---|
| Für einen im selben Zweig zuvor durch eine δ-Expansion eingeführten Parameter $p$ | Für einen festen Parameter $p_0$, falls im selben Zweig kein Parameter durch eine δ-Expansion eingeführt wurde | Für einen neuen Parameter $p$ |



- Werden AE-Tableau für (Negationen von) AE-Formeln gebildet, die keine ‚eigentlichen' AE-Formeln sind, dann kann es passieren, dass das AE-Tableau nicht abgeschlossen ist, obwohl die Formel unerfüllbar ist. Daher ist ggf. die Formel erst in eigentliche AE-Form zu bringen.
- Beispiel: Man führe den AE-Tableau-Beweis für
- $(\exists x)\,(P(x) \supset (\forall y)\,P(y))$
- oder
- $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(y) \supset (R(x, z) \supset R(x, z)))$

$\vdash_{AEft}$ $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(R(x, y) \supset R(z, z))$

$\neg (\forall x)(\exists y)(\exists z)(R(x, y) \supset R(z, z))$

$\neg (\exists y)(\exists z)(R(p_1, y) \supset R(z, z))$

$\neg (\exists z)(R(p_1, p_1) \supset R(z, z))$

$\neg (R(p_1, p_1) \supset R(p_1, p_1))$

$R(p_1, p_1)$

$\neg R(p_1, p_1)$

**Tableau abgeschlossen $\Rightarrow$ Theorem**

## ? $\vdash_{AEft}$ $(\forall x)(\forall z)(\exists y)(R(x, y) \supset R(z, z))$

$\neg (\forall x)(\forall z)(\exists y)(R(x, y) \supset R(z, z))$

$\neg (\forall z)(\exists y)(R(p_1, y) \supset R(z, z))$

$\neg (\exists y)(R(p_1, y) \supset R(p_2, p_2))$

$\neg (R(p_1, p_1) \supset R(p_2, p_2))$

$\neg (R(p_1, p_2) \supset R(p_2, p_2))$

$R(p_1, p_1)$

$\neg R(p_2, p_2)$

$R(p_1, p_2)$

$\neg R(p_2, p_2)$

**Herbrand-Modell** $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$

$\mathcal{D} = \{p_1, p_2\}$

$\mathcal{I}(p_1) = p_1$

$\mathcal{I}(p_2) = p_2$

$\mathcal{I}(R) = \{(p_1, p_1), (p_1, p_2)\}$

$\mathcal{I}(R(p_1, p_1)) = \mathbf{t}$

$\mathcal{I}(R(p_1, p_2)) = \mathbf{t}$

$\mathcal{I}(\neg R(p_2, p_2)) = \mathbf{t}$

$\mathcal{I}(\neg(R(p_1, p_2) \supset R(p_2, p_2))) = \mathbf{t}$

$\mathcal{I}(\neg(R(p_1, p_1) \supset R(p_2, p_2))) = \mathbf{t}$

$\mathcal{I}(\neg(\exists y)(R(p_1, y) \supset R(p_2, p_2))) = \mathbf{t}$

$\mathcal{I}(\neg(\forall z)(\exists y)(R(p_1, y) \supset R(z, z))) = \mathbf{t}$

$\mathcal{I}(\neg(\forall x)(\forall z)(\exists y)(R(x, y) \supset R(z, z))) = \mathbf{t}$

**Keine strikte Expansion möglich**



- Offene Zweige in vollständig expandierten AE-Tableaux ergeben Gegenbeispiele.

## Entscheidbarkeit von AE-Tautologien

**Satz 8.5.3**

Es sei $X$ eine eigentliche AE-Formel.

1. $X$ ist genau dann gültig, wenn es ein abgeschlossenes vollständig expandiertes AE-Tableau für $\neg X$ gibt
2. Wenn ein vollständig expandiertes AE-Tableau für $\neg X$ abgeschlossen ist, dann ist jedes vollständig expandierte AE-Tableau für $\neg X$ abgeschlossen.
3. Es gibt einen systematischen Weg AE-Tableaux für $\neg X$ zu konstruieren, so dass ein abgeschlossenes Tableau gefunden wird, wenn es existiert. Das Verfahren terminiert auf jeden Fall.



- Man beachte, dass für AE-Formeln zwar die Gültigkeit mit dem geschilderten Verfahren entscheidbar ist, nicht aber die (Un-)Erfüllbarkeit.

## Endliche-Modell-Eigenschaft

### Definition (Ben-Ari, 2001) 5.36*

Eine Formelmenge ***U*** hat genau dann die Endliche-Modell-Eigenschaft (finite model property), wenn gilt: ***U*** ist genau dann erfüllbar wenn sie in einem Modell mit endlicher Domäne erfüllbar ist.

Eine Logik-Sprache $\mathcal{L}$ hat genau dann die Endliche-Modell-Eigenschaft, wenn jede endliche Menge von Formeln von $\mathcal{L}$ die Endliche-Modell-Eigenschaft hat.

### Gegenbeispiel

- Die Formelmenge $\{(\forall x)\ (\exists y)\ P(x, y),\ (\forall x)\ \neg P(x, x),\ (\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \supset P(x, z))\}$ hat nicht die Endliche-Modell-Eigenschaft (da sie erfüllbar ist aber kein endliches Modell besitzt)

## EA-Formeln und endliche Modelle

### Theorem (Ben-Ari, 2001) 5.37

- Sei ***U*** eine endliche Menge von Formeln in Prenex-Form, die keine Funktionssymbole oder Konstanten enthalten, wobei kein Existenz-Quantor im Skopus eines Allquantors steht.
- Dann hat ***U*** die Endliche-Modell-Eigenschaft.

- Entsprechend hat die Sprache der EA-Formeln ohne Funktionssymbole oder Konstanten die Endliche-Modell-Eigenschaft.

## Monadische Prädikatenlogik erster Stufe

**Definition**

Eine prädikatenlogische Sprache (erster Stufe) ist genau dann monadisch,

- wenn alle Relationssymbole die Stelligkeit 1 haben
- und es keine Funktionssymbole gibt.

**Lemma**

In einer monadischen Prädikatenlogik erster Stufe ist jede geschlossene Formel eine AE-Formel.

**Corollar**

Monadische Prädikatenlogik erster Stufe ist entscheidbar.



Beweisidee zu obigem Lemma:

Bei der monadischen Prädikatenlogik kann man jede geschlossene Formel in eine Form bringen, bei der im Skopus jeden Quantors kein anderer Quantor und keine 'fremde' Variable enthalten ist. (Das zu beweisen, ist technisch etwas trickreich, aber nicht wirklich schwierig.)

Wenn man so eine Form vorliegen hat, ist es natürlich kein Problem mehr, solange Skopuserweiterungen durchzuführen, bis man eine AE-Formel hat.

Zu weiteren entscheidbaren Fragmenten der Prädikatenlogik s.a. Ben-Ari (2001), Th. 5.44, 5.45, 5.46

## Logik & Semantik
## 9. Vorlesung
## Prädikatenlogische Tableaux

**Prädikatenlogische Tableaux**

**Sprachfragmente**

- AE-Formeln – AE-Tableaux
- Monadische Prädikatenlogik

**Spracherweiterung**

- Prädikatenlogik mit Identität – Tableaux

## Prädikatenlogik mit Identität

### Identität als logische Relation

- Domänenunabhängig anwendbar
- formale Relation
  - Zweistellig $= \in \mathcal{Rel}_2(\mathcal{L}_{PL=})$
  - Reflexiv
  - Symmetrisch
  - Transitiv
- Infixnotation
- Ersetzbarkeit
  - $(a = b)$ führt zu
  - $(f(a) = f(b))$
  - $P(a) \equiv P(b)$

## Formeln

**Definition (*atomare Formel*)**

In Ergänzung zu Def. 5.1.3

Falls $t_1$, $t_2$ Terme von $\mathcal{L}_{PL=}$ sind, so ist $(t_1 = t_2)$ eine *atomare Formel* von $\mathcal{L}_{PL=}$.

**Definition 9.2.1 (normales Modell)**

Ein Modell $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ für $\mathcal{L}_{PL=}$ ist *normal*, wenn $\mathcal{I}(=)$ die Identitätsrelation auf $\mathcal{D}$ ist.

**Definition 9.2.2 (Folgerbarkeit mit Identität)**

Eine geschlossene Formel $X$ *folgt unter Berücksichtigung der Identität* aus einer Menge $\boldsymbol{S}$ geschlossener Formeln, falls $X$ wahr ist in allen normalen Modellen, die alle Elemente von $\boldsymbol{S}$ wahr machen. Wir schreiben: $\boldsymbol{S} \models_{=} X$

## Gültigkeit mit Identität

**Definition**

Eine geschlossene Formel $X$ *ist unter Berücksichtigung der Identität gültig*, falls $X$ in allen normalen Modellen wahr ist.
Wir schreiben: $\vDash_{=} X$

**Beobachtung**

$\vDash_{=} (\forall x)(x = x)$

**Definition 9.3.1**

$\mathit{ref}$ ist die Formel $(\forall x)(x = x)$

## Ersetzungsaxiome (1)

**Beobachtung**

Falls $f \in \mathcal{Fun}_1(\mathcal{L}_{PL=})$ und $x_1$, $y_1$ Variablen von $\mathcal{L}_{PL=}$ sind

$\models_= (\forall x_1)\ (\forall y_1)\ ((x_1 = y_1) \supset (f(x_1) = f(y_1)))$

Falls $f \in \mathcal{Fun}_2(\mathcal{L}_{PL=})$ und $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ Variablen von $\mathcal{L}_{PL=}$ sind

$\models_= (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(((x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2)) \supset (f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)))$

**Definition 9.3.2 + 3**

Falls $f \in \mathcal{Fun}_n(\mathcal{L}_{PL=})$ und $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ Variablen von $\mathcal{L}_{PL=}$ sind, dann ist das Ersetzungsaxiom für $f$ die Formel

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)(((x_1 = y_1) \wedge \ldots \wedge (x_n = y_n)) \supset (f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)))$$

- $\mathcal{fun}(\mathcal{L}_{PL=})$ ist die Menge aller Ersetzungsaxiome für die Funktionssymbole von $\mathcal{L}_{PL=}$.

## Ersetzungsaxiome (2)

**Beobachtung**

Falls $R \in \mathcal{R}el_1(\mathcal{L}_{PL=})$ und $x_1$, $y_1$ Variablen von $\mathcal{L}_{PL=}$ sind

$\models_= (\forall x_1)\ (\forall y_1)\ ((x_1 = y_1) \supset (R(x_1) \supset R(y_1)))$

Falls $R \in \mathcal{R}el_2(\mathcal{L}_{PL=})$ und $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ Variablen von $\mathcal{L}_{PL=}$ sind

$\models_= (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)(((x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2)) \supset (R(x_1, x_2) \supset R(y_1, y_2)))$

**Definition 9.3.5 + 6**

Falls $R \in \mathcal{R}el_n(\mathcal{L}_{PL=})$ und $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ Variablen von $\mathcal{L}_{PL=}$ sind, dann ist das Ersetzungsaxiom für $R$ die Formel

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)(((x_1 = y_1) \wedge \ldots \wedge (x_n = y_n)) \supset (R(x_1, \ldots, x_n) \supset R(y_1, \ldots, y_n)))$$

- $rel(\mathcal{L}_{PL=})$ ist die Menge aller Ersetzungsaxiome für die Relationssymbole von $\mathcal{L}_{PL=}$.



- Da '=' auch ein zweistelliges Relationssymbol ist, gibt es auch ein Ersetzungsaxiom für '='.

Aufgabe

1. Wie lautet das Ersetzungsaxiom ($E_=$) für '=' ?
2. Wie lässt sich das Ersetzungsaxiom zusammen mit der Reflexivität von '=' nutzen, um die Symmetrie von '=' zu zeigen?
   $\{ref, E_=\} \models (\forall x)\ (\forall y)\ ((x = y) \supset (y = x))$
3. Wie lässt sich das Ersetzungsaxiom zusammen mit der Reflexivität von '=' nutzen, um die Transitivität von '=' zu zeigen?
   $\{ref, E_=\} \models (\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((x = y) \supset ((y = z) \supset (x = z)))$

## Wirksamkeit der Ersetzungsaxiome (1)

**Satz 9.3.4**

- Es sei $t$ ein Term der Sprache $\mathcal{L}_{PL=}$, in dem $x_1, \ldots, x_n$ alle freien Variablen sind. Es seien $y_1, \ldots, y_n$ von diesen verschiedene Variablen und $u$ der Term $t\{x_1 / y_1, \ldots, x_n / y_n\}$. Dann
- $\{ref\} \cup fun(\mathcal{L}_{PL=}) \vDash$
  $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)(((x_1 = y_1) \wedge \ldots \wedge (x_n = y_n)) \supset (t = u))$

**Satz 9.3.7**

- Es sei $X$ eine Formel der Sprache $\mathcal{L}_{PL=}$, in der $x_1, \ldots, x_n$ alle freien Variablen sind. Es seien $y_1, \ldots, y_n$ von diesen verschiedene Variablen und $Y$ die Formel $X\{x_1 / y_1, \ldots, x_n / y_n\}$. Dann
- $\{ref\} \cup fun(\mathcal{L}_{PL=}) \cup rel(\mathcal{L}_{PL=}) \vDash$
  $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)(((x_1 = y_1) \wedge \ldots \wedge (x_n = y_n)) \supset (X \supset Y))$



- Zu beachten: hier ist das Folgerungszeichen nicht mit ‚=' indiziert. Die Formelmengen vor dem Folgerungszeichen leisten dasselbe wie die Beschränkung auf die normalen Modelle.

## Wirksamkeit der Ersetzungsaxiome (2)

**Definition 9.3.8**

Für eine Sprache $\mathcal{L}_{PL=}$ sei

$eq(\mathcal{L}_{PL=}) = \{ref\} \cup fun(\mathcal{L}_{PL=}) \cup rel(\mathcal{L}_{PL=})$

**Theorem 9.3.9**

Es sei $\mathcal{L}_{PL=}$ eine prädikatenlogische Sprache mit Identität und ***S*** eine Menge geschlossener Formeln aus $\mathcal{L}_{PL=}$. Dann gilt:

$\boldsymbol{S} \cup eq(\mathcal{L}_{PL=}) \vDash X$ genau dann, wenn $\boldsymbol{S} \vDash_{=} X$



- Theorem 9.3.9 besagt: Die Ergänzung der prädikatenlogischen Sprache um die Identität hat nicht etwas vollkommen Neues gebracht. Wollen wir Identität nutzen, müssen wir auch nicht unbedingt eine speziellen Theorembeweiser benutzen, der mit Identität umgehen kann. Wir können auch einen anderen Theorembeweiser nutzen, müssen dann nur durch die Ergänzung der Identitätsaxiome spezifizieren, was es mit unserem Symbol '=' auf sich hat.
- Ein Tableau-Beweiser, dem die Ersetzungsregeln durch spezifische Expansionsregeln ‚eingebaut' wurde, kann allerdings oft effektiver damit verfahren.

## Tableau-Expansion für Identität ($\vdash_{ft=}$)

**Basis: Tableaux (ohne freie Variablen)**

**Reflexivitätsregel**

- Wenn $t$ ein geschlossener Term ist, dann kann der Knoten $(t = t)$ jedem Zweig angefügt werden.

**Ersetzungsregel**

- Wenn in einem Zweig $(t = u)$ und die Formel $\Phi(t)$ vorkommt, dann kann der Knoten $\Phi(u)$ angefügt werden.

**Abschlussregel (alternativ zur Reflexivitätsregel)**

- Ein Zweig, in dem $\neg(t = t)$ für einen beliebigen Term $t$ vorkommt, ist abgeschlossen.



- Für Alternativen: Fitting 1996

- $\Phi(t)$ steht hier für eine beliebige Formel, in der der Term $t$ mindestens einmal vorkommt, und $\Phi(u)$ für die Formel, die entsteht, wenn man in $\Phi(t)$ ein oder mehrere Vorkommen der Teilfomel $t$ in $\Phi(t)$ durch $u$ ersetzt. Wenn $t$ mehrfach vorkommt, müssen dabei nicht alle Vorkommen ersetzt werden.

## $\vdash_{\text{ft=}} (\forall x)(\forall y)((x = y) \supset (y = x))$

$$\neg (\forall x)(\forall y)((x = y) \supset (y = x))$$

$$\neg (\forall y)((a = y) \supset (y = a))$$

$$\neg ((a = b) \supset (b = a))$$

$$(a = b)$$

$$\neg (b = a)$$

$$\neg (b = b)$$

$$(b = b)$$

**Tableau abgeschlossen $\Rightarrow$ Theorem**

$\vdash_{ft=}$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x = y) \wedge (y = z)) \supset (x = z))$

$\neg (\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x = y) \wedge (y = z)) \supset (x = z))$

$\neg (\forall y)(\forall z)(((a = y) \wedge (y = z)) \supset (a = z))$

$\neg (\forall z)(((a = b) \wedge (b = z)) \supset (a = z))$

$\neg (((a = b) \wedge (b = c)) \supset (a = c))$

$(a = b) \wedge (b = c)$

$\neg (a = c)$

$(a = b)$

$(b = c)$

$\neg (b = c)$

**Tableau abgeschlossen $\Rightarrow$ Theorem**

## Korrektheit und Vollständigkeit

### Theorem 9.7.1 (Korrektheit)

- Wenn eine geschlossene Formel $X$ einen Tableau-Beweis unter Verwendung der Expansionsregeln für Identität hat ($\vdash_{ft=} X$), dann ist $X$ unter Berücksichtigung der Identität gültig. ($\vDash_{=} X$).

### Theorem 9.7.2 (Vollständigkeit)

- Wenn eine geschlossene Formel $X$ unter Berücksichtigung der Identität gültig ist ($\vDash_{=} X$), dann hat $X$ einen Tableau-Beweis unter Verwendung der Expansionsregeln für Identität ($\vdash_{ft=} X$).



- Beweise finden sich bei Fitting 1996