Logik und Semantik – Sommersemester 2005
Carola Eschenbach
25.4.2005

Übungsblatt 4

Zu bearbeiten zum 1.5.05

Aufgabe 1
Diese Aufgabe richtet sich an Studierende, die eine in der Vorlesung präsentierte Technik an einem einfachen Beispiel nachvollziehen wollen.

Zeigen Sie, dass die Formel $[\, (\forall x)\, [P(x) \supset Q(x)] \wedge P(a)\, ] \supset Q(a)$ gültig ist.

Aufgabe 2
Diese Aufgabe richtet sich an Studierende, die an einem einfachen Beispiel das Beweisen von Aussagen über logische Ausdrücke üben wollen.

Definition 5.2.3
Es seien $\sigma$ und $\tau$ Substitutionen. Als Komposition von $\sigma$ und $\tau$ bezeichnen wir diejenige Substitution $\rho$, für die gilt: Für alle Variablen x ist $x\rho = [x\sigma]\,\tau$. Anstelle von $\rho$ schreiben wir auch $\sigma\tau$.

Lemma 5.2.4
Es seien $\sigma$ und $\tau$ Substitutionen. Dann gilt für jeden Term $t$ (nicht nur die Variablen):

$$[t]\sigma\,\tau = [t\sigma]\tau.$$

1. Sei $\sigma = \{ x / y \}$ und $\tau = \{ y / c \}$, wobei $x$ und $y$ Variablen sind und $c$ ein Konstantensymbol ist. Zeigen Sie: $\sigma\,\tau = \{ x / c, y / c \}$
2. Beweisen Sie, dass die Komposition von Substitutionen assoziativ ist, d.h.: $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$
3. Beweisen Sie Lemma 5.2.4 (Wenn das zu viel wird: überlegen Sie sich, wie die Struktur des Beweises aussieht. Welche Teilbeweise sind zu führen? Worauf lässt sich zurückgreifen?)

Aufgabe 3
Diese Aufgabe richtet sich an Studierende, die an einem etwas komplexeren Beispiel das Beweisen von Aussagen über logische Ausdrücke und ihre semantische Auswertung üben wollen.

Satz 5.3.7
Sei $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ ein Modell für $\mathcal{L}_{PL}$, $\Phi \in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{PL})$, x eine Variable und t ein geschlossener Term. Sei $\mathcal{A}$ eine Zuweisung mit $x^{\mathcal{A}} = t^{\mathcal{I}}$.
Dann gilt: $[\Phi\{x/t\}]^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \Phi^{\mathcal{I},\mathcal{A}}$ .
Sogar für jede x-Variante $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{A}$ gilt: $[\Phi\{x/t\}]^{\mathcal{I},\mathcal{B}} = \Phi^{\mathcal{I},\mathcal{A}}$ .

1. Beweisen Sie Satz 5.3.7.
2. An welcher Stelle wird im Beweis davon Gebrauch gemacht, dass t ein geschlossener Term ist ? Durch welche andere Voraussetzung könnte man diese Annahme ablösen?