Logik (FGI3) – Wintersemester 2010/11
Carola Eschenbach
Ausgabe: 26.10.10 – Austausch der Lösungen: 2.11.10 – Korrekturen an CE: 9.11.10 – Rückgabe: 16.11.10

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.
(Zu Foliensatz 2)

a) Beweisen Sie:
Sind zwei Formeln F, G $\in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{AL})$ gegeben, so dass G (als Zeichenkette betrachtet) Teil von F ist, dann ist G auch Teilformel von F.

(Ein nützliches Lemma für diesen Beweis ist:
Ist F $\in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{AL})$, X Präfix von F und Y Suffix von F, dann enthält X mindestens so viele ‚(' wie ‚)' und Y enthält mindestens so viele ‚)' wie ‚('. Hierbei kann auch X = F und Y = F zugelassen werden, womit sich dann ergibt, dass F gleich viele ‚(' und ‚)' enthält.
Wenn Sie es schaffen, obige Aussage mit Hilfe dieses Lemmas zu zeigen, dann sollten Sie auch noch dieses Lemma selbst beweisen. Beides kann mit struktureller Induktion gelingen.)

b) Erläutern Sie, in welcher Hinsicht die unter a) bewiesene Eigenschaft wichtig für formale Sprachen sein kann.

Aufgabe 2.
(Zu Foliensatz 2).

Definition
Sei D eine beliebige Menge und f: D → D eine Abbildung von D nach D. $x \in$ D ist genau dann ein *Fixpunkt von f*, wenn f(x) = x.

Wir betrachten nun die Menge $\mathcal{ZK}(\mathcal{L}_{AL})$ aller Zeichenketten über dem aussagenlogischen Alphabet. (In $\mathcal{ZK}(\mathcal{L}_{AL})$ sollen also auch Zeichenketten enthalten sein, die keine Formeln sind, z.B. ') ∧∨(¬ (').

Und wir betrachten die Funktion Anr: $2^{\mathcal{ZK}(\mathcal{L}AL)} \rightarrow 2^{\mathcal{ZK}(\mathcal{L}AL)}$, die Mengen von Zeichenketten auf Mengen von Zeichenketten abbildet, gemäß folgender Vorschrift:

$\mathrm{Anr}(\mathbf{M}) = \{\neg X \mid X \in \mathbf{M}\} \cup \{(X \oplus Y) \mid X, Y \in \mathbf{M}, \oplus \text{ ist Junktor}\} \cup \mathcal{At}(\mathcal{L}_{AL})$

Zeigen Sie:
a) Die Menge der aussagenlogischen Formeln ($\mathcal{For}(\mathcal{L}_{AL})$) ist ein Fixpunkt der Funktion Anr.
b) Wenn $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{ZK}(\mathcal{L}_{AL})$ ein Fixpunkt der Funktion Anr ist, dann ist auch $\mathcal{For}(\mathcal{L}_{AL}) \subseteq \mathbf{M}$.
[$\mathcal{For}(\mathcal{L}_{AL})$ ist der (bzgl. Mengeninklusion) kleinste Fixpunkt bzgl. Anr]