

Übungsblatt 2

Aufgabe 1.

(Zu Foliensatz 3)

Definition

Sei $\mathcal{L} = (L, Tr_n, v_{op}, DTr, aDTr)$ ein interpretiertes logisches System charakterisiert durch

- die Sprache (L) ,
- eine Wahrheitswertmenge Tr_n ($n \geq 2$) und
- eine wahrheitswertfunktionale Auswertung der logischen Symbole (v_{op}),
- eine Menge designierter Wahrheitswerte $DTr \subseteq Tr_n$ und
- eine Menge anti-designierter Wahrheitswerte $aDTr \subseteq Tr_n$.

$F \in L$ ist \mathcal{L} -gültig, bzw. eine \mathcal{L} -Tautologie, wenn $v(F) \in DTr$ für jede Bewertung v .

$F \in L$ ist \mathcal{L} -unerfüllbar, bzw. eine \mathcal{L} -Kontradiktion, wenn $v(F) \in aDTr$ für jede Bewertung v .

Welche Einschränkungen ergeben sich für die Wahl von DTr und $aDTr$ und die Interpretation der Negation (\neg), wenn für eine zu entwickelnde mehrwertige Logik folgendes gelten soll:

- 1) Es gibt Tautologien, die keine Kontradiktionen sind.
- 2) Es gibt Kontradiktionen, die keine Tautologien sind.
- 3) $F \in L$ ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg F$ eine Kontradiktion ist.
- 4) $F \in L$ ist genau dann eine Kontradiktion, wenn $\neg F$ eine Tautologie ist.

Ergeben sich zusätzliche Schwierigkeiten, wenn wir zusätzlich folgendes erreichen wollen:

- 5) Keine Formel ist sowohl Tautologie als auch Kontradiktion.
- 6) (Vollständigkeit): Für jeden möglichen Wahrheitswertverlauf gibt es eine Formel, die diesen Wahrheitswertverlauf aufweist.

Aufgabe 2.

(Zu den Foliensätzen 3 und 4)

In der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik gibt es zu jeder Formel eine äquivalente Formel in konjunktiver Normalform und eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Zwei Formeln sollen für diese Aufgabe genau dann als äquivalent bezüglich einer dreiwertigen Logik gelten, wenn die Formeln unter jeder (drei-wertigen) Belegung denselben Wahrheitswert haben.

- a) Erläutern Sie kurz, ob sich die Begriffe ‚konjunktive Normalform‘ und ‚disjunktive Normalform‘ unverändert in die mehrwertige Logik übernehmen lassen oder welche Anpassungen erforderlich sind.
- b) Betrachten Sie die drei in der Vorlesung behandelten drei-wertigen Logiken mit den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \supset$. In welcher dieser Logiken gibt es ebenfalls zu jeder Formel eine äquivalente Formel in konjunktiver Normalform und eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform?
- c) Begründen Sie Ihre Antwort.