Logik (FGI3) – Wintersemester 2010/11
Carola Eschenbach
Ausgabe: 14.12.10 – Austausch der Lösungen: 4.1.11 – Korrekturen an CE: 11.1.11 – Rückgabe: 18.1.11

Übungsblatt 4

Diese Blatt einhält eine größere Menge von Aufgaben. Wählen Sie diejenigen aus, die Ihren Bedürfnissen entsprechen.

Aufgabe 1

Diese Aufgabe richtet sich an Studierende, die eine in der Vorlesung präsentierte Technik an einem einfachen Beispiel nachvollziehen wollen.

Zeigen Sie, dass die Formel $[\ (\forall x)\ [P(x) \supset Q(x)] \wedge P(a)\ ] \supset Q(a)$ gültig ist.

Aufgabe 2

Diese Aufgabe richtet sich an Studierende, die an einem einfachen Beispiel das Beweisen von Aussagen über logische Ausdrücke üben wollen.

Definition 5.2.3
Es seien σ und τ Substitutionen. Als Komposition von σ und τ bezeichnen wir diejenige Substitution ρ, für die gilt: Für alle Variablen x ist $x\rho = [x\sigma]\,\tau$. Anstelle von ρ schreiben wir auch $\sigma\tau$.

Lemma 5.2.4
Es seien σ und τ Substitutionen. Dann gilt für jeden Term t (nicht nur die Variablen):

$$[t]\sigma\tau = [t\sigma]\tau.$$

1. Sei $\sigma = \{\ x\ /\ y\ \}$ und $\tau = \{\ y\ /\ c\ \}$, wobei x und y Variablen sind und c ein Konstantensymbol ist. Zeigen Sie: $\sigma\tau = \{\ x\ /\ c,\ y\ /\ c\ \}$
2. Beweisen Sie, dass die Komposition von Substitutionen assoziativ ist, d.h.: $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$
3. Beweisen Sie Lemma 5.2.4 (Wenn das zu viel wird: überlegen Sie sich, wie die Struktur des Beweises aussieht. Welche Teilbeweise sind zu führen? Worauf lässt sich zurückgreifen?)

Aufgabe 3

Diese Aufgabe richtet sich an Studierende, die an einem etwas komplexeren Beispiel das Beweisen von Aussagen über logische Ausdrücke und ihre semantische Auswertung üben wollen.

Satz 5.3.7
Sei $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ ein Modell für $\mathcal{L}_{\mathrm{PL}}$, $\Phi \in \mathcal{F}or(\mathcal{L}_{\mathrm{PL}})$, x eine Variable und t ein geschlossener Term. Sei $\mathcal{A}$ eine Zuweisung mit $x^{\mathcal{A}} = t^{\mathcal{I}}$.
Dann gilt: $[\Phi\{x/t\}]^{\mathcal{I},\mathcal{A}} = \Phi^{\mathcal{I},\mathcal{A}}$.
Sogar für jede x-Variante $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{A}$ gilt: $[\Phi\{x/t\}]^{\mathcal{I},\mathcal{B}} = \Phi^{\mathcal{I},\mathcal{A}}$.

1. Beweisen Sie Satz 5.3.7.
2. An welcher Stelle wird im Beweis davon Gebrauch gemacht, dass t ein geschlossener Term ist ? Durch welche andere Voraussetzung könnte man diese Annahme ablösen?

Aufgabe 4
Wir arbeiten hier mit folgender

Definition
Eine Formel $\Phi \in \mathrm{For}(L_{PL})$ ist genau dann eine *Folgerung* aus einer Menge $\boldsymbol{S} \subseteq \mathrm{For}(L_{PL})$ von Formeln, falls für alle Modelle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ und unter allen Zuweisungen $\mathcal{A}$ in $\mathcal{M}$ gilt: wenn für alle Elemente $\Psi \in \boldsymbol{S}$ $\Psi^{I,A} = \mathbf{t}$, dann auch $\Phi^{I,A} = \mathbf{t}$. Wir schreiben: $\boldsymbol{S} \vDash \Phi$.

Zeigen Sie:
Satz
Für alle Formeln $\Phi \in \mathcal{For}(\mathcal{L}_{PL})$, Formelmengen $\boldsymbol{S} \subseteq \mathcal{For}(\mathcal{L}_{PL})$, Variablen $x \in \mathcal{Var}(\mathcal{L}_{PL})$ und Konstanten $a \in \mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{PL})$, die nicht in $\boldsymbol{S}$ oder Φ vorkommen, gilt:
$\boldsymbol{S} \vDash \Phi$ genau dann, wenn $\boldsymbol{S}[x/a] \vDash \Phi[x/a]$.

Was sagt dieser Satz über die Rolle von freien Variablen aus?