

# Wissensrepräsentation

–

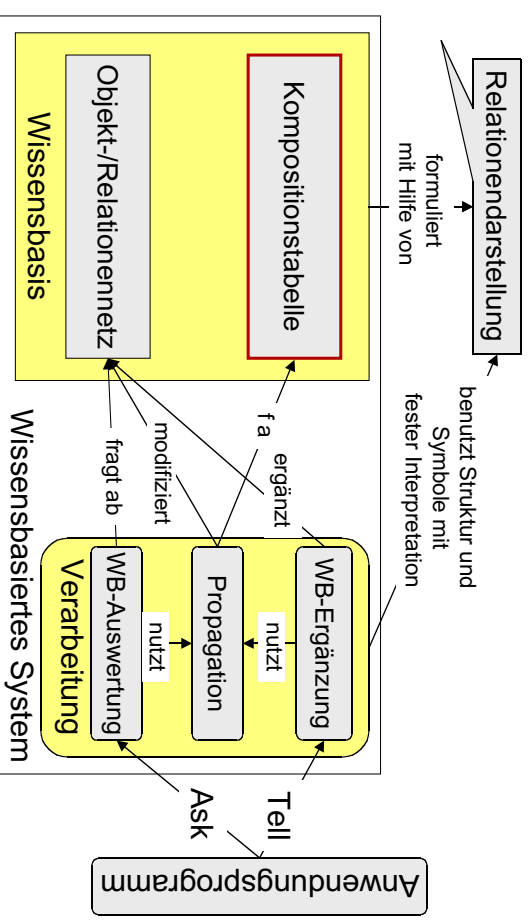
Christopher Habel, Hedda Schmidke

Sommersemester 2004

## Sitzung 12: Constraintverarbeitung

- Aufbau von Relationensystemen für Constraintverarbeitung
- Gut verarbeitbare Sprachfragmente

## Wissensbasiertes System mit Relationen und Kompositionstabellen



Wissensrepräsentation, SoSe 2004

Ch. Habel / C. Eschenbach / H. Schmidke

## Kompositionstabelle – Kompositionensaxiome

### Kompositionstabelle der Basisrelationen für Perioden

<	>	d	di	o	oi
<	$\mathcal{B}$	< o m d s	<	<	< o m d s
>	$\mathcal{B}$	> o i m i d f	>	> o i m i d f	>
d	<	d	$\mathcal{B}$	< o m d s	> o i m i d f
di	< o m d i f i	> o i d i m i s i	o o i d d i =	di	o i d i f i

→ Allen (1983)

Zu je zwei Basisrelationen ist die Menge der kompatiblen Basisrelationen eingetragen.

Die Tabelle kann als alternatives Axiomensystem [AK] interpretiert werden. Z.B.:

[A<d]  $V \ t \ t' \ t'' \ [t < t' \wedge t'' d \ t' \rightarrow (t < t' \vee t \ o \ t' \vee t \ m \ t' \vee t \ d \ t' \vee t \ s \ t' )]$

Wissensrepräsentation, SoSe 2004

Ch. Habel / C. Eschenbach / H. Schmidke

<	<	>	d	di	o	oi	m	mi	s	si	f	fi
<	<	$\mathcal{B}$	< o m d s	<	<	< o m d s	<	<	<	<	<	<
>	$\mathcal{B}$	>	> o i m i d f	>	>	> o i m i d f	>	>	>	>	>	>
d	<	>	d	$\mathcal{B}$	<	< o m m i d f	<	<	d	>	>	>
di	< o m d i f i	> o i d i m i s i	o o i d d i =	di	o i d i f i	o i d i s i	o i d i s i	o i d i s i	o d i f i	o d i f i	o i d i s i	< o m d s
o	<	>	> o i d i m i s i	<	<	< o m d i f i	<	<	<	<	<	<
oi	< o m d i f i	>	> o i d f	>	>	> o i m i d i =	>	>	>	>	>	>
m	<	>	> o i d i m i s i	<	<	<	<	<	<	<	<	<
mi	< o m d i f i	>	> o i d f	>	>	> o i d f	>	>	>	>	>	>
s	<	>	d	<	<	< o m d i f i	<	<	<	<	<	<
si	< o m d i f i	>	> o i d f	di	<	< o m o d i f i	oi	o d i f i	o d i f i	o d i f i	o i d i s i	o i d i s i
f	<	>	d	>	>	> o i d i m i s i	>	>	>	>	>	>
fi	<	>	> o i d i m i s i	>	>	> o i d i m i s i	o	o d i s i	o d i s i	o d i s i	o d i s i	o d i s i

Wissensrepräsentation, SoSe 2004

Ch. Habel / C. Eschenbach / H. Schmidke

## Relationenalgebren

- der Mathematische (algebraische) Ansatz

### Hintergrund (Motivation von Tarski)

- Boolesche Algebren bilden angemessene Modelle für Aussagenlogik und monadische Prädikatenlogik
- Was für Algebren leisten entsprechendes für Logik mit zweistelligen Relationen?
- Vorarbeiten: DeMorgan, Peirce, Schröder

### Ziel

- endliches System von Operatoren auf binären Relationen
- Axiomatisierung ihrer Interaktion

## Relationenalgebra

### Definition

- Eine **abstrakte Relationenalgebra** ist eine Struktur

$\langle A, +, \cdot, -, 0, 1, \circ, \sim, \checkmark \rangle$  des Typs

$\langle 2, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 0 \rangle$ , wobei

- $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$  eine Boolesche Algebra ist und
- $\langle A, \circ, 1 \rangle$  ein Monoid (Halbgruppe mit neutr. El.)
- $\checkmark a = a$  und  $(a \circ b) \checkmark = b \checkmark \circ a \checkmark$ , für alle  $a, b \in A$ , und
- $(a \circ b) \cdot c = 0 \Leftrightarrow (a \checkmark \circ c) \cdot b = 0$
- $(a \circ b) \cdot c = 0 \Leftrightarrow (c \circ b) \checkmark \cdot a = 0$

➤ Jede konkrete Algebra von Relationen ist eine abstrakte Relationenalgebra.

➤ Es gibt abstrakte Relationenalgebren, die nicht zu konkreten Algebren von Relationen isomorph sind.

## (Konkrete) Algebren binärer Relationen

### Definition

- Die **komplette Algebra der (bin.) Relationen** über einer Grundmenge  $U$  ist die Struktur

$\mathcal{Rel}(U) = \langle 2^U, \cup, \cap, \neg, \emptyset, V, \circ, \sim, \text{Id} \rangle$ , wobei

- $V = U \times U$ ,
- – die Komplementbildung,
- $\circ$  die Relationskomposition und
- $\sim$  die Konversenbildung,
- $\text{Id}$  die Identitätsrelation über  $U$  ist.

• Jede Teilmenge von  $V$ , die abgeschlossen bzgl. der Operatoren  $\cup, \cap, \neg, \circ$  und  $\sim$  ist und die Konstanten  $\emptyset, V$ , und  $\text{Id}$  enthält, ist eine **Algebra binärer Relationen**.

## Atomare Relationenalgebren

### Es sei

$\mathcal{R} = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1, \circ, \sim, \checkmark \rangle$  eine Relationenalgebra, wobei die Boolesche Algebra  $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$  atomar ist.

➤ Dann sind die Operationen  $\circ, \sim$  eindeutig durch ihr Verhalten auf den Atomen bestimmt.

➤ Bei endlichen Mengen von Atomen lassen sich die Operatoren  $\circ, \sim$  durch geeignete Tabellen darstellen.

- **Unterschied zu Kompositionstabellen der KI**

- $R_k = (R_i \circ R_j)$  entspricht
- $\forall x z [\exists y [R_i(x, y) \wedge R_j(y, z)] \Leftrightarrow R_k(x, z)]$
- nicht für alle interessanten Relationensysteme gibt es **endliche** atomare Relationenalgebren

## Aufbau von Relationensystemen und Kompositionstabellen

### Direkter Ansatz

- aus der Anschauung motiviert
- Aufzählung von Basisrelationen (mit Angabe von intendierten Interpretationen)
- Manuelle Bestimmung der Kompositionstabelle

### Axiomatischer Ansatz

- Spezifikation von primitiven Relationen (Axiome)
- ‚Taxonomie‘ (‚Subsumption‘, Exklusivität)
- Reflexivität, Symmetrie
- Kompositionensaxiome für primitive Relationen
- Definition von Basisrelationen
- Kompositionstabelle als Sammlung von Theoremen

Wissensrepräsentation, SoSe 2004

Ch. Habel / C. Eschenbach / H. Schmitzke

12 – 9

## Taxonomic Systems of Relations: Axioms

### Taxonomic Relations

- Inclusion, exclusiveness, and exhaustion

$$[\text{Incl}_{ij}] \quad \forall x y [R_i(x, y) \rightarrow R_j(x, y)]$$

$$[\text{Excl}_{ij}] \quad \forall x y [R_i(x, y) \rightarrow \neg R_j(x, y)]$$

$$[\text{Exh}] \quad \forall x y [R_1(x, y) \vee R_2(x, y) \vee \dots \vee R_n(x, y)]$$

### (Taxonomic) Definitions

- Disjunction, conjunction, negation of relations

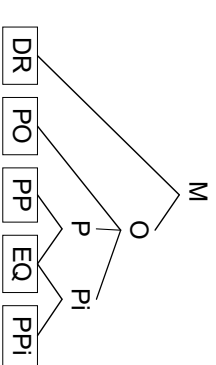
$$[\text{Def}_1] \quad \forall x y [R_z(x, y) \leftrightarrow R_1(x, y) \vee \dots \vee R_k(x, y)]$$

$$[\text{Def}_2] \quad \forall x y [R_z(x, y) \leftrightarrow R_1(x, y) \wedge \dots \wedge R_k(x, y)]$$

$$[\text{Def}_2] \quad \forall x y [R_z(x, y) \leftrightarrow \neg R_1(x, y)]$$

## Beispiel: Mereologische Relationen (RCC-5)

$\vee$	DR	PO	PPi	EQ	PP
DR	M	$\sim$ Pi	DR	DR	$\sim$ Pi
PO	$\sim$ P	M	$\sim$ P	PO	PO PP
PP	DR	$\sim$ Pi	M	PP	PP
EQ	DR	PO	PPi	EQ	PP
PPi	$\sim$ P	PO PPi	PPi	PPi	O



P: Teil von

Pi: hat als Teil

PP: echter/eigentlicher Teil von

O: Überlappung

DR: Disjunktheit

PO: partielle/echte Überlappung

EQ: Äquivalenz/Identität/Gleichheit

Taxonomy based presentation

Disjunctive form

$$\forall x y z [PO(x, y) \wedge PP(y, z) \rightarrow (PO(x, z) \vee PP(x, z))]$$

Wissensrepräsentation, SoSe 2004

Ch. Habel / C. Eschenbach / H. Schmitzke

12 – 10

## Taxonomy of Mereological Relations

### Primitive relations

- P, O

### Taxonomic axiom

$$[A1] \quad \forall x y [P(x, y) \rightarrow O(x, y)]$$

### Definitions

$$[\text{Def1}] \quad \forall x y [EQ(x, y) \leftrightarrow P(x, y) \wedge Pi(x, y)]$$

$$[\text{Def2}] \quad \forall x y [PP(x, y) \leftrightarrow P(x, y) \wedge \neg Pi(x, y)]$$

$$[\text{Def3}] \quad \forall x y [PPi(x, y) \leftrightarrow Pi(x, y) \wedge \neg P(x, y)]$$

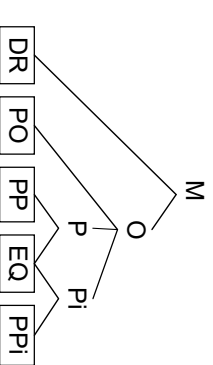
$$[\text{Def4}] \quad \forall x y [DR(x, y) \leftrightarrow \neg O(x, y)]$$

$$[\text{Def5}] \quad \forall x y [PO(x, y) \leftrightarrow O(x, y) \wedge \neg P(x, y) \wedge \neg Pi(x, y)]$$

$$[\text{Def6}] \quad \forall x y [P(x, y) \leftrightarrow P(y, x)]$$

### Basic relations (atomic relations)

- DR, PO, PP, EQ, PPi
- an **atomic relation** is subsumed by every relation it does not exclude



12 – 11

12 – 12

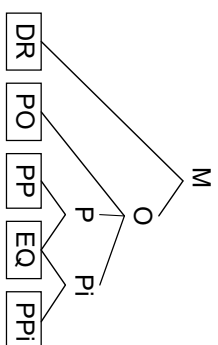
## Taxonomy of Mereological Relations (primitives are basic)

Primitive Relations = basic relations

- DR, PO, PP, EQ, PPI

Exclusiveness and Exhaustiveness

$$\forall x y [DR(x, y) \rightarrow \neg PO(x, y)]$$



$$\forall x y [DR(x, y) \vee PO(x, y) \vee PP(x, y) \vee EQ(x, y) \vee PPI(x, y)]$$

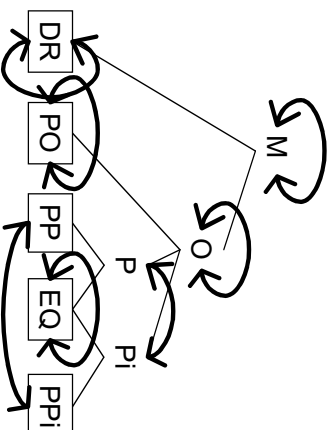
Definitions

$$\forall x y [P(x, y) \leftrightarrow PP(x, y) \vee EQ(x, y)]$$

$$\forall x y [Pi(x, y) \leftrightarrow PPI(x, y) \vee EQ(x, y)]$$

$$\forall x y [O(x, y) \leftrightarrow PO(x, y) \vee P(x, y) \vee Pi(x, y)]$$

## Inverse Relations



### Taxonomic axioms

[Def6]  $\forall x y [Pi(x, y) \leftrightarrow P(y, x)]$

[Sym<sub>O</sub>]  $\forall x y [O(x, y) \rightarrow O(y, x)]$

## Reflexivity and Converseness

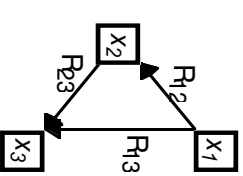
### Reduction of network

- One base relation is reflexive

$$R_{ii} = R_{ref}$$

- Every relation has a converse/inverse relation

$$R_{ij}(x_j, x_i) \leftrightarrow R_{ji}(x_i, x_j)$$



### Example: Mereology

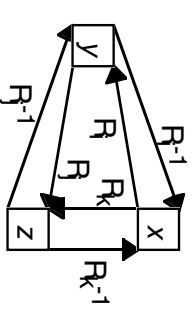
- Primitive relations P and O

[Ref<sub>P</sub>]  $\forall x [P(x, x)]$

[Def6]  $\forall x y [Pi(x, y) \leftrightarrow P(y, x)]$

[Sym<sub>O</sub>]  $\forall x y [O(x, y) \rightarrow O(y, x)]$

## Redundancies in Composition Tables



### Equivalent formulae

[CX1]  $\forall x y z [R_k(x, y) \wedge R_j(y, z) \rightarrow R_{kj}(x, z)]$

[CX1]  $\forall x y z [R_j(y, z) \wedge \neg R_k^{-1}(z, x) \rightarrow \neg R_j^{-1}(y, x)]$

[CX2]  $\forall x y z [\neg R_k^{-1}(z, x) \wedge R_j(x, y) \rightarrow \neg R_j^{-1}(z, y)]$

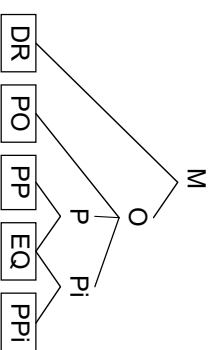
[CX3]  $\forall x y z [R_j^{-1}(z, y) \wedge R_k^{-1}(y, x) \rightarrow R_{kj}^{-1}(z, x)]$

[CX4]  $\forall x y z [\neg R_k(x, z) \wedge R_j^{-1}(z, y) \rightarrow \neg R_j(x, y)]$

[CX5]  $\forall x y z [R_j^{-1}(y, x) \wedge \neg R_k(x, z) \rightarrow \neg R_j(y, z)]$

## Example: CT for Transitivity of P

v	DR	PO	PPi	EQ	PP
DR	M	M	~P	PO DR	~Pi
PO	M	M	~P	PO DR	~Pi
PP	~Pi	~Pi	M	PP	PP
EQ	PO DR	PO DR	PPi	EQ	PP
PPi	~P	~P	PPi	PPi	M

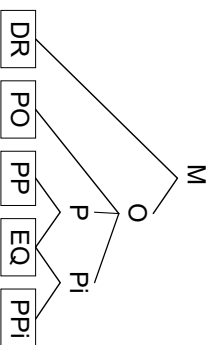


### Transitivity of P

- [CP1]  $\forall x y z [P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)]$
- [CP1']  $\forall x y z [P(y, z) \wedge \neg P(z, x) \rightarrow \neg P(y, x)]$
- [CP2]  $\forall x y z [\neg P(z, x) \wedge P(x, y) \rightarrow \neg P(z, y)]$
- [CP3]  $\forall x y z [P(z, y) \wedge P(y, x) \rightarrow P(z, x)]$
- [CP4]  $\forall x y z [\neg P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow \neg P(x, y)]$
- [CP5]  $\forall x y z [P(y, x) \wedge \neg P(x, z) \rightarrow \neg P(y, z)]$

## Beispiel: Mereologische Relationen (RCC-5)

v	DR	PO	PPi	EQ	PP
DR	M	~Pi	DR	DR	~Pi
PO	~P	M	~P	PO	PO PP
PP	DR	~Pi	M	PP	PP
EQ	DR	PO	PPi	EQ	PP
PPi	~P	PO PPi	PPi	PPi	O



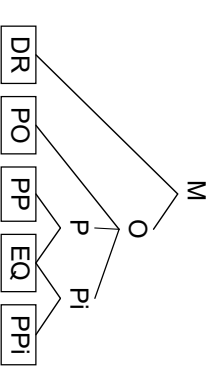
### Zusammenfassung der beiden Tafeln (Durchschnitt)

#### Test

- Modellgenerierung für die bestehenden Einträge

## Example: Interaction of O and P

v	DR	PO	PPi	EQ	PP
DR	M	~Pi	DR	DR	~Pi
PO	~P	M	M	O	O
PP	DR	M	M	O	O
EQ	DR	O	O	O	O
PPi	~P	O	O	O	O



### Upward Inheritance of O

- [CP]  $\forall x y z [O(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow O(x, z)]$

## The Axiomatic System for Mereological Composition

### Mereological taxonomy

- [Ref<sub>a</sub>]  $\forall x [P(x, x)]$
- [Sym<sub>O</sub>]  $\forall x y [O(x, y) \rightarrow O(y, x)]$
- [A1]  $\forall x y [P(x, y) \rightarrow O(x, y)]$

### Mereological composition

- [CP]  $\forall x y z [P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)]$
- [CO]  $\forall x y z [O(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow O(x, z)]$

### General (syntactic) characteristics

- Prenex form does not contain existential quantifier
- ➔ a strongly terminological system

## Theory formats

### Terminological Theories

- Equivalent to formula  $\forall Y_1 \dots Y_m \exists(Y_1, \dots, Y_m)$
- in prenex normal form without defined term prefix without existential quantifier.

• If satisfiable in a domain with  $n$  elements, then satisfiable in every domain with less than  $n$  elements.

➤ Satisfiable iff satisfiable in a domain with one element.

### Strongly Terminological Theories

- Equivalent to formula  $\forall Y_1 \dots Y_m \exists(Y_1, \dots, Y_m)$
- in prenex normal form without defined term or **identity** prefix without existential quantifier.

• If satisfiable in a domain with  $n$  elements, then satisfiable in every domain with more elements.

➤ If satisfiable, then satisfiable in every domain.

## Network of Constraints

### Equivalent to formula $\Phi(x_1, \dots, x_n)$

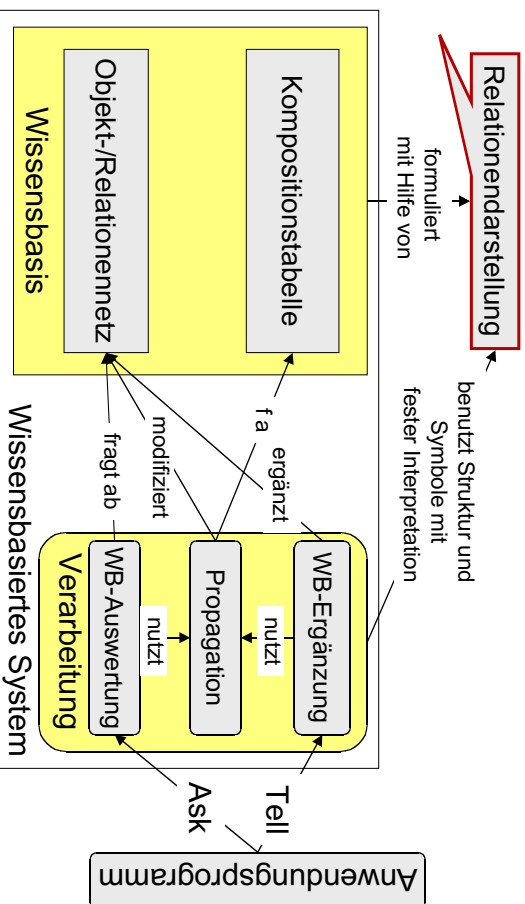
- $x_1, \dots, x_n$ : free variables, no quantifiers within  $\Phi$

### Combined with CT, inferences with CP

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) \wedge \forall Y_1 \dots Y_m \exists(Y_1, \dots, Y_m)$$

- Satisfiable iff satisfiable in a domain with at most  $n$  elements.
- Minimal complexity of models is determined by the complexity of the network of constraints.

## Wissensbasiertes System mit Relationen und Kompositionstabellen



## Gut verarbeitbare Sprach-Fragmente

### Systematische Beschränkung

- nicht alle Disjunktionen von Basisrelationen als Initialbewertung zulassen
- das kann auch die Menge der Disjunktionen in der Propagation beschränken
- Es kann nicht zu jeder Basisrelation die Negation zum Fragment gehören

### Gut verarbeitbare Fragmente (tractable)

- ermöglichen Erfüllungsbetriebsbestimmung allein durch Constraint-Propagation (SAT wird durch CP gelöst)
- Zu einigen Relationensystemen sind maximale, gut verarbeitbare Relationenmengen bekannt (Nebel & Bürkert 1995, Renz & Nebel 1998)

## Verfeinerung des Backtracking

### Bei Kenntnis von gut verarbeitbaren Fragmenten

- Bei Verzweigungen (Wertbestimmung) wähle Kante mit einer Relation, die nicht zum gutartigen Fragment gehört
- Wähle als Werte eine Zerlegung der Relation in Relationen des gutartigen Fragments

### Beobachtungen

- Sobald alle Kanten gutartige Relationen tragen, ist kein weiteres Absteigen (Beschränkung der Tiefe des Suchbaums) mehr erforderlich.
- Die Anzahl der Alternativen (Breite des Suchbaums) wird reduziert (im Vergleich zur Festlegung auf Basisrelationen)

## Constraint-Netze

### für Systeme binärer Relationen

- Knoten stehen für Objekte der Domäne
- Kanten sind durch (Disjunktionen von Basis-)Relationen markiert
  - dieses schränkt die Ausdruckbarkeit von Constraints ein, z.B.  $R(x, y) \vee S(y, z)$  ist nicht direkt ausdrückbar
- Constraints zwischen Kantenmarkierungen ergeben sich aus Kompositionsrestriktionen
- Kompositionsrestriktionen sind in Kompositionstabellen erfasst
- Constraint-Propagation ist im allgemeinen nicht für die Erkennung von Erfüllbarkeit ausreichend
  - Einschränkung der Relationenmenge

## Abschluss Relationensysteme













### Systeme binärer Relationen

- können eine taxonomische Struktur aufweisen
- erlauben die Bestimmung/Definition von
  - konversen/inversen Relationen
  - (atomaren) Basisrelationen
- können durch Kompositionsrestriktionen strukturiert sein
- Kompositionstabellen für Basisrelationen reichen für die Bestimmung aller Kompositionsrestriktionen aus
- sind mit Relationenalgebren verwandt
  - aber im allgemeinen weniger stark restringiert

## Übung: Constraints

### Wumpus-Welt

- Welcher Teil des Wissens kann durch Constraints repräsentiert werden?
- Welches sind die Knoten in dem Constraint-Graph?
- Welche Arten von Constraints (Stelligkeit) treten auf?
- Wie verändert sich der Constraint-Graph während der Goldsuche?

1				
2				
3				
4	