Wissensrepräsentation

–

Christopher Habel, Hedda Schmidtke

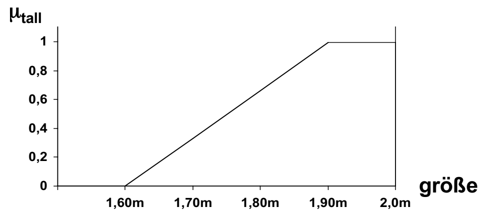
Sommersemester 2004

Sitzung 22: Fuzzy Logic

- Unscharfe Mengen
- Possibilistische Logik (Teil 2)

Zugehörigkeit zu einer unscharfen Menge

$$\mu_{tall}(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn größe}(x) \leq 1{,}60\text{m} \\ 1, & \text{wenn größe}(x) \geq 1{,}90\text{m} \\ 1 - \dfrac{(1{,}90\text{m} - \text{größe}(x))}{0{,}30\text{m}}, & \text{sonst} \end{cases}$$



- **Unscharfe Menge (fuzzy set) $M_{tall} = \{(x, \mu_{tall}(x))\}$**
- **Zugehörigkeitsfunktion: $\mu_{tall}(x) \in [0,1]$**

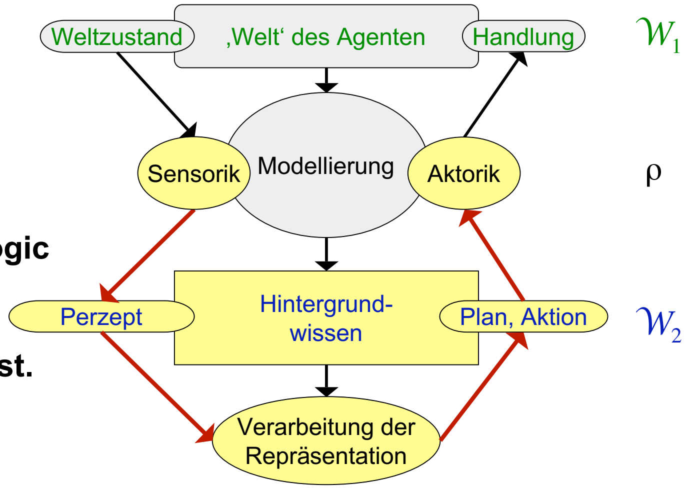
Sichtweisen

- **Bewertung einer Aussage: Grad der Wahrheit**
  - Gegeben: Messung
  - größe(john) = 1,75m
  - „John ist groß“ ist wahr zu 0,5
  - Eingesetzt für Sensorik, Aktorik (Regelungsmechanismen)
  - Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen
- **Constraint-Sichtweise: Grad des Glaubens**
  - Gegeben: unsichere Aussage
  - „‚John ist groß‘ ist wahr zu mindestens 0,5“
  - Weiterverarbeitung unter unsicherer Information
  - Einsetzbar in Wissensverarbeitung
  - Possibilistische Logik

Wissensbasierter Agent

Fuzzy-Logic

Possibilist. Logik



Literatur

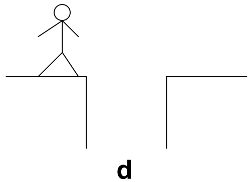
Zur Possibilistischen Logik

D. Dubois, J. Lang und H. Prade. Possibilistic Logic. In *D. Gabbay, C. Hogger, and J. Robinson (eds.), Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Volume 3: Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning,* Oxford University Press (1994), pp. 493 – 513.

Zur Beziehung zwischen Fuzzy-Mengen und possibilistischer Logik

D. Dubois und H. Prade. Fuzzy Set and Possibility Theory-Based Methods in Artificial Intelligence. In *Artificial Intelligence 148* (2003), S. 1 – 9.

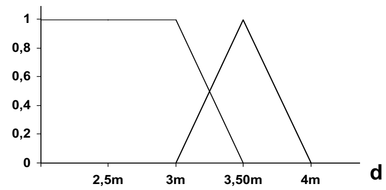
Beispiel: Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen



m-sprung(p) ∧ ziel(p) → sprung(p)
Springen oder lieber nicht?

Unsicherheiten für erfolgreichen Sprung zu p: Erf(p)

- **Distanz d aus Messung**
- **Menge A_i von Distanzen, die Agent springen kann**

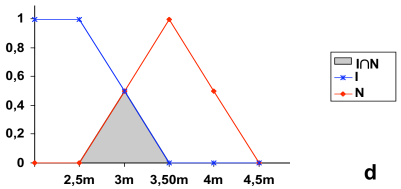


Erf(p) als unscharfe Schnittmenge zwischen unsch. Distanz dist(p) und unsch. Sprungfähigkeit sprungf(p):

$\mu_{Erf(p)}(x) = \min(\mu_{dist(p)}(x), \mu_{sprungf(p)}(x)) = \mu_{dist(p) \cap sprungf(p)}$

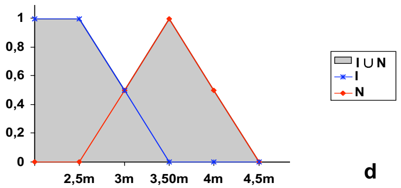
Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen

Unsichere Mengen I und N:



Durchschnitt

I∩N: $\mu_{I \cap N}(x) = \min(\mu_I(x), \mu_N(x))$

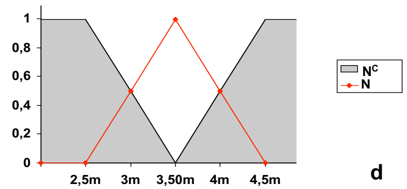


Vereinigung

I∪N: $\mu_{I \cup N}(x) = \max(\mu_I(x), \mu_N(x))$

Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen

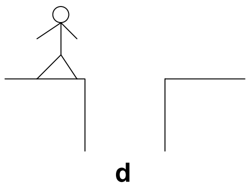
Unsichere Menge N:



Komplement

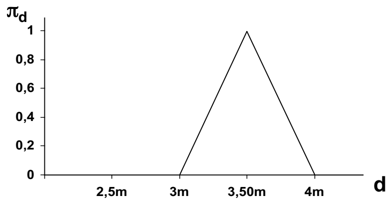
N^C: $\mu_{N^c}(x) = 1 - \mu_N(x)$

Beispiel: Möglichkeitsverteilung



m-sprung(p) $\wedge$ ziel(p) $\rightarrow$ sprung(p)
Springen oder lieber nicht?

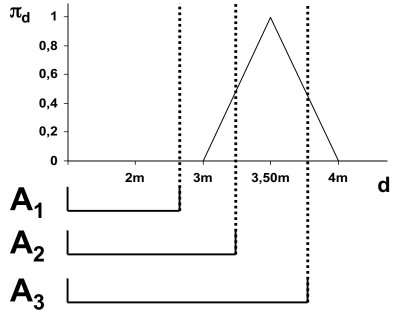
Unsicherheiten:
- **Distanz d aus Messung**
- **Menge A_j von Distanzen, die Agent springen kann**



- **Möglichkeitsverteilung als Nähe zum Prototypen**
- **Möglichkeitsverteilung π_d bei Schätzung 3,5m**

Notwendigkeitsmaß N

Möglichkeitsmaß Π:
$\Pi(A) = \sup_{u\in A} \pi_x(u)$
Notwendigkeitsmaß N:
$N(A) = 1 - \Pi(A^C)$
$= \inf_{u\notin A} (1 - \pi_x(u))$



$N(A\cup B) \geq \max(N(A), N(B))$
$N(A\cap B) = \min(N(A), N(B))$

$\Pi(A\cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$
$\Pi(A\cap B) \leq \min(\Pi(A), \Pi(B))$

$N(A_1) = 0$ $\Pi(A_1) = 0$
$N(A_2) = 0$ $\Pi(A_2) = 0,5$
$N(A_3) = 0,5$ $\Pi(A_3) = 1$

Possibilistische Logik

- **Repräsentation und Verarbeitung sowohl unscharfen als auch sicheren Wissens**
- **Hier: Fragment necessity-valued (possibilistic) logic**
- **N als Notwendigkeitsmaß für (möglicherweise unvollständigen) Wissensstand nutzen**
- **Syntax: Necessity valued formula: $(\phi\ \alpha)$**
  - mit $\phi \in \mathcal{PL}1$
  - Gewichtung $\alpha \in (0,1]$
- **Intendierte Bedeutung: $N(\phi) \geq \alpha$**

Wissensbasis

- **Wissensbasis $\mathcal{F}$ ist Menge von Formeln $(\phi\ \alpha)$**
  - Konjunktive Verknüpfung
  - Disjunktive Verknüpfungen $(\phi\ \alpha) \vee (\psi\ \beta)$ nicht im Fragment enthalten
  - Aber: $(\phi\vee\psi\ \beta)$
- **Defuzzifizierung: α-Cut $\mathcal{F}_\alpha = \{(\phi\ \beta) \in \mathcal{F} \mid \beta \geq \alpha\}$**
- **klassische Projektion: $\mathcal{F}^*_\alpha = \{\phi \mid (\phi\ \beta) \in \mathcal{F}, \beta \geq \alpha\}$**

Semantik

- **Möglichkeitsverteilung π über Menge Ω der (klassischen) Interpretationen erzeugt Fuzzy-Menge als Modell von $\mathcal{F}$**
- **Für geschlossene Formel ϕ**
  - $\Pi(\phi) = \sup\{\pi(\varpi), \varpi \vDash \phi\}$
  - $N(\phi) = 1 - \Pi(\neg\phi) = \inf\{1 - \pi(\varpi), \varpi \vDash \phi\}$
- **Es gilt:**
  - $N(T)=1$
  - $N(\phi \wedge \psi) = \min(N(\phi),N(\psi))$
  - $N(\phi \vee \psi) \geq \max(N(\phi),N(\psi))$
  - Wenn $\phi \vDash \psi$ dann $N(\phi) \geq N(\psi)$
- **π erfüllt $(\phi\ \alpha)$ gdw $N(\phi) \geq \alpha$: $\pi \vDash (\phi\ \alpha)$**
  - Beispiel:
    - für $\mathcal{F}=\{(p \rightarrow q\ 0{,}4), (p\ 0{,}7)\}$ $\Omega = \{[p,q], [\neg p,q], [p,\neg q], [\neg p,\neg q]\}$
    - $\pi \vDash \mathcal{F}$ gdw $\pi([\neg p,q])\leq 0{,}3$, $\pi([\neg p,\neg q])\leq 0{,}3$, $\pi([p,\neg q])\leq 0{,}6$, $\pi([p,q])\leq 1$
- **$\mathcal{F} \vDash \phi$ gdw für alle π: wenn $\pi \vDash \mathcal{F}$, dann $\pi \vDash \phi$.**

π erfüllt $(p \rightarrow q\ 0{,}4)$
gdw $N(p \rightarrow q) \geq 0{,}4$
gdw $1 - \Pi(\neg (p \rightarrow q)) \geq 0{,}4$
gdw $1 - \Pi(p \wedge \neg q) \geq 0{,}4$
gdw $1 - 0{,}4 \geq \Pi(p \wedge \neg q)$
gdw $0{,}6 \geq \Pi(p \wedge \neg q)$
gdw $0{,}6 \geq \sup\{\pi(\varpi), \varpi \vDash \phi\}$
gdw $0{,}6 \geq \pi([p,\neg q])$

Partielle Inkonsistenz

- **π heißt normalisiert gdw $\sup\{\pi(\varpi), \varpi \in \Omega\} = 1$**
- **Wenn π normalisiert, gilt $N(\perp)=0$**
- **Nicht normalisiert:**
  - $\sup\{\pi(\varpi), \varpi \in \Omega\} < 1$
  - $\min(N(\phi),N(\neg\phi)) > 0$
- **Partielle Inkonsistenz einer Wissensbasis: $Incons(\mathcal{F}) = \sup\{\alpha \mid \mathcal{F} \vDash (\perp\ \alpha)\}$**
- **Bezug zu α-Cut:**
  $Incons(\mathcal{F}) = \sup\{\alpha \mid \mathcal{F}^*_\alpha$ ist inkonsistent$\}$
- **Widerlegungstheorem:**
  $\mathcal{F} \vDash (\phi\ \alpha)$ gdw $\mathcal{F} \cup \{(\neg\phi\ 1)\} \vDash (\perp\ \alpha)\}$

Resolutionsverfahren

$(c_1\ \alpha_1), (c_2\ \alpha_2) \vdash$
$(R(c_1,c_2)\ \min(\alpha_1, \alpha_2))$

Resultat (Korrektheit und Vollständigkeit): Die Bewertung der optimalen Widerlegung durch Resolution ist der Grad der Inkonsistenz der Wissensbasis

Beispiel (Klauselmenge) C
(elected(p) ∨ elected(m) 1)
(¬elected(p) ∨ ¬elected(m) 1)
(¬curr-pres(x) ∨ elected(x) 0,5)
(curr-pres(m) 1)
(¬supp(j,x) ∨ elected(x) 0,6)
(supp(j,m) 0,2)
(¬ victim-of-aff(x) ∨ ¬elected(x) 0,7)

Beispiel

(¬elected(m) 1) **(¬curr-pres(x) ∨ elected(x) 0,5)**

(¬curr-pres(m) 0,5) **(curr-pres(m) 1)**

(⊥ 0,5)optimal

(¬elected(m) 1) **(¬supp(j,x) ∨ elected(x) 0,6)**

(¬supp(j,m) 0,6) **(supp(j,m) 0,2)**

(⊥ 0,2)non-optimal

Partielle Inkonsistenz berechnen

(victim-of-aff(m) 1)

(¬ victim-of-aff(x) ∨ ¬elected(x) 0,7)

(¬elected(m) 0,7)

(¬curr-pres(x) ∨ elected(x) 0,5)

(curr-pres(m) 1)

(elected(m) 0,5)

(⊥ 0,5)

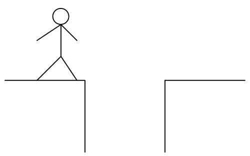
Incons($\mathcal{C}$ ∪ {(victim-of-aff(m) 1)}) = 0,5

Einsatzmöglichkeiten und Grenzen

- **Nicht triviale Deduktion:**
  - $\mathcal{F} \vDash (\phi\ \alpha)$ und Incons($\mathcal{F}$) < α
  - Ist nicht-monoton, weil Hinzufügen von Formeln zur WB den Inkonsistenzgrad erhöhen kann, wodurch Schlüsse mit niedriger Notwendigkeit ungültig werden unter nicht trivialer Deduktion.
- **Verwendungsmöglichkeiten:**
  - Strikte vs nicht-strikte Regeln
  - Perzeptionsabhängiges unsicheres Wissen
- **Weiterentwicklungen:**
  - Bewertung aus (0,1] erfordert totale Ordnung
    ⇒Verwendung einer partiellen Ordnung von Bewertungen
  - Möglichkeitsbewertungen zusätzlich zu Notwendigkeitsbewert.
  - Bewertungen in nicht geschlossenen Formeln zur Repräsentation von je-desto-Regeln

Einsatzmöglichkeiten und Grenzen

{(m-sprung(x) ∧ ziel(x) → sprung(x) 1),
(ziel(p) 0,7),
(m-sprung(p) 0,5)}



d

Resultat:
(sprung(p) 0,5)

- **Kopplung von Sensorik/Aktorik an höhere Wissensverarbeitung**
- **Abstufung von Wahrheit (∞-wert. Logik)**
- **Aber: Abstufung hat für komplexe Formeln und Sachverhalte unklare Bedeutung**
  - Komplexe Schlussfolgerungen tendieren zu Einheitswerten
  - Entfuzzifizierung mittels α-Cuts
  - Was bedeutet ein Resultat von 0,5?

Zwischenstand

Vorlesung 22: Fuzzy Logic

- Operationen auf Fuzzy Mengen
- Possibilistische Logik: Semantik und Inferenzverfahren

Vorlesungen 23 & 24

Probabilistische Erklärungen

Erklärungen und Wissensrevision