Wissensrepräsentation
–

Christopher Habel, Hedda Schmidtke

Sommersemester 2004

Sitzung 24: Probabilistisches Schliessen

- Unsicherheit – Wahrscheinlichkeitsbasierte Ansätze
- Bayes-Netze
  - Struktur
  - Diagnose & Planung

Literatur

Zu *Bayes Netzen*

Russell, Stuart & Norvig, Peter (2003). *Artificial intelligence: A modern approach*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall - Pearson. [chapt. 14]

Pearl, Judea (1988). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems*. San Mateo, CA: Kaufmann.

Probabilistische Ansätze für Schliessen unter Unsicherheit

Gründe für Unsicherheit in der Wissensbasis

- partielle Beobachtbarkeit der Umgebung
- verrauschte Sensorik
- Unsicherheit / Unbestimmtheit der Effekte von Aktionen

Ziele eines probabilistischen Vorgehens

- Prädiktionen der Art:
  Gegeben die verfügbare Evidenz, tritt ein bestimmtes Ereignis ***X*** mit der Wahrscheinlichkeit *P(X)* ein.

Subjektive Interpretation von Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeiten setzen Propositionen in Beziehung zu Zuständen eines Wissenssystems
- Wahrscheinlichkeiten ändern sich mit neuer Evidenz

Zwei Interpretationen von ‚Wahrscheinlichkeit'

Statistische Sicht / Häufigkeitsinterpretation:

Wahrscheinlichkeit ist ein Mass für die Häufigkeit (bei langen Serien von Versuchen).

- Ereignis: Werfen eines Würfels führt zu einer '6' – *in einer sehr langen Serie von Versuchen*
  vs. individuelles Ereignis: Der nächste Wurf dieses Würfels wird zu einer '6' führen [Dies wird von der statistischen Sichtweise nicht behandelt!]

Subjektive / persönliche / Bayessche Sicht:

Probability is a measure of an agent's degree of rational belief.

„Subjektiv" bedeutet nicht „willkürlich", sondern
„bezieht sich auf ein Subjekt, das Überzeugungen hat."

“On the Study of Statistical Intuitions” (1)

Kahneman & Tversky 1982

Wie gut sind eigentlich „statistische Intuitionen“ ?

Eine Personencharakterisierung:

Linda ist 31 Jahre alt, sie lebt allein, ist selbstbewusst und sehr hübsch. Sie hat einen Magister in Philosophie. Während ihres Studiums hat sie sich intensiv mit Fragen sozialer Gerechtigkeit und Diskriminierung befasst und auch an Anti-Atomkraft-Demonstrationen teilgenommen.

“On the Study of Statistical Intuitions” (2)

Kahneman & Tversky 1982

Ordnen Sie bitte die folgenden Aussagen in ihrer Wahrscheinlichkeit an
(1 ≈ am wahrscheinlichsten, 8 ≈ am wenigsten wahrscheinlich)

1. **Linda ist Grundschullehrerin.**
2. **Linda ist Buchhändlerin und gibt Yoga-Kurse.**
3. **Linda ist in der Frauenbewegung aktiv.**
4. **Linda ist Sozialarbeiterin.**
5. **Linda ist Mitglied in der Aktion „Wählt Frauen!“**
6. **Linda ist Bankangestellte.**
7. **Linda ist Versicherungsvertreterin.**
8. **Linda ist Bankangestellte und in der Frauenbewegung aktiv.**

“On the Study of Statistical Intuitions” (3)

Ranking in der heutigen Vorlesung

1	• Linda ist Grundschullehrerin.	4,75	4
2	Linda ist Buchhändlerin und gibt Yoga-Kurse.	5,25	5
3	•Linda ist in der Frauenbewegung aktiv.	1,75	1
4	•Linda ist Sozialarbeiterin.	2,5	3
5	•Linda ist Mitglied in der Aktion „Wählt Frauen!“	2,25	2
6	Linda ist Bankangestellte.	6,75	7
7	•Linda ist Versicherungsvertreterin.	7,0	8
8	Linda ist Bankangestellte und in der Frauenbewegung aktiv.	5,75	6

“On the Study of Statistical Intuitions” (4)

Experiment von Kahneman & Tversky 1982

Ranking im Kahneman-Tversky Experiment:

1	• Linda ist Grundschullehrerin.	5.2	5
2	Linda ist Buchhändlerin und gibt Yoga-Kurse.	3.3	3
3	•Linda ist in der Frauenbewegung aktiv.	2.1	1
4	•Linda ist Sozialarbeiterin.	3.1	2
5	•Linda ist Mitglied in der Aktion „Wählt Frauen!“	5.4	6
6	Linda ist Bankangestellte.	6.2	7
7	•Linda ist Versicherungsvertreterin.	6.4	8
8	Linda ist Bankangestellte und in der Frauenbewegung aktiv.	4.1	4

“On the Study of Statistical Intuitions” (5)

Experiment von Kahneman & Tversky 1982

F	**•Linda ist in der Frauenbewegung aktiv.**	**2.1**	**1**
B	**Linda ist Bankangestellte.**	**6.2**	**7**
F ∧ B	**Linda ist Bankangestellte und in der Frauenbewegung aktiv.**	**4.1**	**4**

Wahrscheinlichkeitstheorie:

$P(F) > P(F \wedge B)$ $\quad$ $P(B) > P(F \wedge B)$

Das Ranking der Versuchspersonen:

$P(F) > P(F \wedge B) > P(B)$

Conjunction effect:

Gewisse Konjunktionen führen zur Annahme höherer Wahrscheinlichkeit.

Zufallsvariablen

Zufallsvariablen

- stehen für Sachverhalte in der Welt, deren Status (trifft zu / trifft nicht zu) uns nicht unbedingt bekannt ist
- besitzen einen Wertebereich (domain), dessen Werte mit
  - boolesch: *{true, false}*
  - diskret: z.B. *{1, 2, 3, 4, 5, 6}*, *{kopf, zahl}*
  - kontinuierlich: z.B. $\mathbb{R}$
- Konvention
  - Bezeichnungen für Zufallsvariablen beginnen mit Grossbuchstaben
  - Bezeichnungen für Werte beginnen mit Kleinbuchstaben (oder sind anderweitig als Werte erkennbar, z.B. *2, 3,)*

Propositionen in $\mathcal{PrL}$

$\mathcal{PrL}$ ≈ „Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie“

- atomare Propositionen
  - bzgl. booleschen ZVen, z.B. *Regnet_am_5.7.04_13:15*
  - bzgl. diskreten oder kontinuierlichen ZVen Gleichungen der Art: *Weather = sunny*
- komplexe Propositionen
  - boolesche Kombinationen von Propositionen, z.B.
    ¬ *Regnet_am_5.7.04_13:15*
    Weather = sunny ∨ *Weather = cloudy*

Die Sätze aus $\mathcal{AL}$ bzw. $\mathcal{PL}_1$ können als Propositionen einer „Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie“ verwendet werden.

a priori Wahrscheinlichkeiten

a priori Wahrscheinlichkeiten

- aus dem reellen Intervall [0, 1]
- subjektive a priori Wahrscheinlichkeiten korrespondieren zum Glauben / zur Überzeugung
  - etwa
    P(regen(5.7.04_13:15)) = 0,4
- komplexe Propositionen
  - boolesche Kombinationen von Propositionen, z.B.
    P(regen(5.7.04_13:15) ∨ *sonnig(5.7.04_13:15)) = ?*

Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie (Kolmogoroff)

Seien *a* und *b* Propositionen aus $\mathcal{PrL}$.

A1 $0 \leq P(a) \leq 1$

A2 $P(\top) = 1$ und $P(\bot) = 0$

A3 $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$

Theorem: $P(\neg a) = 1 - P(a)$

Bew.:
$$P(a \vee \neg a) = P(a) + P(\neg a) - P(a \wedge \neg a)$$
$$P(\top) = P(a) + P(\neg a) - P(\bot)$$
$$1 = P(a) + P(\neg a)$$

The Monty Hall Problem

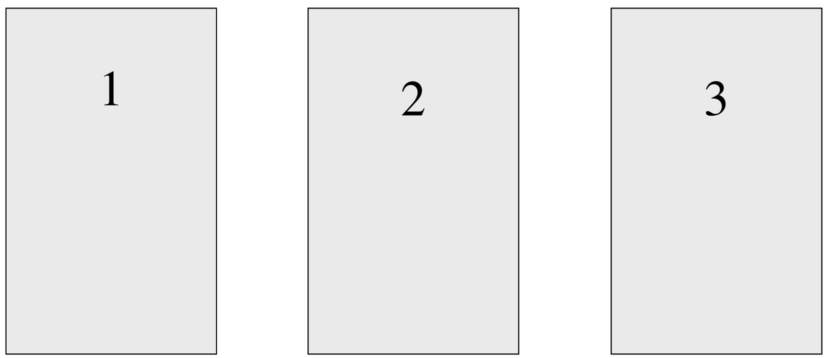
Let's Make a Deal!

Imagine that the set of Monty Hall's game show *Let's Make a Deal* has three closed doors. Behind one of these doors is a car; behind the other two are goats. The contestant does not know where the car is, but Monty Hall does.

The contestant picks a door and Monty opens one of the remaining doors, one he knows *doesn't* hide the car. If the contestant has already chosen the correct door, Monty is equally likely to open either of the two remaining doors.

After Monty has shown a goat behind the door that he opens, the contestant is always given the option to switch doors. **What is the probability of winning the car if she stays with her first choice? What if she decides to switch?**

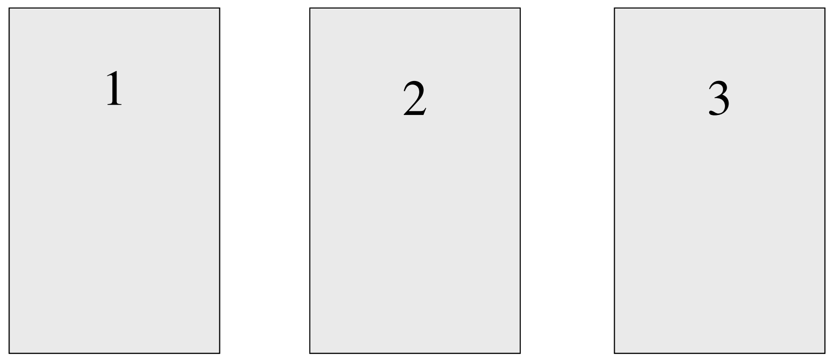
Let's Make a Deal!



Host opens door 1.

You choose door 3.

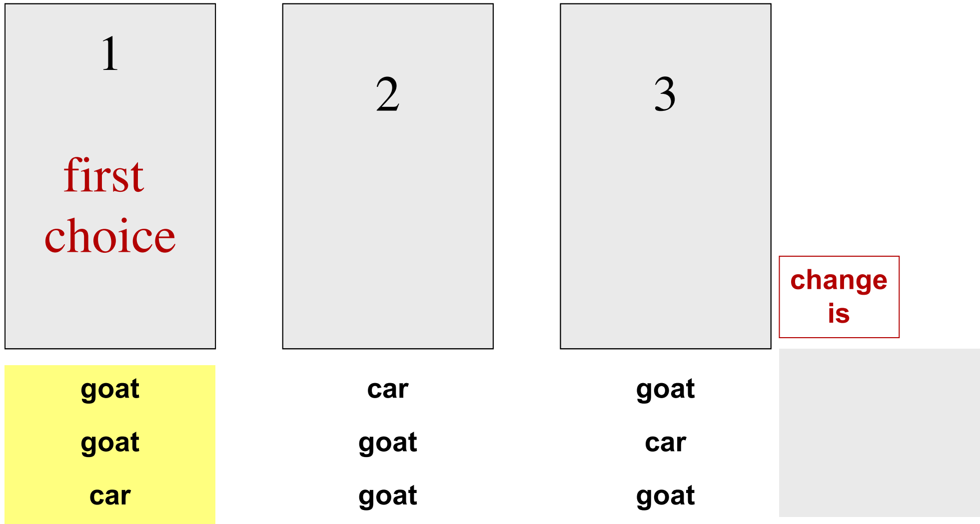
The standard argument



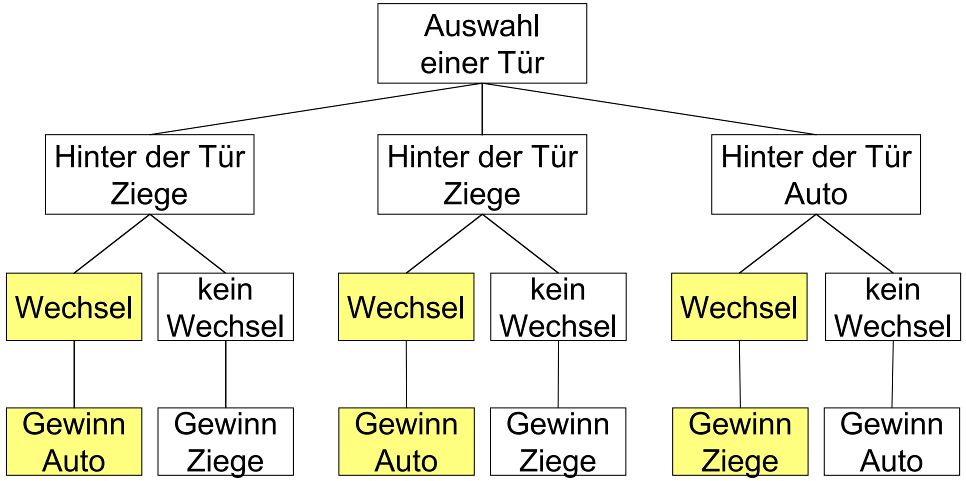
initial	P(car) = 1/3	P(car) = 1/3	P(car) = 1/3
after seeing a goat		P(car) = 1/2	P(car) = 1/2

A correct argument

cf. Krauss, S., & Wang, X. T. (2003)



Das gleiche Argument als Entscheidungsdiagramm



The Psychology of the Monty Hall Problem

- **Most people make wrong predictions / incorrect estimations of the probabilities.**
- **More important: Many people do not belief that they are wrong, even after intensive discussions of their failures.**

- **The psychological question:**
  Why is the Monty Hall Problem so counterintuitive?

- **The consequence for knowledge processing: Are cautious with respect to your–or other people's—intuitions about probabilities.**

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeit (posteriori) $P(a \mid b)$

- die Wahrscheinlichkeit von *a*, falls *b* alles ist, was bekannt ist.
- $P(a \mid b) = P(a \wedge b) \,/\, P(b)$ falls $P(b) \neq 0$
- Alternative Formulierung
  $P(a \wedge b) = P(a \mid b) * P(b) = P(b \mid a) * P(a)$

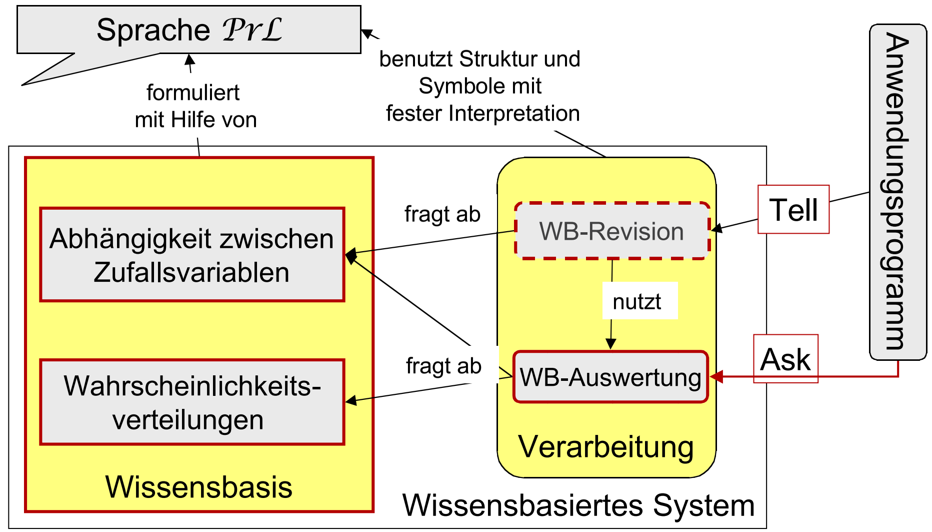
Anmerkung:
Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Konjunktion $a \wedge b$ über bedingte Wahrscheinlichkeiten kann auf „zwei Wegen" durchgeführt werden, via $P(a \mid b)$ und via $P(b \mid a)$.

Monty Hall Problem: *bedingte Wahrscheinlichkeiten*

Angenommen: Es wurde Tür 1 gewählt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Auto zu gewinnen, wenn ein Wechsel vorgenommen wird:

$$P(H_2 \wedge C_3) + P(H_3 \wedge C_2)$$
$$= P(C_3) * P(H_2 \mid C_3) + P(C_2) * P(H_3 \mid C_2)$$
$$= 1/3 * 1 + 1/3 * 1 = 2/3$$

Wissensbasiertes System
Bayes Netze



Bayes-Netze

Ein Bayes-Netz ist ein gerichteter azyklischer Graph (DAG), für den gilt:

- **Die Knoten des Netzes sind eine Menge von Zufallsvariablen. (diskret oder kontinuierlich).**
- **Falls eine gerichtete Kante von *X* nach *Y* führt, so heisst *X* Elternknoten von *Y*. [*parent(Y)*]**
- **Jeder Knoten X_i besitzt für alle Elternknoten eine Verteilung bedingter Wahrscheinlichkeiten**

  $$P(X_i \mid parents(X_i)),$$

  die die Wirkung (den Effekt) der Elternknoten auf X_i quantifizieren.

Ein Beispiel: Pearls Alarmanlage

I'm at work, neighbor John calls to say my alarm is ringing, but neighbor Mary doesn't call. Sometimes it's set off by minor earthquakes. Is there a burglar?

Variables: *Burglar*, *Earthquake*, *Alarm*, *JohnCalls*, *MaryCalls*
Network topology reflects "causal" knowledge:

- A burglar can set the alarm off
- An earthquake can set the alarm off
- The alarm can cause Mary to call
- The alarm can cause John to call

Russell & Norvig - ch.14.1-3, f.5

Ein Beispiel: Pearls Alarmanlage

I'm at work, neighbor John calls to say my alarm is ringing, but neighbor Mary doesn't call. Sometimes it's set off by minor earthquakes. Is there a burglar?

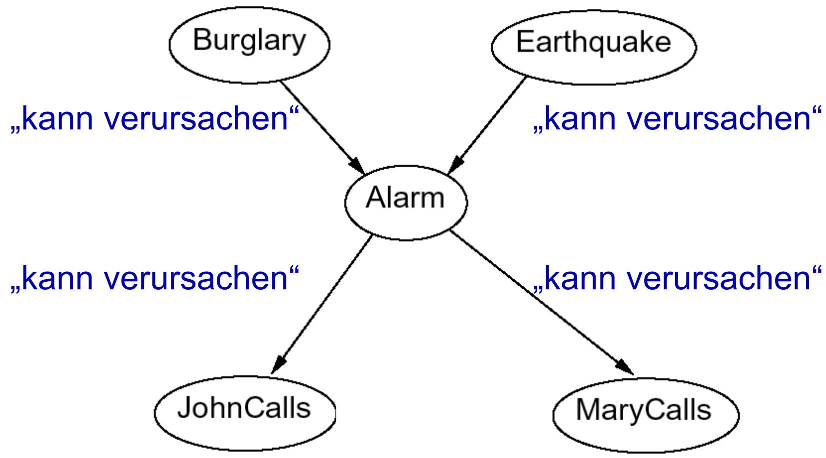
Variables: *Burglar*, *Earthquake*, *Alarm*, *JohnCalls*, *MaryCalls*

Network topology reflects "causal" knowledge:
- A burglar can set the alarm off
- An earthquake can set the alarm off
- The alarm can cause Mary to call
- The alarm can cause John to call

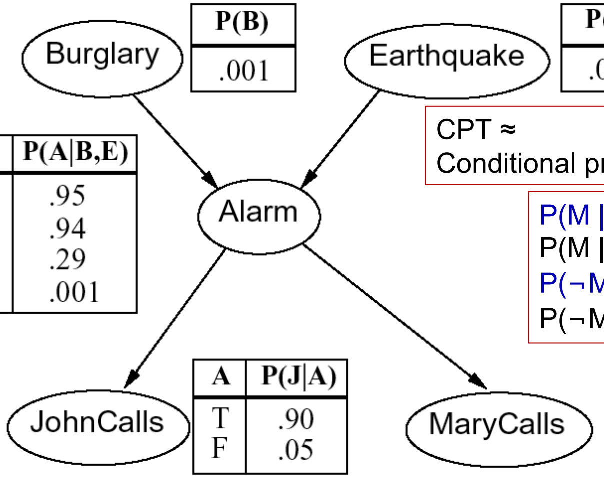
Es kommt vor, dass John irrtümlich Alarm meldet, und dass Mary den Alarm nicht hört.

Die Gründe hierfür werden nicht repräsentiert.

Topologie eines Bayes-Netzes



Bayes-Netz
Verteilungen bedingter Wahrscheinlichkeiten



P(B)
.001

P(E)
.002

B	E	P(A|B,E)
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	P(J|A)
T	.90
F	.05

A	P(M|A)
T	.70
F	.01

CPT ≈
Conditional probability tables

$P(M \mid A) = 0{,}70$
$P(M \mid \neg A) = 0{,}30$
$P(\neg M \mid A) = 0{,}01$
$P(\neg M \mid \neg A) = 0{,}99$

Semantik von Bayes-Netzen

Was repräsentieren Bayes-Netze?

Zwei – äquivalente – Sichtweisen

1. Die – im Hinblick auf die ZVen – komplette gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung (full joint probability distribution)
2. Ein System von Unabhängigkeitsbedingungen

Sichtweise 1 ist relevant für die Konstruktion von Bayes-Netzen.

Repräsentation der kompletten Wahrscheinlichkeitsverteilung

full joint probability distribution

Der Eintrag für X berechnet sich aus den Wahrscheinlichkeiten für die Elternknoten X_i bzgl. aller möglicher Werte aus dem Wertebereich von X_i.

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i \mid parents(X_i))$$

$P(x_1, \ldots, x_n)$ ist Abkürzung für

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

full joint probability distribution – Beispiel

Wahrscheinlichkeit für

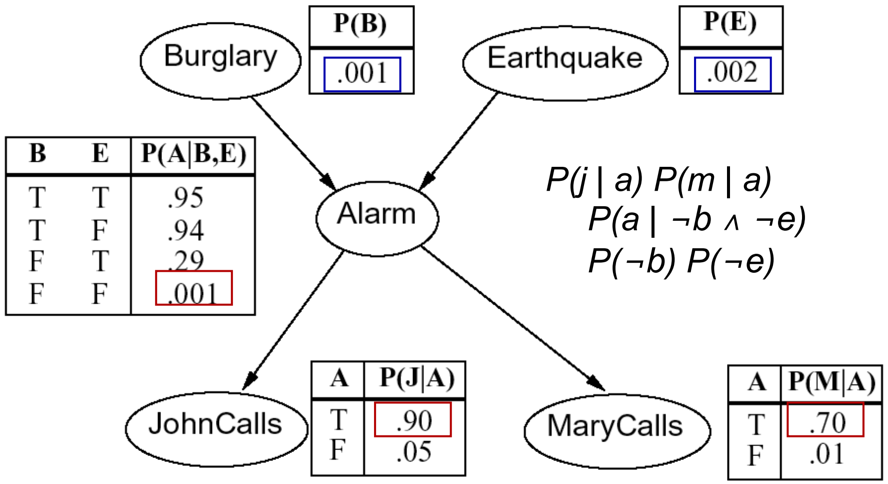
„Die Alarmanlage hat Signal gegeben, aber es hat weder ein Einbruch noch ein Erdbeben stattgefunden, und sowohl John als auch Mary haben angerufen.

$P(j \wedge m \wedge a \wedge \neg b \wedge \neg e)$

$= P(j \mid a)\, P(m \mid a)\, P(a \mid \neg b \wedge \neg e)\, P(\neg b)\, P(\neg e)$

$= 0{,}90 \times 0{,}70 \times 0{,}001 \times 0{,}999 \times 0{,}998 = 0{,}00062$

Berechnung von $P(j \wedge m \wedge a \wedge \neg b \wedge \neg e)$



$P(j \mid a)\, P(m \mid a)$
$P(a \mid \neg b \wedge \neg e)$
$P(\neg b)\, P(\neg e)$

Russell & Norvig - ch.14.1-3, f.6

Konstruktion von Bayes-Netzen

$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i \mid parents(X_i))$

charakterisiert die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses über die Elternknoten.

Dies führt über Umformung zu

$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i \mid x_{i-1} \ldots, x_1)$

zu

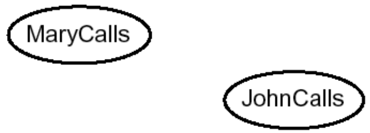
$P(X_i \mid X_{i-1} \ldots, X_1) = P(X_i \mid parents(X_i))$

falls $parents(X_i) \subseteq \{X_{i-1} \ldots, X_1\}$

Dies induziert Abhängigkeitsbedingungen zwischen den Knoten des Bayes-Netzes.

Konstruktion eines Netzes – Beispiel

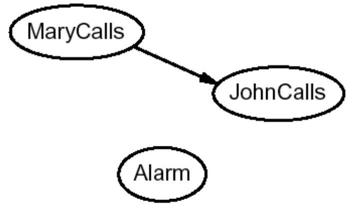
Suppose we choose the ordering M, J, A, B, E



$P(J|M) = P(J)$?

Konstruktion eines Netzes – Beispiel

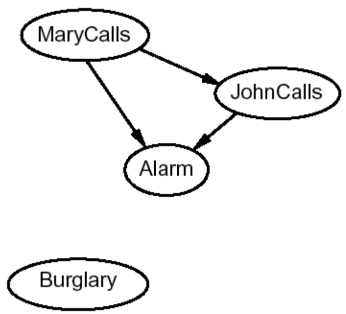
Suppose we choose the ordering M, J, A, B, E



$P(J|M) = P(J)$? No
$P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$?

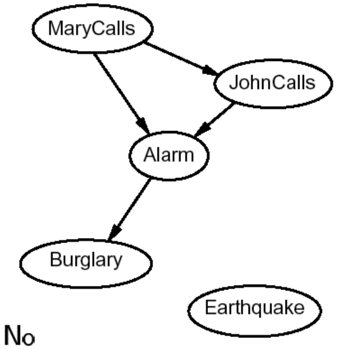
Konstruktion eines Netzes – Beispiel

Suppose we choose the ordering M, J, A, B, E



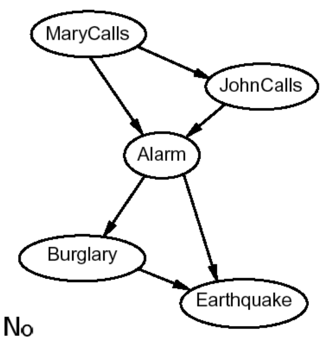
$P(J|M) = P(J)$? No
$P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? No
$P(B|A,J,M) = P(B|A)$?
$P(B|A,J,M) = P(B)$?

Konstruktion eines Netzes – Beispiel



$P(J|M) = P(J)$? No
$P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? No
$P(B|A,J,M) = P(B|A)$? Yes
$P(B|A,J,M) = P(B)$? No
$P(E|B,A,J,M) = P(E|A)$?
$P(E|B,A,J,M) = P(E|A,B)$?

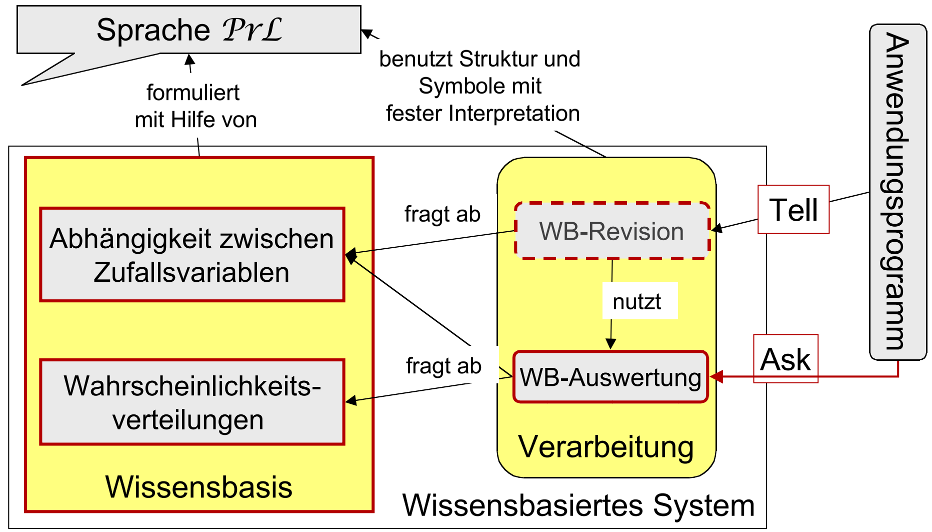
Konstruktion eines Netzes – Beispiel



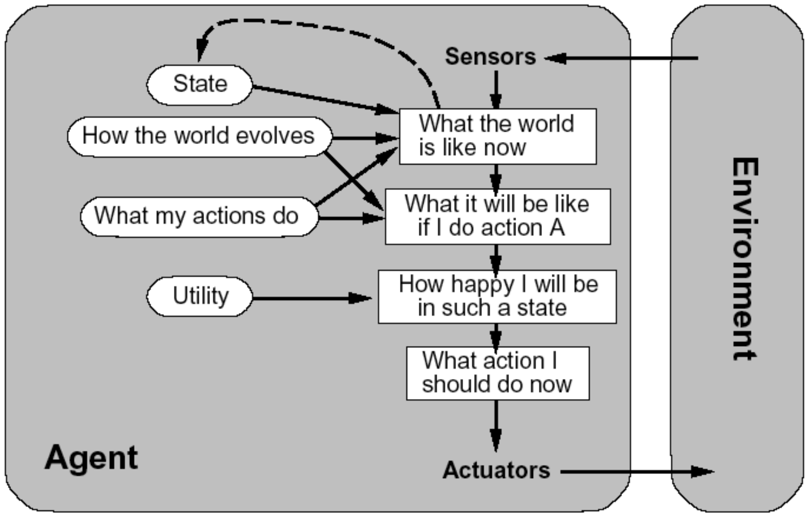
$P(J|M) = P(J)$? No
$P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? No
$P(B|A,J,M) = P(B|A)$? Yes
$P(B|A,J,M) = P(B)$? No
$P(E|B,A,J,M) = P(E|A)$? No
$P(E|B,A,J,M) = P(E|A,B)$? Yes

Russell & Norvig - ch.14.1-3, f.17

Wissensbasiertes System
Bayes Netze



Utility-based agent:
Erwarteter Nutzen vs. Nutzen des Erwarteten Resultats



Russell & Norvig - ch.2, f.22

Reiseplanung

Gruppen-
diskussion

Sie planen (wieder einmal) mit dem Auto, dem Fahrrad oder dem öffentlichen Nahverkehr von A nach B zugelangen.

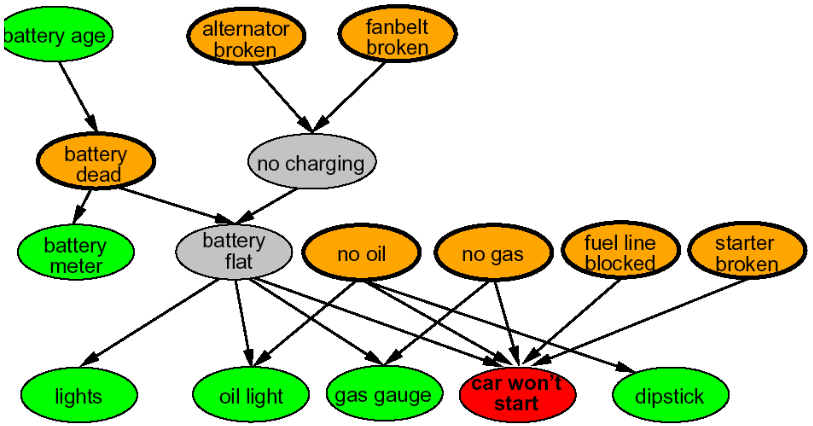
(Zuerst ist eine Entscheidung über die Details der Aufgabenstellung zu treffen.)

Wie können in einem Bayes-Netz die folgenden Einflüsse berücksichtigt werden:

- **Termin (Tageszeit, Wochentag, etc.)**
- **Wetter**
- **Park- und Umsteigemöglichkeiten etc.**

Ein weiteres Beispiel: Auto Diagnose

Initial evidence: car won't start
Testable variables (green), "broken, so fix it" variables (orange)
Hidden variables (gray) ensure sparse structure, reduce parameters



Russell & Norvig - ch.14.1-3, f.19

Stand der Dinge

Vorlesung 24:
- **Wahrscheinlichkeitskonzeptionen**
- **Bayes-Netze als kompakte Darstellungen**

Vorlesung 25 ff:
- **Situationskalkül & Erweiterungen**