# Wissensrepräsentation

–

**Christopher Habel, Özgür Özçep**

**Sommersemester 2005**

## Sitzung 12: Constraintverarbeitung (2)

- Relationensysteme und Verarbeitung
  - Binäre Relationen
  - Kalküle für räumliches & zeitliches Wissen
- Aufbau von Relationensystemen für Constraintverarbeitung
  - Gut verarbeitbare Sprachfragmente

## Beispiel: "Allen-Relationen"

**Dreizehn einander wechselseitig ausschließende Relationen zwischen Intervallen auf der Linie**

| | |
|---|---|
| before($t_1$, $t_2$): | $t_1$ ist vor $t_2$ und es ist noch was dazwischen. |
| equal($t_1$, $t_2$): | $t_1$ und $t_2$ sind dieselbe Periode |
| meets($t_1$, $t_2$): | $t_1$ ist vor $t_2$ und es gibt keine Periode zwischen $t_1$ und $t_2$, d.h. $t_1$ endet, wenn $t_2$ beginnt |
| overlaps($t_1$, $t_2$): | $t_1$ beginnt vor $t_2$ und endet nach dem Anfang von $t_2$ |
| during($t_1$, $t_2$): | $t_1$ ist vollständig in $t_2$ enthalten |
| starts($t_1$, $t_2$) : | $t_1$ hat denselben Anfang wie $t_2$, endet aber vor dem Ende von $t_2$ |
| finishes($t_1$, $t_2$): | $t_1$ hat dasselbe Ende wie $t_2$, beginnt aber nach dem Anfang von $t_2$ |

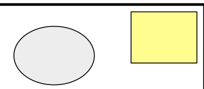
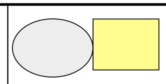
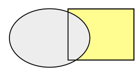
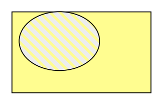
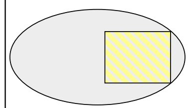
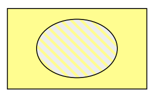
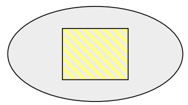


## Intervallrelationen (auf der Linie)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X before Y | < | Y after X | > | XXX YYY |
| X equal Y | = | Y equal X | = | XXX<br>YYY |
| X meets Y | m | Y met-by X | mi | XXXYYY |
| X overlaps Y | o | Y overlaped-by X | oi | XXXX<br>YYYY |
| X during Y | d | Y contains X | di | XXX<br>YYYYYYY |
| X starts Y | s | Y started-by X | si | XXX<br>YYYYYY |
| X finishes Y | f | Y finished-by X | fi | XXX<br>YYYYYY |



## Beispiel: "RCC-8"

| | | | |
|---|---|---|---|
| DC(X, Y)<br>DisConnected |  | EC(X, Y)<br>Externally Connected |  |
| PO(X, Y)<br>Partially Overlapping |  | EQ(X, Y)<br>EQual |  |
| TPP(X, Y)<br>Tangential Proper Part |  | TPPI(X, Y)<br>Tangential Proper Part Inverse |  |
| NTPP(X, Y)<br>Non-Tangential Proper Part |  | NTPPI(X, Y)<br>Non-Tangential Proper Part Inverse |  |

## Restriktionen durch Komposition

### Informationskombinatorik aus Relationskomposition

- entsprechen Formeln der Form:
  $\forall\, t_1, t_2, t_3\ [t_1\ R_1\ t_2 \wedge t_2\ R_2\ t_3 \Rightarrow t_1\ R_3\ t_3]$
- Beispiel:
  $\forall\, t_1, t_2, t_3\ [\text{meets}(t_1, t_3) \wedge \text{meets}(t_3, t_2) \Rightarrow \text{before}(t_1, t_2)]$
  $\forall\, t_1, t_2, t_3\ [\text{before}(t_1, t_3) \wedge \text{before}(t_3, t_2) \Rightarrow \text{before}(t_1, t_2)]$
- Restriktionen sollten den 'intendierten' Bedeutungen entsprechen
- Theoreme ergeben sich aus formaler Spezifikation



## Endliche Mengen von Basisrelationen

### Die Relationen sind

- paarweise exklusiv
  - kein Paar von Intervallen kann in zwei der Relationen stehen
- Exhaustiv
  - jedes Paar steht in mindestens einer Relation

### Ergibt sich aus

- Intuition und Anschauung (zur Motivation)
- Formalisierung (Axiome, Definitionen)
  - Beweis der (intuitiv gewünschten) Eigenschaften



## Definition von binären Relationen mit den Basisrelationen (2)

### Relationensysteme

- Sei $\mathcal{B}$ die Menge der Basisrelationen, dann kann jede binäre Relation R über dem Grundbereich dargestellt werden,
  - als Disjunktion von Basisrelationen $R = Bi \cup \ldots \cup Bj$
  - alternativ, als $R = \{ Bi, \ldots , Bj \}$
- Jede Disjunktion von Basisrelationen stellt eine andere Relation dar.
  - Intervallrelationen: Insgesamt $2^{13} - 1 = 8191$ konsistente Relationen
- ➢ Disjunktionen von Basisrelationen als **Normalformdarstellung** von Relationen
- **Boolesche Algebra** der Relationen: Konjunktion, Disjunktion, Komplement



## Kompositionstabellen

- Die Kompositionstabelle kann als ein System von Abhängigkeiten von Beschränkungen (Constraints) aufgefasst werden.

### Mögliche Fälle

- eine passende Relation:
  $\text{meets}(t, t'') \wedge \text{meets}(t'', t') \rightarrow \text{before}(t, t')$
- mehrere mögliche Relationen:
  $\text{contains}(t, t'') \wedge \text{meets}(t'', t')$
  $\rightarrow (\text{contains}(t, t') \vee \text{finished\_by}(t, t') \vee \text{overlaps}(t, t'))$
- keine 'neue' Information:
  $\text{before}(t, t'') \wedge \text{after}(t'', t')$

## Kompositionstabelle – Kompositionsaxiome

### Kompositionstabelle der Basisrelationen für Perioden

| | < | > | d | di | o | oi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| < | < | $\mathcal{B}$ | < o m d s | < | < | < o m d s |
| > | $\mathcal{B}$ | > | > oi mi d f | > | > oi mi d f | > |
| d | < | > | d | $\mathcal{B}$ | < o m d s | > oi mi d f |
| di | < o m di fi | > oi di mi si | o oi d di = | di | oi di fi | oi di si |

➔ Allen (1983)

Zu je zwei Basisrelationen ist die Menge der kompatiblen Basisrelationen eingetragen.

Die Tabelle kann als alternatives Axiomensystem [AK] interpretiert werden. Z.B.:

[A<d] ∀ t t' t'' [t < t'' ∧ t'' d t' → (t < t' ∨ t o t' ∨ t m t' ∨ t d t' ∨ t s t')]



| | < | > | d | di | o | oi | m | mi | s | si | f | fi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| < | < | $\mathcal{B}$ | < o m d s | < | < | < o m d s | < | < o m d s | < | < | < o m d s | < |
| > | $\mathcal{B}$ | > | > oi mi d f | > | > oi mi d f | > | > oi mi d f | > | < o m d s | > | > | > |
| d | < | > | d | $\mathcal{B}$ | < o m d s | > oi mi d f | < | > | d | > oi mi d f | d | < o m d s |
| di | < o m di fi | > oi di mi si | o oi d di = | di | oi di fi | oi di si | o di fi | oi di si | o di fi | di | oi di si | di |
| o | < | > oi di mi si | o d s | < o m di fi | < o m | o oi d di = | < | oi di si | o | o di fi | o d s | < o m |
| oi | < o m di fi | > | oi d f | > oi mi di si | o oi d di = | > oi mi | o di fi | > | oi d f | > oi mi | oi | oi di si |
| m | < | > oi di mi si | o d s | < | < | o d s | < | f fi = | m | m | o d s | < |
| mi | < o m di fi | > | oi d f | > | oi d f | > oi | s si = | > | oi d f | > | mi | < mi |
| s | < | > | d | < o m di fi | < o m | d f | < | mi | s | s si = | d | m o |
| si | < o m di fi | > | oi d f | di | o di fi | oi | o di fi | mi | s si = | si | oi | di |
| f | < | > | d | > oi di mi si | o d s | > oi mi | m | > | d | > oi mi | f | f fi = |
| fi | < | > oi di mi si | o d s | di | o | o di si | m | o di si | o | di | f fi = | fi |

## Schließen mit Kompositionstabellen: Constraint-Verfahren

### Berechnungssystem für Schließen über Relationen

- Objekte werden als Knoten in einem gerichteten Graphen repräsentiert.
- Die gerichteten Kanten sind mit Mengen von Relationssymbolen etikettiert:
  - Information über die Relation zwischen den verbundenen Knoten (gegebenenfalls disjunktive Information)
- Die Verarbeitung besteht in der Prüfung der Kompatibilität der Relationen an den **Kanten**, die jeweils **drei Knoten** verbinden.
- Die (3-stelligen) Constraints gelten einheitlich und sind in einer gesonderten Kompositionstabelle gespeichert.

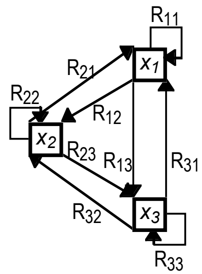


## Networks of Constraints (CN)

Relations between entities

Conjunctive normal form

$R_{11}(x_1, x_1) \wedge R_{12}(x_1, x_2) \wedge R_{21}(x_2, x_1) \wedge$
$R_{22}(x_2, x_2) \wedge R_{13}(x_1, x_3) \wedge R_{31}(x_3, x_1) \wedge$
$R_{23}(x_2, x_3) \wedge R_{32}(x_3, x_2) \wedge R_{33}(x_3, x_3) \wedge \ldots$



## Durch Verarbeitung zu beantworten

### Erfüllbarkeit (SAT)

- Gibt es ein Modell?

### Minimale Menge von Relationen

- Welche Basisrelationen können (in irgendeinem Modell) zwischen einem Knotenpaar bestehen?
- Welches ist die stärkste folgerbare Relation zwischen zwei Knoten?

### Verarbeitungsmethoden

- Modellsuche durch Relationsspezifikation und Backtracking (hoher Aufwand)
- Constraint-Propagation (unvollständig)
- Kombination von Backtracking und Constraint-Propagation



## Composition Table (CT*)

**Constraint Propagation (CP) uses CT***

- Addition to CN
  - $CN'(x, z) := CN(x, z) \cap CT^*(CN(x, y), CN(y, z))$
- Performs the deductive step
  - $CN(x, y), CN(y, z) \vdash_{CP+CT} CT^*(CN(x, y), CN(y, z))(x, z)$
- CT*: Specifies composition rules for relations

  $R_k := CT^*(R_i, R_j)$

  $\forall x\, y\, z\, [R_i(x, y) \wedge R_j(y, z) \rightarrow R_k(x, z)]$

  $\forall x\, z\, [\exists y\, [R_i(x, y) \wedge R_j(y, z)] \rightarrow R_k(x, z)]$
- Composition for disjunctions (CT*)

  from composition of base relations (CT)

  $CT^*(R_1, R_2) = \cup \{CT(r_1, r_2) \mid r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\}$

  $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (C \vee D))$



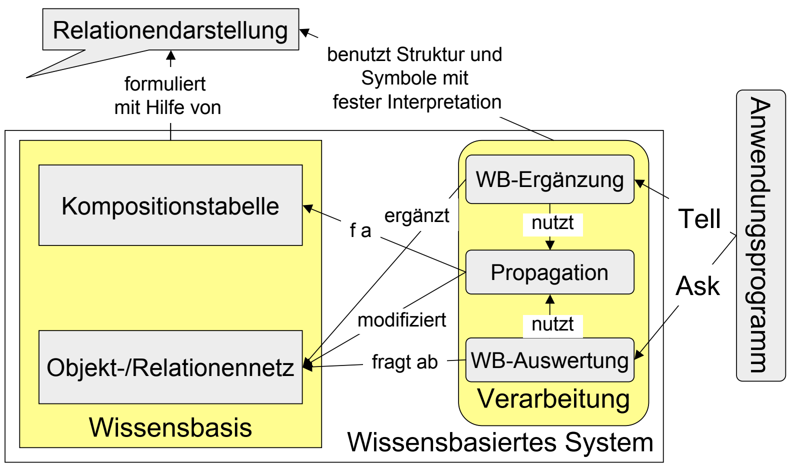
## Path consistency algorithm

**function PC(*rcsp*)** returns an equivalent, path consistent relational CSP
  *queue* ← arcs-of(*rcsp*)
  **loop while** *queue* is not empty **do**
    $(X_i, X_j)$ ← Remove-Front(*queue*)
    **loop for each** $X_k$ in nodes(*rcsp*) **do**
      *removed* ← false
      **loop for each** R in Relations(*rcsp*, $X_k$, $X_j$) **do**
        **if** R is not in CT*(Relations(*rcsp*, $X_k$, $X_i$), Relations(*rcsp*, $X_i$, $X_j$))
        **then** delete R from Relations(*rcsp*, $X_k$, $X_j$); *removed* ← true
      **if** *removed* **then** add $(X_k, X_j)$ to *queue; removed* ← false
      **loop for each** R in Relations(*rcsp*, $X_i$, $X_k$) **do**
        **if** R is not in CT*(Relations(*rcsp*, $X_i$, $X_j$), Relations(*rcsp*, $X_j$, $X_k$))
        **then** delete R from Relations(*rcsp*, $X_i$, $X_k$); *removed* ← true
      **if** *removed* **then** add $(X_i, X_k)$ to *queue; removed* ← false

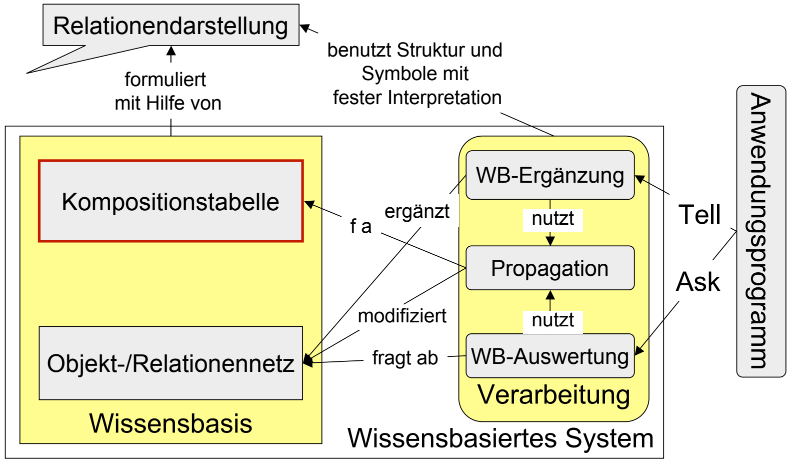
- Auch Pfadkonsistenz garantiert nicht Konsistenz



## Wissensbasiertes System mit Relationen und Kompositionstabellen



## Wissensbasiertes System mit Relationen und Kompositionstabellen






## Kompositionstabelle – Kompositionsaxiome

### Kompositionstabelle der Basisrelationen für Perioden

| | < | > | d | di | o | oi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| < | < | $\mathcal{B}$ | < o m d s | < | < | < o m d s |
| > | $\mathcal{B}$ | > | > oi mi d f | > | > oi mi d f | > |
| d | < | > | d | $\mathcal{B}$ | < o m d s | > oi mi d f |
| di | < o m di fi | > oi di mi si | o oi d di = | di | oi di fi | oi di si |

➔ Allen (1983)

Zu je zwei Basisrelationen ist die Menge der kompatiblen Basisrelationen eingetragen.

Die Tabelle kann als alternatives Axiomensystem [AK] interpretiert werden. Z.B.:

[A<d] $\forall$ t t' t" [t < t" $\wedge$ t" d t' $\rightarrow$ (t < t' $\vee$ t o t' $\vee$ t m t' $\vee$ t d t' $\vee$ t s t')]



| | < | > | d | di | o | oi | m | mi | s | si | f | fi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| < | < | $\mathcal{B}$ | < o m d s | < | < | < o m d s | < | < o m d s | < | < | < o m d s | < |
| > | $\mathcal{B}$ | > | > oi mi d f | > | > oi mi d f | > | > oi mi d f | > | < o m d s | > | > | > |
| d | < | > | d | $\mathcal{B}$ | < o m d s | > oi mi d f | < | > | d | > oi mi d f | d | < o m d s |
| di | < o m di fi | > oi di mi si | o oi d di = | di | oi di fi | oi di si | o di fi | oi di si | o di fi | di | oi di si | di |
| o | < | > oi di mi si | o d s | < o m di fi | < o m | o oi d di = | < | oi di si | o | o di fi | o d s | < o m |
| oi | < o m di fi | > | oi d f | > oi mi di si | o oi d di = | > oi mi | o di fi | > | oi d f | > oi mi | oi | oi di si |
| m | < | > oi di mi si | o d s | < | < | o d s | < | f fi = | m | m | o d s | < |
| mi | < o m di fi | > | oi d f | > | oi d f | > oi | s si = | > | oi d f | > | mi | < mi |
| s | < | > | d | < o m di fi | < o m | d f | < | mi | s | s si = | d | m o |
| si | < o m di fi | > | oi d f | di | o di fi | oi | o di fi | mi | s si = | si | oi | di |
| f | < | > | d | > oi di mi si | o d s | > oi mi | m | > | d | > oi mi | f | f fi = |
| fi | < | > oi di mi si | o d s | di | o | o di si | m | o di si | o | di | f fi = | fi |

## Relationenalgebren

- der Mathematische (algebraische) Ansatz

**Hintergrund (Motivation von Tarski)**

- Boolesche Algebren bilden angemessene Modelle für Aussagenlogik und monadische Prädikatenlogik
- Was für Algebren leisten entsprechendes für Logik mit zweistelligen Relationen?
- Vorarbeiten: DeMorgan, Peirce, Schröder

**Ziel**

- endliches System von Operatoren auf binären Relationen
- Axiomatisierung ihrer Interaktion

## (Konkrete) Algebren binärer Relationen

### Definition

- Die **komplette Algebra der (bin.) Relationen** über einer Grundmenge U ist die Struktur $\mathcal{Rel}(U) = \langle 2^V, \cup, \cap, -, \emptyset, V, \circ, \breve{}, Id\rangle$, wobei
  - $V = U \times U$,
  - – die Komplementbildung,
  - $\circ$ die Relationskomposition und
  - $\breve{}$ die Konversenbildung,
  - Id die Identitätsrelation über U ist.
- Jede Teilmenge von V, die abgeschlossen bzgl. der Operatoren $\cup, \cap, -, \circ$ und $\breve{}$ ist und die Konstanten $\emptyset$, V, und Id enthält, ist eine **Algebra binärer Relationen**.



## Relationenalgebra

### Definition

- Eine **abstrakte Relationenalgebra** ist eine Struktur $\langle A, +, \bullet, -, 0, 1, \circ, \breve{}, 1'\rangle$ des Typs $\langle 2, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 0\rangle$, wobei
  - $\langle A, +, \bullet, -, 0, 1\rangle$ eine Boolesche Algebra ist und
  - $\langle A, \circ, 1'\rangle$ ein Monoid (Halbgruppe mit neutr. El.)
  - $a^{\breve{}\breve{}} = a$ und $(a \circ b)^{\breve{}} = b^{\breve{}} \circ a^{\breve{}}$, für alle $a, b \in A$, und
  - $(a \circ b) \bullet c = 0 \leftrightarrow (a^{\breve{}} \circ c) \bullet b = 0$
  - $(a \circ b) \bullet c = 0 \leftrightarrow (c \circ b^{\breve{}}) \bullet a = 0$
- ➢ Jede konkrete Algebra von Relationen ist eine abstrakte Relationenalgebra.
- ➢ Es gibt abstrakte Relationenalgebren, die nicht zu konkreten Algebren von Relationen isomorph sind.



## Atomare Relationenalgebren

### Es sei

$\mathcal{R} = \langle A, +, \bullet, -, 0, 1, \circ, \breve{}, 1'\rangle$ eine Relationenalgebra, wobei die Boolesche Algebra $\langle A, +, \bullet, -, 0, 1\rangle$ atomar ist.

- ➢ Dann sind die Operationen $\circ$, $\breve{}$ eindeutig durch ihr Verhalten auf den Atomen bestimmt.
- ➢ Bei endlichen Mengen von Atomen lassen sich die Operatoren $\circ$, $\breve{}$ durch geeignete Tabellen darstellen.

- **Unterschied zu Kompositionstabellen der KI**
  - $R_k = (R_i \circ R_j)$ entspricht
  - $\forall x\, z\, [\exists y\, [R_i(x, y) \wedge R_j(y, z)] \leftrightarrow R_k(x, z)]$
  - nicht für alle interessanten Relationensysteme gibt es **endliche** atomare Relationenalgebren



## Aufbau von Relationensystemen und Kompositionstabellen

### Direkter Ansatz

- aus der Anschauung motiviert
- Aufzählung von Basisrelationen (mit Angabe von intendierten Interpretationen)
- Manuelle Bestimmung der Kompositionstabelle

### Axiomatischer Ansatz

- Spezifikation von primitiven Relationen (Axiome)
  - ‚Taxonomie' (‚Subsumption', Exklusivität)
  - Reflexivität, Symmetrie
  - Kompositionsaxiome für primitive Relationen
- Definition von Basisrelationen
- Kompositionstabelle als Sammlung von Theoremen