Wissensrepräsentation
–
Christopher Habel, Özgür Özçep
Sommersemester 2005

Sitzung 25: Bayes-Netze

- „Sprachen der Wahrscheinlichkeitstheorie“
- Wahrscheinlichkeitstheorie – Basiskonzepte
- Bayes-Netze
  - Struktur
  - Diagnose & Planung

Zufallsvariablen

Zufallsvariablen

- stehen für Sachverhalte in der Welt, deren Status (trifft zu / trifft nicht zu) uns nicht unbedingt bekannt ist
- besitzen einen Wertebereich (domain), dessen Werte mit
  - boolesch: *{true, false}*
  - diskret: z.B. *{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {kopf, zahl}*
  - kontinuierlich: z.B. $\mathbb{R}$
- Konvention
  - Bezeichnungen für Zufallsvariablen beginnen mit Grossbuchstaben
  - Bezeichnungen für Werte beginnen mit Kleinbuchstaben (oder sind anderweitig als Werte erkennbar, z.B. *2, 3,)*

Propositionen in $\mathcal{PrL}$

$\mathcal{PrL}$ ≈ „Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie“

- atomare Propositionen
  - bzgl. booleschen ZVen, z.B. *Regnet_am_5.7.05_13:15*
  - bzgl. diskreten oder kontinuierlichen ZVen Gleichungen der Art: *Weather = sunny*
- komplexe Propositionen
  - boolesche Kombinationen von Propositionen, z.B.
    ¬ *Regnet_am_5.7.05_13:15*
    Weather = sunny ∨ *Weather = cloudy*

Die Sätze aus $\mathcal{AL}$ bzw. $\mathcal{PL}_1$ können als Propositionen einer „Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie“ verwendet werden.

a priori Wahrscheinlichkeiten

a priori Wahrscheinlichkeiten

- aus dem reellen Intervall [0, 1]
- subjektive a priori Wahrscheinlichekeiten korrespondieren zum Glauben / zur Überzeugung
  - etwa

    P(regen(5.7.05_13:15)) = 0,4
- komplexe Propositionen
  - boolesche Kombinationen von Propositionen, z.B.

    P(regen(5.7.05_13:15) ∨ *sonnig(5.7.05_13:15)) = ?*

Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie (Kolmogoroff)

Seien *a* und *b* Propositionen aus $\mathcal{PrL}$.

A1 $0 \leq P(a) \leq 1$

A2 $P(\top) = 1$ und $P(\bot) = 0$

A3 $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$

Theorem: $P(\neg a) = 1 - P(a)$

Bew.:

$$P(a \vee \neg a) = P(a) + P(\neg a) - P(a \wedge \neg a)$$
$$P(\top) = P(a) + P(\neg a) - P(\bot)$$
$$1 = P(a) + P(\neg a)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeit (posteriori) *P(a | b)*

- die Wahrscheinlichkeit von *a*, falls *b* alles ist, was bekannt ist.
- $P(a \mid b) = P(a \wedge b) \,/\, P(b)$ falls $P(b) \neq 0$
- Alternative Formulierung
  $P(a \wedge b) = P(a \mid b) * P(b) = P(b \mid a) * P(a)$

Anmerkung:
Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Konjunktion $a \wedge b$ über bedingte Wahrscheinlichkeiten kann auf „zwei Wegen“ durchgeführt werden, via $P(a \mid b)$ und via $P(b \mid a)$.

Monty Hall Problem: *bedingte Wahrscheinlichkeiten*

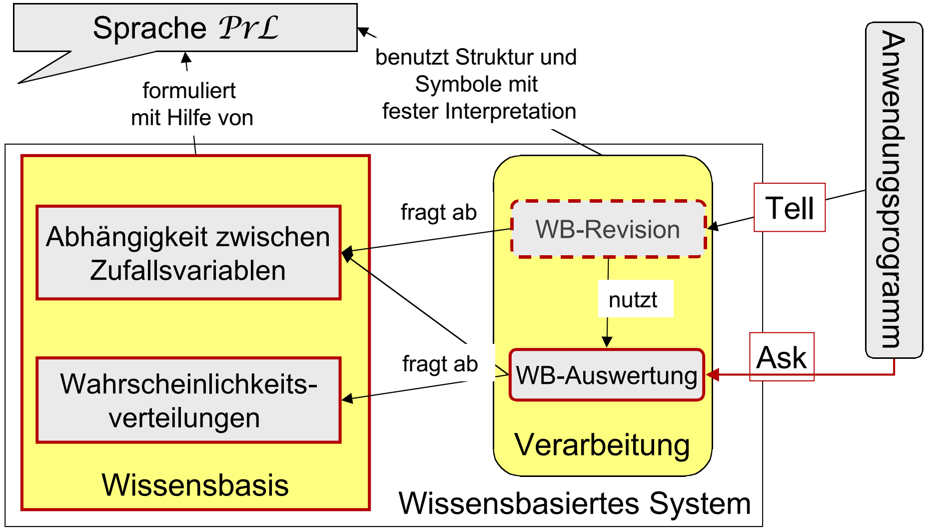
Angenommen: Es wurde Tür 1 gewählt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Auto zu gewinnen, wenn ein Wechsel vorgenommen wird:

$$P(H_2 \wedge C_3) + P(H_3 \wedge C_2)$$
$$= P(C_3) * P(H_2 \mid C_3) + P(C_2) * P(H_3 \mid C_2)$$
$$= 1/3 * 1 + 1/3 * 1 = 2/3$$

Zwei Wechsel-Ereignisse sind betrachten:

1. Hall öffnet Tür_2 (H_2) und das Auto befindet sich hinter Tür_3 (C_3)
2. Hall öffnet Tür_3 (H_3) und das Auto befindet sich hinter Tür_2 (C_2)

Wissensbasiertes System Bayes Netze



Bayes-Netze

Ein **Bayes-Netz** ist ein gerichteter azyklischer Graph (DAG), für den gilt:

- Die Knoten des Netzes sind eine Menge von **Zufallsvariablen**. (diskret oder kontinuierlich).
- Falls eine gerichtete Kante von ***X*** nach ***Y*** führt, so heisst ***X*** **Elternknoten** von **Y**. [*parent(Y)*]
- Jeder Knoten X_i besitzt für alle Elternknoten eine **Verteilung bedingter Wahrscheinlichkeiten**

  $P(X_i \mid parents(X_i))$,
- die die Wirkung (den Effekt) der Elternknoten auf X_i quantifizieren.

Ein Beispiel: Pearls Alarmanlage

I'm at work, neighbor John calls to say my alarm is ringing, but neighbor Mary doesn't call. Sometimes it's set off by minor earthquakes. Is there a burglar?

Variables: *Burglar*, *Earthquake*, *Alarm*, *JohnCalls*, *MaryCalls*
Network topology reflects "causal" knowledge:

- A burglar can set the alarm off
- An earthquake can set the alarm off
- The alarm can cause Mary to call
- The alarm can cause John to call

Ein Beispiel: Pearls Alarmanlage

I'm at work, neighbor John calls to say my alarm is ringing, but neighbor Mary doesn't call. Sometimes it's set off by minor earthquakes. Is there a burglar?

Variables: *Burglar*, *Earthquake*, *Alarm*, *JohnCalls*, *MaryCalls*

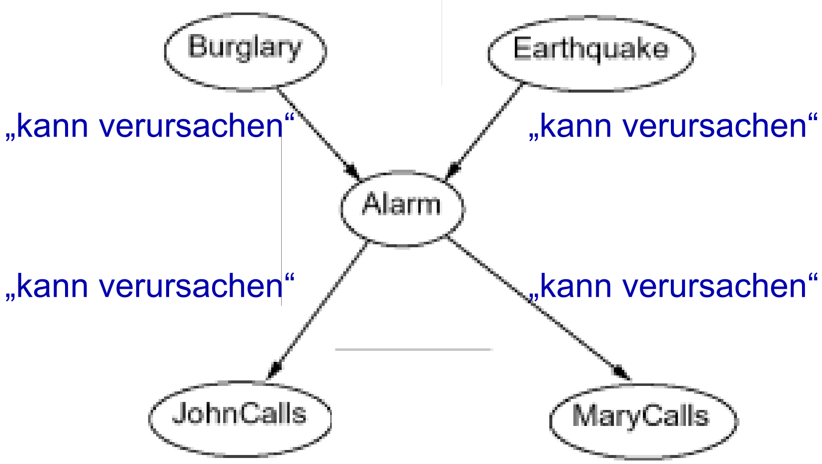
Network topology reflects "causal" knowledge:

- A burglar can set the alarm off
- An earthquake can set the alarm off
- The alarm can cause Mary to call
- The alarm can cause John to call

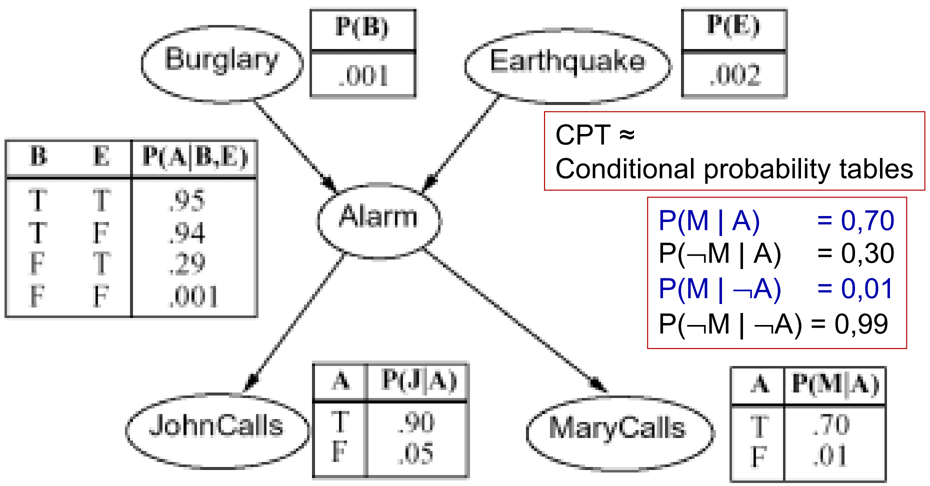
Es kommt vor, dass John irrtümlich Alarm meldet, und dass Mary den Alarm nicht hört.

Die Gründe hierfür werden nicht repräsentiert.

Topologie eines Bayes-Netzes



Bayes-Netz
Verteilungen bedingter Wahrscheinlichkeiten



Russell & Norvig - ch.14.1-3, f.6

Semantik von Bayes-Netzen

Was repräsentieren Bayes-Netze?

Zwei – äquivalente – Sichtweisen

1. Die – im Hinblick auf die ZVen – komplette gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung (full joint probability distribution)
2. Ein System von Unabhängigkeitsbedingungen

Sichtweise 1 ist relevant für die Konstruktion von Bayes-Netzen.

Repräsentation der kompletten Wahrscheinlichkeitsverteilung

full joint probability distribution

Der Eintrag für *X* berechnen sich aus den Wahrscheinlichkeiten für die Elternknoten X_i bzgl. aller möglicher Werte aus dem Wertebereich von X_i .

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i \mid parents(X_i))$$

$P(x_1, \ldots, x_n)$ ist Abkürzung für

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

full joint probability distribution – Beispiel

Wahrscheinlichkeit für

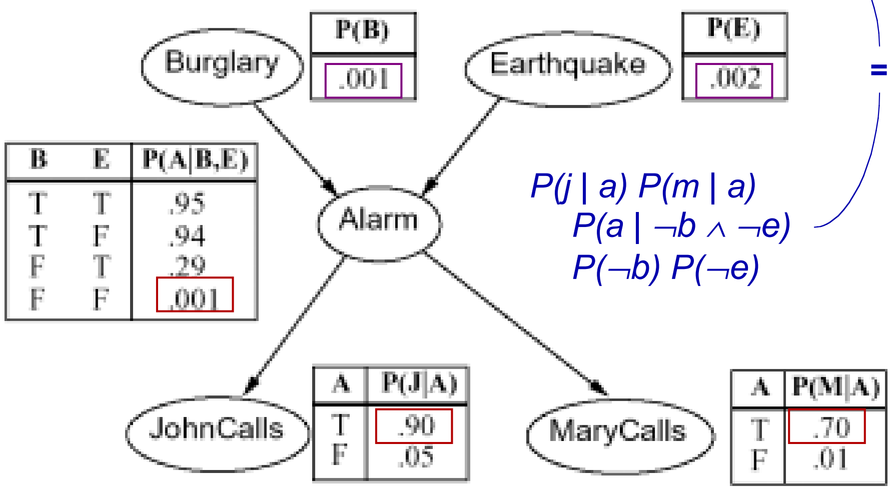
„Die Alarmanlage hat Signal gegeben, aber es hat weder ein Einbruch noch ein Erdbeben stattgefunden, und sowohl John als auch Mary haben angerufen.

$P(j \wedge m \wedge a \wedge \neg b \wedge \neg e)$

$= P(j \mid a)\, P(m \mid a)\, P(a \mid \neg b \wedge \neg e)\, P(\neg b)\, P(\neg e)$

$= 0{,}90 \times 0{,}70 \times 0{,}001 \times 0{,}999 \times 0{,}998 = 0{,}00062$

Berechnung von $P(j \land m \land a \land \neg b \land \neg e)$



P(B)
.001

P(E)
.002

B	E	P(A|B,E)
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	P(J|A)
T	.90
F	.05

A	P(M|A)
T	.70
F	.01

=

$P(j \mid a)\, P(m \mid a)$
$P(a \mid \neg b \land \neg e)$
$P(\neg b)\, P(\neg e)$

Russell & Norvig - ch.14.1-3, f.6

Konstruktion von Bayes-Netzen

$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i \mid parents(X_i))$
charakterisiert die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses über die Elternknoten.

Dies führt über Umformung zu
$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i \mid x_{i-1} \ldots, x_1)$
zu
$P(X_i \mid X_{i-1} \ldots, X_1) = P(X_i \mid parents(X_i))$
falls $parents(X_i) \subseteq \{X_{i-1} \ldots, X_1\}$

Dies induziert Abhängigkeitsbedingungen zwischen den Knoten des Bayes-Netzes.

Konstruktion von Bayes-Netzen (2)

Need a method such that a series of locally testable assertions of conditional independence guarantees the required global semantics

1. Choose an ordering of variables $X_1, \ldots, X_n$
2. For $i = 1$ to n
   add X_i to the network
   select parents from $X_1, \ldots, X_{i-1}$ such that
   $\mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i)) = \mathbf{P}(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$

This choice of parents guarantees the global semantics:

$$\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) \quad \text{(chain rule)}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i)) \quad \text{(by construction)}$$

Wahl der Ordnung der Variablen
- beeinflusst die Topologie des Netzes
- reflektiert die Kausalitätsannahmen
- ist aber nicht zwingend

Russell & Norvig - ch.14.1-3, f.12

Konstruktion eines Netzes – Beispiel
(Ungünstige Wahl der Ordnung der Zufallsvariablen)

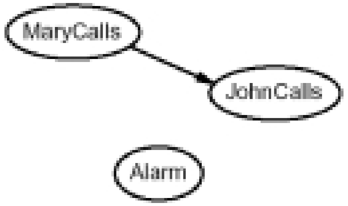
Suppose we choose the ordering M, J, A, B, E

$P(J \mid M) = P(J)$?

Russell & Norvig - ch.14.1-3, f.13

Konstruktion eines Netzes – Beispiel

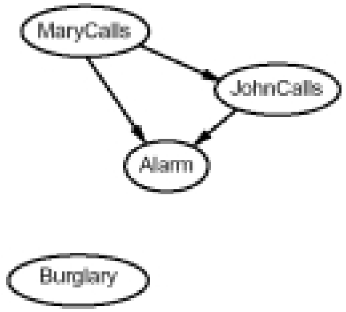
Suppose we choose the ordering M, J, A, B, E



$P(J|M) = P(J)$? No
$P(A|J, M) = P(A|J)$? $P(A|J, M) = P(A)$?

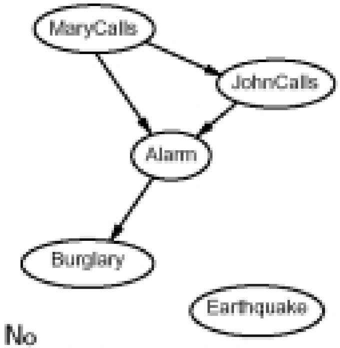
Konstruktion eines Netzes – Beispiel

Suppose we choose the ordering M, J, A, B, E



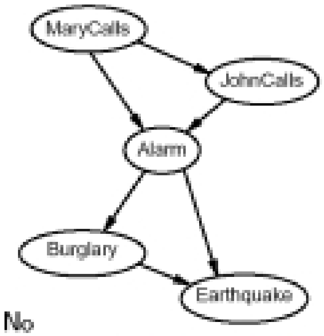
$P(J|M) = P(J)$? No
$P(A|J, M) = P(A|J)$? $P(A|J, M) = P(A)$? No
$P(B|A, J, M) = P(B|A)$?
$P(B|A, J, M) = P(B)$?

Konstruktion eines Netzes – Beispiel



$P(J|M) = P(J)$? No
$P(A|J, M) = P(A|J)$? $P(A|J, M) = P(A)$? No
$P(B|A, J, M) = P(B|A)$? Yes
$P(B|A, J, M) = P(B)$? No
$P(E|B, A, J, M) = P(E|A)$?
$P(E|B, A, J, M) = P(E|A, B)$?

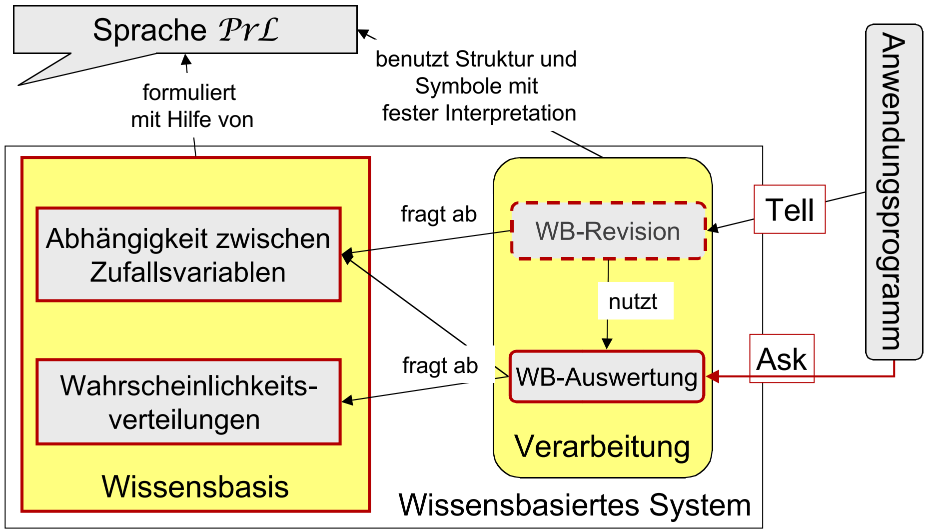
Konstruktion eines Netzes – Beispiel



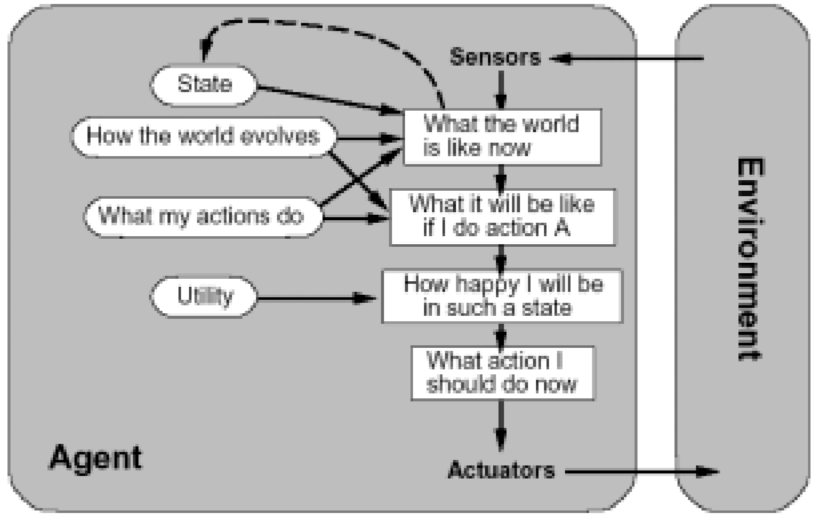
Resultierendes Netz hat eine andere Topologie als das ursprünglich betrachtete Netz.

$P(J|M) = P(J)$? No
$P(A|J, M) = P(A|J)$? $P(A|J, M) = P(A)$? No
$P(B|A, J, M) = P(B|A)$? Yes
$P(B|A, J, M) = P(B)$? No
$P(E|B, A, J, M) = P(E|A)$? No
$P(E|B, A, J, M) = P(E|A, B)$? Yes

Wissensbasiertes System
Bayes Netze



Utility-based agent:
Erwarteter Nutzen vs. Nutzen des Erwarteten Resultats



Russell & Norvig - ch.2, f.22

Reiseplanung

Gruppen-diskussion

Sie planen (wieder einmal) mit dem Auto, dem Fahrrad oder dem öffentlichen Nahverkehr von A nach B zu gelangen.

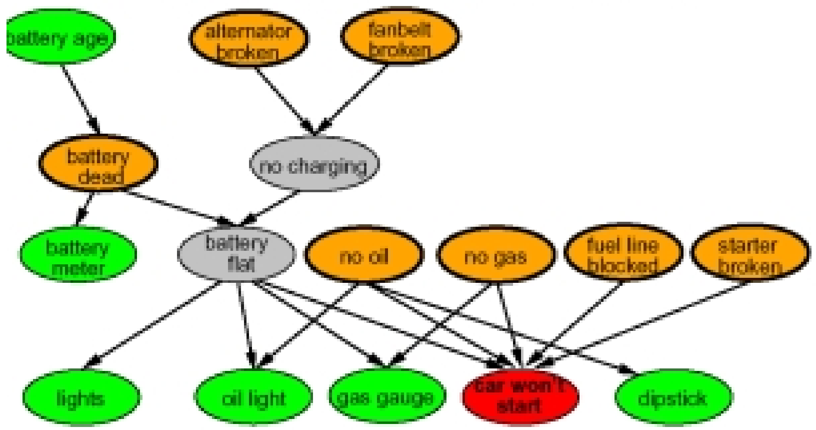
(Zuerst ist eine Entscheidung über die Details der Aufgabenstellung zu treffen.)

Wie können in einem Bayes-Netz die folgenden Einflüsse berücksichtigt werden:

- **Termin (Tageszeit, Wochentag, etc.)**
- **Wetter**
- **Park- und Umsteigemöglichkeiten etc.**

Ein weiteres Beispiel: Auto Diagnose

Initial evidence: car won't start
Testable variables (green), "broken, so fix it" variables (orange)
Hidden variables (gray) ensure sparse structure, reduce parameters



Russell & Norvig - ch.14.1-3, f.19