Grundlagen der Verarbeitung von Wissen über Raum, Zeit und Ereignisse

2. Sitzung

Zeit: Struktur und Axiomatisierung

Gliederung

- Zeit in der (formalen) Sprache und Zeitstruktur in Modellen
- Datierung und Pseudodatierung
- Formalisierungsalternativen der Zeit in Punktmodellen

Zeitverankerung in der Sprache: Beispiele

Zeitlose Aussagen

- π ist nicht rational, es gibt keine größte Primzahl.
- Hans ist der Vater von Peter.

Aussagen mit Zeitbezug

- Die zweite Sitzung der Vorlesung beginnt am 20.04. 2009 um 10:15 Uhr.
- Peter ist / war müde.
- Hans und Susanne haben geheiratet.
- Peter wird bald eingeschult.
- Peter hat den Weihnachtsmann nie gesehen.

Viele Zeitbezüge sind unterbestimmt

- Verarbeitung zeitlichen Wissens beschäftigt sich mit dem unterbestimmten Wissen.

Zeitverankerung in der Sprache: Symbolisierungen

Peter war müde.

Alternative Symbolisierungen des Zeitbezugs konzeptueller Relationen

Sei t ein Element aus der Zeitdomäne und A der (Zeit-neutralen) Satzinhalt.

1. Gewisse Aussagen sind unvollständig, wenn die Zeit nicht spezifiziert ist
   - A(t) — müde(t, Peter) $\wedge$ t $\prec$ t*
2. Aussagen beschreiben Sachverhalte / Situationen, die mit Zeit verknüpft werden
   - Holds(A, t) — Holds(müde(Peter), t) $\wedge$ t $\prec$ t*
3. Der Zeitbezug von Aussagen kann temporal ‚verschoben' werden
   - Vergangenheit(A), P A — P(müde(Peter))

Temporallogik und temporallogische Modellstrukturen

Temporale Aussagenlogik

- Erweiterung der Syntax der Aussagenlogik um temporale Operatoren
- Entwicklung etwa ab Mitte der 50er Jahre
- Prior (1957), Rescher & Urquhart (1971), Galton (1987)

Temporale Modellstrukturen

- Grundlage für die modelltheoretische Semantik
- formale Umsetzung unterschiedlicher Zeitvorstellungen (Zeitontologie)

  ➔ van Benthem (1983)

Zeit – Zeitstrukturen

Grundidee

- Zeit wird als eigenständige Domäne angesehen,
- Zeit weist eine interne Struktur auf.

- Aussagen über Zeit weisen interne Struktur auf.

- Objekte / Ereignisse / Situationen werden in der Zeit „verankert" (lokalisiert).
- Beide Strukturen (Zeit-Struktur und Aussagen-Struktur) werden in der Wissensverarbeitung modelliert und genutzt.

Strukturelle Relationen – konzeptuelle Relationen

Unterscheidung

- strukturelle Relationen: modellieren die Struktur der Zeit
  - Präzedenz: Früher-Später-Relation ($t \prec t^*$)
  - (partielle) Gleichzeitigkeit
  - Extensionalität: verschiedene Zeitentitäten sind durch ihre Einbettung in die (Zeit-)Struktur unterscheidbar

- sachbezogene / thematische Relationen: nutzen Zeit für die Informationskodierung
  - Geburtstermin, Lebenszeit, …
  - Daten von Ereignissen, Planungsdaten
  - müde(t, Peter), Holds(müde(Peter), t)

  ➔ logische vs. konzeptuelle Operatoren:
  Abbildung von logischen Aussagestrukturen vs. Aussageinhalten

Verschiedene Zeitmodelle

Physikalische Zeitmodelle

- Konsequenzen der Relativitätstheorie: Gleichzeitigkeit ist nicht unabhängig vom Raum erfassbar
  ➔ Raum-Zeit als integriertes Modell

‚Naive' Zeitauffassung (Newton)

- Zeit ist unabhängig vom Raum: Orthogonale Dimension
  ➔ Führt bei Standardproblemen und der Modellierung der Alltagsauffassung von Zeit nicht zu Problemen.
  ➔ Modellierungen für Unterstützungen in der Astronomie und der Teilchenphysik benötigen unter Umständen integrierte Modelle der Raum-Zeit.

In dieser Vorlesung

- Es geht nicht um empirisch korrekte Theorien von Zeit und Raum, sondern
  ➔ Formalisierungsmöglichkeiten sollen an einfachen Beispielen aufgezeigt werden.

Zeitrepräsentation durch Datierung

- Die dritte Sitzung beginnt am 27.04.2009 um 10:15 Uhr.

Datierungssysteme (Jahr, Monat, Tag, Stunde, Minute, Sekunde)

➔ ISO 8601: '2009-04-27T10:15'

- Standardisierte (numerische) Strukturen
- lineare Ordnung, Maß für Abstände / Dauern
- Abbildung der Ereignisse auf Daten
- Erlauben sehr effiziente Verarbeitung von Zeitinformation
  - Vergleich bzgl. früher / später
  - Bestimmung von zeitlichen Abständen / Dauern
  - Kommunikation mit anderen Menschen / Systemen
- Erfordern (in der reinen Form) genaue Datierungen aller Ereignisse (Zeitmessung)

  ➔ Keine unterbestimmt Zeitinformation.

Pseudo-Datierungssysteme

- Proprietäre (numerische) Strukturen
  - lineare Ordnung (z.B. rationale Zahlen)
  - ohne Umrechnungsvorschrift auf ein Datierungssystem
- Abbildung der Ereignisse auf Pseudo-Daten (Zeitstempel)
- Erlauben einen effizienten
  - Vergleich bzgl. früher / später
- aber keine
  - Kommunikation mit anderen Menschen / Systemen
  - Bestimmung von zeitlichen Abständen / Dauern
- Erfordert genaue Kenntnis über die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse (z.B. Transaktionen in einer Datenbank)

➔ unterbestimmte Zeitinformation relativ zu externen Ereignissen
➔ maximal bestimmte Zeitinformation bei internen Bezügen

Unterbestimmte zeitliche Einordnung (1)

- erfordert weitere Mittel der Spezifikation zeitlicher Information
- führt zu weniger effizienten Verfahren

Datierung durch Intervalle

- punktuelle Ereignisse werden durch frühest und spätest mögliches Datum spezifiziert
  - ‚die Geburt fand zwischen 17:10 und 17:15 am 1.1.2001 statt'
- Erlaubt (mit Unsicherheiten behaftet)
  - einen effizienten Vergleich bzgl. früher / später
  - Kommunikation mit anderen Menschen / Systemen
  - Bestimmung von zeitlichen Abständen / Dauern
- Bietet noch kein Mittel um zeitliche Relationen zwischen Ereignissen zu spezifizieren, ohne sie zu datieren.
  - ‚Hans wurde vor Peter geboren'

Unterbestimmte zeitliche Einordnung (2)

Pseudo-Datierung durch Intervalle

- mit linear geordneten Pseudo-Daten (z.B. rationale Zahlen)
- punktuelle Ereignisse werden durch frühest und spätest mögliches Pseudo-Datum spezifiziert
- kann Reihenfolge-Entscheidungen erzwingen
- Beispiel
  - E1 vor E2 vor E3 vor E6 und E1 vor E4 vor E5 vor E6

$$\begin{tikzcd} & E2(3, 6) \arrow[r] & E3(6, 9) \arrow[dr] & \\ E1(0, 3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & E6(9, 12) \\ & E4(3, 6) \arrow[r] & E5(6, 9) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- Der späteste Termin von E2 und der früheste Termin von E5 müssen im Pseudo-Datierungssystem geordnet werden

Kein adäquates Mittel !

Zielsetzung der Zeitmodellierung

Formalismen

- für die Repräsentation von bestimmten und unterbestimmten Zeitangaben
- mit klarer Semantik als Basis für
  - Notation / Repräsentation von Angaben
  - Verarbeitung / Inferenzen, insbesondere bei der Kombination verschiedener Angaben

Ontologie

- Typen zeitlicher Objekte (Momente, Perioden)
- Struktur der Zeit (linear, diskret, ...)

Terminologie

- Zeitliche Relationen, insbesondere Ordnungsrelationen

Zeitontologie I: Punktstrukturen

Klassische Vorstellung der Zeit

- Menge von Momenten (Zeitpunkten)
- Früher-als-Relation (Präzedenz)

[Def] Eine Punktstruktur $\mathcal{T} = \langle T, < \rangle$ ist ein geordnetes Paar mit einer nichtleeren Menge T und der binären Relation < über T.

Bereits eingegangen ist die Annahme über die Ordnung der Zeit

- gerichtet und zyklenfrei
- absolut, d.h. unabhängig von den Ereignissen
  ➔ Ungerichtete und/oder zyklische Ordnungsstrukturen benötigen für ihre formale Charakterisierung drei- oder vier-stellige Relationen.

Formalsprachliche Pendants

- Variablen für die Elemente von T: t, t', t_1, t_2, …, t_A, t_B, …
- Symbol für die Ordnungsrelation <: $\prec$
  ➔ Axiome für weitere Beschränkungen der Struktur.

Modelltheoretische Semantik: eine kurze Auffrischung (1)

(formale) Sprache ($\mathcal{L}$)

- Grundbausteine (atomare Ausdrücke, Terminal-Zeichen): t, t_1, t_2, t_3, …, $\prec$
- Bildungsregeln (Grammatik) für wohlgeformte Ausdrücke (Formeln): $\alpha \prec \beta$

Strukturen ($\mathcal{S} = \langle U, < \rangle$)

- U: Grundmenge / Inventar von Objekten ($\mathbb{Z}$)
- ggf. ausgezeichnete Teilmengen / Relationen / Funktionen für die Grundmenge
  $< = \{(0, 1), (-1, 0), (-1, 1), (1, 2), (0, 2), (-1, 2), (-2, -1), (-2, 0), \ldots\}$

Modelltheoretische Semantik: eine kurze Auffrischung (2)

Interpretation (ν^*): Abbildung sprachlicher Ausdrücke auf ihr Denotat

- Belegungsfunktion für die atomaren Ausdrücke (ν)
  - Elemente der Grundmenge: $t_1 \rightarrow 47$, $t_2 \rightarrow 22$, $t_3 \rightarrow -17$
  - daraus gebildeten Mengen: $\prec \; \rightarrow \; <$
- Interpretationsregeln für komplexe Ausdrücke (ν^*) (kompositionale Interpretation)
  - $\alpha \prec \beta \rightarrow$ wahr, gdw. $(\nu^*(\alpha), \nu^*(\beta)) \in \nu(\prec)$
  - Wahrheitswerte: „$t_1 \prec t_2$“ $\rightarrow$ falsch; „$t_3 \prec t_1$“ $\rightarrow$ wahr

Modelltheorie und Beweiskalküle

Modell ($\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \nu^*)$)

- Ein *Modell* einer Formel oder Formelmenge ist ein Paar aus einer Struktur und einer Interpretation, die die Formel(n) wahr macht.

Axiome ($\mathcal{A}$)

- eine Menge von Formeln aus $\mathcal{L}$
- *Aus den Axiomen folgenden Formeln*: Sind unter allen Interpretationen wahr, die auch die Axiome wahr machen.
  ➔ Annahmen über die Strukturen werden durch Axiome formuliert.

Kalkül ($\mathcal{C} = (\mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$)

- Ein Kalkül wird gebildet durch eine Sprache ($\mathcal{L}$), eine Menge von Axiomen ($\mathcal{A}$), und eine Menge von Inferenzregeln ($\mathcal{R}$).
- Ein Beweis einer Formel F in $\mathcal{C}$ ist eine endliche Folge von Axiomen und Resultaten von Regelanwendung auf frühere Folgenglieder, wobei F das letzte Folgenglied ist.

Ende Exkurs Modelltheorie

Zeitontologie I: Punktstrukturen (Kurzfassung)

Klassische Vorstellung der Zeit

- Menge von Momenten (Zeitpunkten)
- Früher-als-Relation (Präzedenz)

[Def] Eine Punktstruktur $\mathcal{T} = \langle T, < \rangle$ ist ein geordnetes Paar mit einer nichtleeren Menge T und der binären Relation < über T.

Bereits eingegangen ist die Annahme über die Ordnung der Zeit

- gerichtet und zyklenfrei
- absolut, d.h. unabhängig von den Ereignissen

Formalsprachliche Pendants

- Variablen für die Elemente von T: t, t', t_1, t_2, …, t_A, t_B, …
- Symbol für die Ordnungsrelation <: $\prec$
- primitive Relation: nicht definiert
  ➔ Axiome für weitere Beschränkungen der Struktur entsprechen gültigen Inferenzen über zeitliche Präzedenz

Welche Struktur hat die Zeit?

Welche Schlüsse bzgl. zeitlicher Präzedenz sind zulässig?

Wie können wir diese Bedingung formal beschreiben?

Strukturelle Bedingungen

Übersicht

- Zeit als Ordnungsstruktur (Präzedenz)
- Extensionalität bzgl. Präzedenz
- Begrenzte oder unbegrenzte Zeit
- Verzweigung und Zusammenhang
- Gleichförmigkeit (Mikro-Struktur)
  - Diskretheit
  - Dichte
  - Kontinuität

Zeit ist (linear) geordnet: Zyklenfreiheit

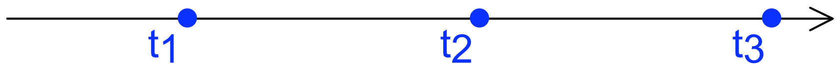
Minimalanforderung für temporale Modelle

- Zeit hat keine Zyklen.
- Präzedenz ist eine strikte partielle Ordnung
  - Transitivität
  - Irreflexivität
  - führen zur Asymmetrie (TRANS, IRREF $\models$ ASYM)

[TRANS] $\forall t_1\, t_2\, t_3\, [t_1 \prec t_2 \land t_2 \prec t_3 \rightarrow t_1 \prec t_3]$

[IRREF] $\forall t\, [\neg(t \prec t)]$

[ASYM] $\forall t_1\, t_2\, [t_1 \prec t_2 \rightarrow \neg(t_2 \prec t_1)]$



- „Fluss der Zeit“: … eine häufig verwendete Metapher für das „Wesen der Zeit“
  - fließen: TRANS
  - nicht stoppen: IRREF
  - keine Umkehr: ASYM

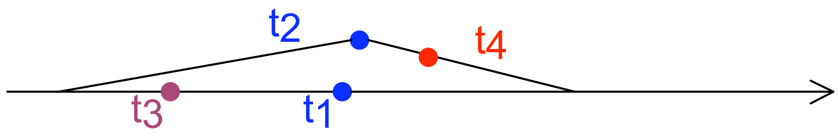
Zeit-Extensionalität

- Verschiedene Zeitpunkte lassen sich (direkt oder indirekt) mittels der Präzedenzrelation auseinander halten
  ➔ verschiedene Zeitpunkte unterscheiden sich in ihrer strukturellen Einbettung

[EXTENS] $\forall t_1\, t_2\, [(\forall t_3\, [t_3 \prec t_1 \leftrightarrow t_3 \prec t_2] \wedge$
$\forall t_4\, [t_1 \prec t_4 \leftrightarrow t_2 \prec t_4]) \rightarrow t_1 = t_2]$

- Alternative Formulierung

[EXTENS] $\forall t_1\, t_2\, [t_1 \neq t_2 \rightarrow$
$(\exists t_3\, [(t_3 \prec t_1 \wedge \neg\, t_3 \prec t_2) \vee (\neg\, t_3 \prec t_1 \wedge t_3 \prec t_2)] \vee$
$\exists t_4\, [(t_1 \prec t_4 \wedge \neg\, t_2 \prec t_4) \vee (\neg\, t_1 \prec t_4 \wedge t_2 \prec t_4)])\,]$



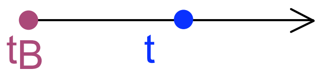
Strukturalternative 1: Begrenzte oder unbegrenzte Zeit

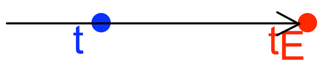
Es gibt einen ersten oder letzten Zeitpunkt (Beginn / Ende der Zeit).

[BOUND_B] $\exists t_B\, \neg\exists t\, [t \prec t_B]$

[BOUND_E] $\exists t_E\, \neg\exists t\, [t_E \prec t]$

➔ (komplexere Formulierung für verzweigende Zeitstrukturen, s.u.)





Für die Annahme eines „Beginns der Zeit“

- gibt es physikalische Argumente (aber auch Gegenargumente)
- gibt es praktische Argumente
  - „…alles vor t_B ist für die aktuelle Problemstellung / -lösung nicht relevant…“
  - Alle endlichen Strukturen sind begrenzt.

Strukturalternative 1: Begrenzte oder unbegrenzte Zeit (cont.)

Zeit ist unbegrenzt.

[SUCC_V] $\forall t\ \exists t_V\ [t_V \prec t]$

[SUCC_N] $\forall t\ \exists t_N\ [t \prec t_N]$

[SUCC] $\forall t\ [\exists t_V\ [t_V \prec t] \wedge \exists t_N\ [t \prec t_N]]$

➔ SUCC sagt nicht aus, dass *direkte* Nachfolger / Vorgänger existieren.

➔ SUCC-Strukturen sind unendlich

- Einige wichtige Kombinationen von Strukturfestlegungen
  - [BOUND_B] & [BOUND_E]
  - [BOUND_B] & [SUCC_N]
  - [BOUND_E] & [SUCC_V]

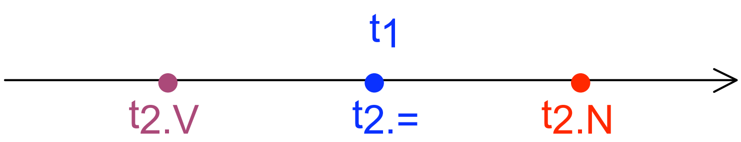
Strukturalternative 2: Lineare Zeit oder verzweigt und unzusammenhängend

Zeitpunkte können nicht ‚nebenläufig' sein

[LIN] $\forall t_1\ t_2\ [t_2 \prec t_1 \vee t_1 = t_2 \vee t_1 \prec t_2]$

➔ Präzedenz ist eine totale Ordnung.

➔ Lineare Zeit



Es gilt

- Jede Struktur, die LIN und IRREF erfüllt, erfüllt auch EXTENS

LIN, IRREF $\models$ EXTENS

Verzweigenden Zeitstrukturen: Motivation & Anwendung

Nutzung der vorwärtsverzweigenden Zeit zur Modellierung von

- Unbestimmtheit der Zukunft
- Denkbarkeit alternativer zukünftiger Entwicklungen
- Planungsalternativen

Nutzung der rückwärtsverzweigenden Zeit zur Modellierung von

- alternative vergangene Entwicklungen, die zum derzeitigen Zustand der Welt geführt haben (können)
- Diagnose, Erklärungsalternativen

Verzweigenden Zeitstrukturen: Leibniz vs. Newton

Verzweigung *der* Zeit: Leibniz: relative Zeit.

- Jeder Zeitpunkt ist durch die Menge der Ereignisse, die an ihm stattfinden, definiert.
- Verzweigung des Ereignisverlaufes ist zugleich Verzweigung der Zeit.

Verzweigung *in* der Zeit: Newton: absolute Zeit.

- Die Zeit ist unabhängig von Ereignissen, die in ihr stattfinden (Zeit als ‚Behälter' für Ereignisse).
- Verzweigung des Ereignisverlaufes impliziert keine Verzweigung der Zeit.

Verzweigte Zeit in der Sprachverarbeitung: *Imperfective Paradox*

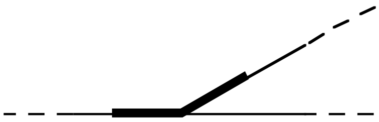
- Als Peter die Straße überquerte, wurde er von seinem Vater ergriffen und nach Hause getragen.

Problem

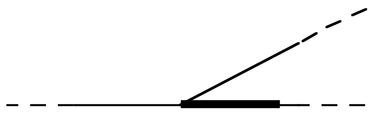
Wie kann man Peters Beteiligung an einem zielgerichteten Ereignis beschreiben, wenn dieses Ereignis gar nicht zu Ende geführt wurde und somit (in seiner Gesamtheit) gar nicht stattgefunden hat.

Lösung mit verzweigender Zeit

- Nicht nur tatsächliche Ereignisse,
- sondern auch denkbare Entwicklungen des Geschehens werden auf unterschiedlichen Zeit-Zweigen modelliert.



Peter überquert die Straße.



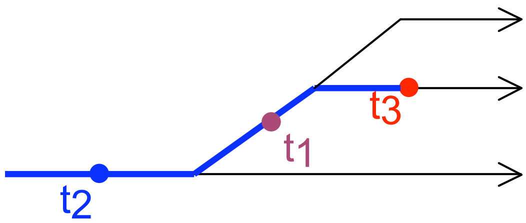
Der Vater trägt Peter nach Hause.

Strukturalternative 2: Lineare Zeit oder verzweigt und unzusammenhängend (cont.)

Einseitige Formen von Linearität

- Die Vergangenheit jeder Zeit ist unverzweigt: („links-linear“) Verzweigung allenfalls in der Zukunft („vorwärtsverzweigend“, „branching future“)

[L-LIN] $\forall\, t_1\, t_2\, t_3\, [t_1 \prec t_3 \wedge t_2 \prec t_3 \rightarrow (t_1 \prec t_2 \vee t_1 = t_2 \vee t_2 \prec t_1)]$



- Die Zukunft jeder Zeit ist unverzweigt: („rechts-linear“) Verzweigung allenfalls in der Vergangenheit („rückwärtsverzweigend“, „branching past“)

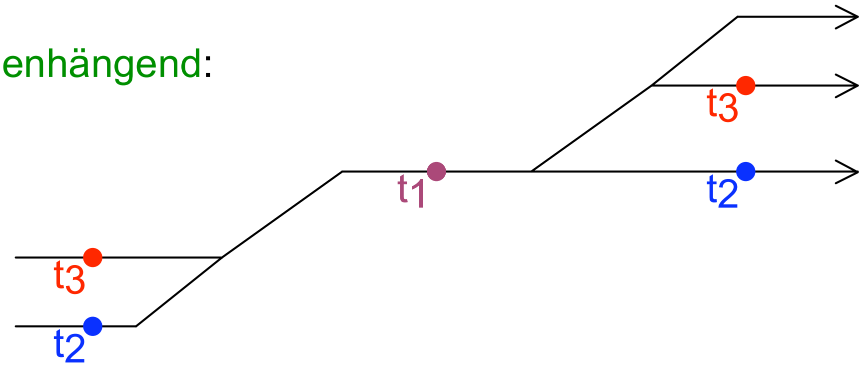
[R-LIN] $\forall\, t_1\, t_2\, t_3\, [t_3 \prec t_1 \wedge t_3 \prec t_2 \rightarrow (t_1 \prec t_2 \vee t_1 = t_2 \vee t_2 \prec t_1)]$

Strukturalternative 2: Lineare Zeit oder verzweigt und unzusammenhängend (cont.)

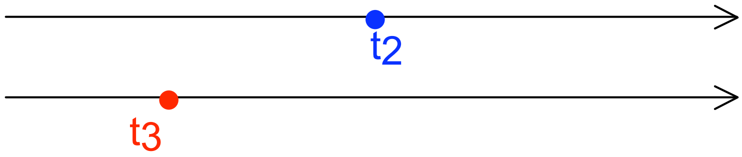
Bedingung für den Zusammenhang der Zeit

[CON] $\forall t_3\, t_2\, [t_2 \prec t_3 \vee t_2 = t_3 \vee t_3 \prec t_2 \vee$
$\exists t_1\, [(t_2 \prec t_1 \wedge t_3 \prec t_1) \vee (t_1 \prec t_2 \wedge t_1 \prec t_3)]]$

zusammenhängend:



nicht zusammenhängend:



Formulierungsvariante zu den Verzweigungsmöglichkeiten

Definition der Relation ORD: angeordnet durch Präzedenz

- Symmetrische, reflexive Hülle der Relation Präzedenz

[DORD] $ORD(t_1, t_2) \leftrightarrow_{def} (t_1 \prec t_2 \vee t_1 = t_2 \vee t_2 \prec t_1)$

Reformulierungen der Axiome

[LIN] $\forall t_1\, t_2\, [ORD(t_1, t_2)]$

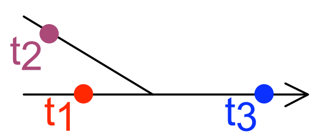
[L-LIN] $\forall t_1\, t_2\, t_3\, [t_1 \prec t_3 \wedge t_2 \prec t_3 \rightarrow ORD(t_1, t_2)]$

[R-LIN] $\forall t_1\, t_2\, t_3\, [t_3 \prec t_1 \wedge t_3 \prec t_2 \rightarrow ORD(t_1, t_2)]$

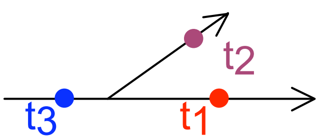
[CON] $\forall t_1\, t_2\, \exists t_3\, [ORD(t_1, t_3) \wedge ORD(t_2, t_3)]$

Ausgeschlossene Strukturen

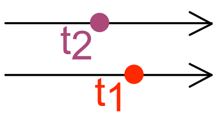
L-LIN



R-LIN



CON



Interaktion der Axiome

[DORD] $ORD(t_1, t_2) \leftrightarrow_{def} (t_1 \prec t_2 \lor t_1 = t_2 \lor t_2 \prec t_1)$

[LIN] $\forall t_1\, t_2\, [ORD(t_1, t_2)]$

[L-LIN] $\forall t_1\, t_2\, t_3\, [t_1 \prec t_3 \land t_2 \prec t_3 \rightarrow ORD(t_1, t_2)]$

[R-LIN] $\forall t_1\, t_2\, t_3\, [t_3 \prec t_1 \land t_3 \prec t_2 \rightarrow ORD(t_1, t_2)]$

[CON] $\forall t_1\, t_2\, \exists t_3\, [ORD(t_1, t_3) \land ORD(t_2, t_3)]$

Es gilt

- Jede Struktur, die LIN erfüllt, erfüllt auch L-LIN, R-LIN und CON

LIN $\models$ L-LIN, R-LIN, CON

- Jede Struktur, die TRANS, L-LIN, R-LIN und CON erfüllt, erfüllt auch LIN

TRANS, L-LIN, R-LIN, CON $\models$ LIN

Gleichförmige Struktur der Zeit

Zeit verläuft immer in gleicher Art

- Keine ausgezeichneten Extrema: SUCC
- Keine Verzweigungspunkte oder unverbundene Zeiten: LIN

Interne (Mikro-)Struktur der Zeit

- Wie erfassen wir diskrete Zeitschritte? (z.B. Tage als Zeitpunkte)
- Wie erfassen wir einen kontinuierlichen Verlauf der Zeit?

Analogie zwischen Zeit und ‚Zahlenstrahl'

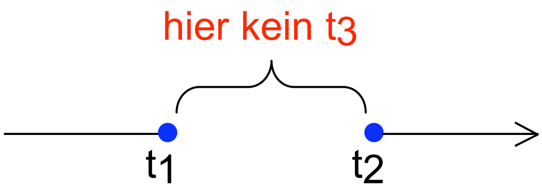
- Zeit als Menge der ganzen Zahlen mit der natürlichen Ordnung ($\langle \mathbb{Z}, < \rangle$): Datierungen
- Zeit als Menge der rationalen oder reellen Zahlen mit den entsprechenden Ordnungen
- es gibt noch ganz andere Möglichkeiten linearer Ordnungen
  ➔ Ordnungsstrukturen und Ordinalzahlen (dtv-Atlas zur Mathematik. Bd. 1)

Diskrete Zeit (1)

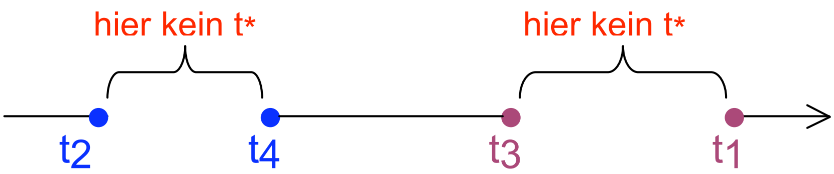
Ziel: Struktur der Zeit analog zu den ganzen Zahlen $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$

Zu jedem Moment gibt es einen direkten Nachfolger und einen direkten Vorgänger.

[D$\prec_\diamond$] $\quad t_1 \prec_\diamond t_2 \leftrightarrow_{def} \quad t_1 \prec t_2 \wedge \neg\exists\, t_3\, [t_1 \prec t_3 \wedge t_3 \prec t_2]$



[DISC] $\quad \forall\, t_1\, t_2\, [t_2 \prec t_1 \rightarrow \exists\, t_3\, [t_3 \prec_\diamond t_1] \wedge \exists\, t_4\, [t_2 \prec_\diamond t_4]]$



Diskrete Zeit (2)

- Das DISC-Axiom
  - ist auch mit BOUND-Systemen verträglich
  - beinhaltet keine „Metrik“ bzw. Distanz zwischen Zeitmomenten.
- Endliche, strikte partielle Ordnungen sind stets begrenzt und diskret:
  endlich, TRANS, IRREF ➔ BOUND, DISC
- Modelle von TRANS, IRREF, LIN, SUCC, DISC sind z.B.
  $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ und $\langle \mathbb{Z}, > \rangle$

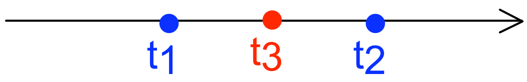
! direkte Vorgänger und direkte Nachfolger aber:
zwischen zwei Zeitpunkten können unendlich viele andere Zeitpunkte liegen:
$T = \langle \{3, 9\} \times \mathbb{Z}, < \rangle$ mit
$\langle x_1, y_1 \rangle < \langle x_2, y_2 \rangle$ gdw. $x_1 < x_2$ oder $x_1 = x_2$ und $y_1 < y_2$

Dichte Zeit

Ziel: Struktur der Zeit analog zu den rationalen Zahlen $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$

Zwischen je zwei Momenten gibt es einen weiteren Moment.

[DENS] $\forall\, t_1\, t_2\, [t_1 \prec t_2 \rightarrow \exists\, t_3\, [t_1 \prec t_3 \wedge t_3 \prec t_2]]$



- Dichte (density) schließt direkte Nachfolge aus.

[DENS] $\neg\exists\, t_1\, t_2\, [t_1 \prec_{\diamond} t_2]$

➔ Dichte Ordnungen gibt es nur auf unendlichen Mengen.

- Modelle von TRANS, IRREF, LIN, SUCC, DENS sind z.B. $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ bzw. $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$ und $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ bzw. $\langle \mathbb{R}, > \rangle$.

Kontinuierliche Zeit

Ziel: Struktur der Zeit analog zu den reellen Zahlen $\langle \mathbb{R}, < \rangle$

! Kontinuität muss als Bedingung zweiter Ordnung über alle Teilmengen der Grundmenge formuliert werden.

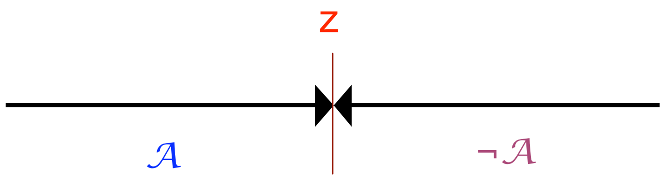
[CONT] $\forall\, \mathcal{A}\, [\forall\, x\, y\, [\mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{A}(y) \rightarrow x \prec y] \wedge \exists\, x\, [\mathcal{A}(x)] \wedge \exists\, y\, [\neg\mathcal{A}(y)] \rightarrow \exists\, z\, [\forall\, x\, [x \prec z \rightarrow \mathcal{A}(x)] \wedge \forall\, y\, [z \prec y \rightarrow \neg\mathcal{A}(y)]]]$

- Modelle von TRANS, IRREF, LIN, SUCC, DENS, CONT sind z.B. $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ bzw. $\langle \mathbb{R}, > \rangle$.

Prinzip des „Dedekind-Schnittes“

[CONT] $\forall \mathcal{A}\, [\forall x\, y\, [\mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{A}(y) \rightarrow x \prec y] \wedge$
$\exists x\, [\mathcal{A}(x)] \wedge \exists y\, [\neg\mathcal{A}(y)] \rightarrow$
$\exists z\, [\forall x\, [x \prec z \rightarrow \mathcal{A}(x)] \wedge \forall y\, [z \prec y \rightarrow \neg\mathcal{A}(y)]]]$

- jede vollständige Aufteilung der Zeit in eine *Früher*-Menge und eine *Später*-Menge definiert einen eindeutigen trennenden Punkt.



- keine Aussage über z bzgl. der Eigenschaft $\mathcal{A}$

Anmerkungen zur Kontinuität

Dedekindscher Schnitt für Zahlen

mit $\mathcal{A}(x)$ gdw. $x < 0 \vee x^2 < 2$
ergibt für z die Bedingung
$\forall u\, (u < z \rightarrow u < 0 \vee u^2 < 2) \wedge \forall u\, (z < u \rightarrow u^2 \geq 2 \wedge u \geq 0)$

- dieses z nennen wir auch $\sqrt{2}$.
- $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ ist nicht kontinuierlich, denn $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ enthält diesen Wert nicht.

! Für unsere Betrachtungen zur Zeit spielen nur die Ordnungsstrukturen eine Rolle, nicht die arithmetischen Strukturen.

Multiplikation und Quadration macht für Zeit keinen Sinn.

Dedekindscher Schnitt für die Zeit

Peter wirft einen Ball in die Luft, er steigt erst und fällt dann wieder zu Boden.

- $\mathcal{A}(t)$ gdw. Peter hat zu t den Ball noch nicht geworfen oder der Ball ist zu t noch in der Aufwärtsbewegung.
- z ist der Zeitpunkt der Umkehr des Balles.

- Müssen / Wollen wir für jegliche entsprechende Bedingung die Existenz solch eines Zeitpunktes garantieren?

Standardmodelle der linearen Zeit

	ausgezeichnetes Modell	Mächtigkeit
nicht endliche diskrete Zeit	$\langle \mathbb{Z}, < \rangle$	$\aleph_0$
dichte Zeit	$\langle \mathbb{Q}, < \rangle$	$\aleph_0$
kontinuierliche Zeit	$\langle \mathbb{R}, < \rangle$	$2^{\aleph_0}$

Stetigkeit / „kontinuierlicher Übergang“ kann auch auf dichten (nicht-kontinuierlichen) Strukturen vorliegen.

! „continuous“ ≈ „continuity“ (Stetigkeit) und „continuum“ (Kontinuum).

- Mit endlich langen Symbolketten aus endlich vielen Symbolen können wir nicht für jeden Wert aus $\mathbb{R}$ einen Bezeichner bilden.
- Die Axiommengen sind nicht vollständig hinsichtlich einer dieser Strukturen!

Ein übliches Axiomensystem für Punktstrukturen

[TRANS] $\forall t_1\ t_2\ t_3\ [t_1 \prec t_2 \wedge t_2 \prec t_3 \rightarrow t_1 \prec t_3]$
[IRREF] $\forall t\ [\neg(t \prec t)]$
[LIN] $\forall t_1\ t_2\ [t_1 \prec t_2 \vee t_1 = t_2 \vee t_2 \prec t_1]$
[SUCC] $\forall t\ [\exists t_V\ [t_V \prec t] \wedge \exists t_N\ [t \prec t_N]]$
[DENS] $\forall t_1\ t_2\ [t_1 \prec t_2 \rightarrow \exists t_3\ [t_1 \prec t_3 \wedge t_3 \prec t_2]]$

Damit gelten auch

ASYM, EXTENS, SUCC_V, SUCC_N, L-LIN, R-LIN, CON

Ergänzung folgender Axiome führt zur Inkonsistenz

BOUND_B, BOUND_E, DISC

Vorteile

- Linearität, Zusammenhang
- keine strukturell ausgezeichneten Zeitpunkte (Anfang, Verzweigung)
- Einförmigkeit (keine feste Schrittgröße / Granularität)

Nachteil

- keine endlichen Modelle

Zusammenfassung und Ausblick

- Strukturelle Restriktionen für Zeit-Modelle können als Axiome in einem Beweiskalkül formuliert werden.
  - modelltheoretische Semantik
- Für die Formalisierung der Struktur der Zeit gibt es Alternativen
  - Art der zugrundeliegenden Ordnungsstruktur
  - Form der Formulierung der Prinzipien
- Nächste Sitzung: Wahl der Basisentitäten: Punkte und / oder Perioden
  - Zeitstruktur wird analog zu Zahlenstrukturen verstanden und modelliert.
  - Formulierungsalternativen für den Zeitbezug von konzeptuellen Relationen wirken sich nicht direkt auf die Struktur der Zeitmodelle aus.

Ergänzende Literatur

Allen, James F. (1991). Time and time again: The many ways to represent time. *International Journal of Intelligent Systems 6*. 341–355.

Galton, Antony (1984): *The Logic of Aspect. An Axiomatic Approach*. Oxford: Clarendon Press.

Prior, A.N. (1957): *Time and Modality*. Oxford.

Reinhardt, Fritz & Heinrich Soeder (1974): *dtv-Atlas zur Mathematik 1. Grundlagen, Algebra und Geometrie*. München: dtv. (6. Auflage 1984.)

van Benthem, Johan F.A.K. (1983): The Logic of Time. A Model-Theoretic Investigation into the Varieties of Temporal Ontology and Temporal Discourse. Dordrecht: Kluwer. (second edition 1991.)

Galton, Antony (1995). Time and change for AI. In D. Gabbay; C. Hogger & J. Robinson (eds.), *Handbook of logic in artificial intelligence and logic programming. vol. IV: Epistemic and temporal reasoning*. (pp. 175–240). Oxford: Clarendon Press.

van Benthem, Johan (1995). Temporal logic. In D. Gabbay; C. Hogger & J. Robinson (eds.), *Handbook of logic in artificial intelligence and logic programming. vol. IV: Epistemic and temporal reasoning*. (pp. 241–350). Oxford: Clarendon Press.