

# Grundlagen der Verarbeitung von Wissen über Raum, Zeit und Ereignisse

## 3. Sitzung

### Zeit-Ontologie: Periodenstrukturen

#### Gliederung

- Motivation für Perioden: ausgedehnte konvexe Zeiten
- Lineare, unbeschränkte Ordnungen ausgedehnter konvexer Zeiten
- Relationensystem, Basisrelationen
- Periodenstruktur und Axiomatik

---

### Zeitontologie II: Periodenstrukturen

---

#### Ausgangspunkt: Kritik an punktbasierten Zeitkonzepten

- Was ist ein **Punkt**?
  - „Ein *Punkt* ist, was keine Teile hat.“ [Euklid]
  - Punkte haben **keine Ausdehnung**.
  - Punkte sind **Grenzen** von bzw. zwischen ausgedehnten Entitäten.
  - Punkte als Basisobjekte für mathematische Theorien (Geometrie, Topologie, ...) sind nützlich, aber nicht unumgänglich.
- Für die **Zeitrepräsentation**
  - Ist die Annahme von ausdehnungslosen, atomaren Zeitentitäten angemessen?
  - Reden wir über Zeitpunkte, Denken wir in Zeitpunkten?

---

## Zeitreferenz in der natürlichen Sprache

---

- Verweis auf basale Zeitentitäten mit Ausdrücken wie:
  - **jetzt, in diesem Moment**

### aber

- **In diesem Moment** isst Maria ein Brötchen.
- **Jetzt** betritt Maria das Haus.
  - keine Ausdehnung vs. sehr geringe Ausdehnung.

### Wahrnehmungspsychologie

- Grenze der zeitlichen Auflösung in der Wahrnehmung scheint bei etwa 30 msec zu liegen (ohne 'Taktung').
  - Auflösung  $\approx$  minimale perzeptuelle Diskrimination



Wie sieht die **Alternative** aus?

→ Aufbau von Zeitstrukturen auf ausgedehnten konvexen Zeitentitäten: **Perioden**

**Welche Arten von zeitlicher Präzedenz gibt es bei Zeitperioden ?**

**Welche Relationen zwischen Zeitperioden gibt es außer Präzedenz?**

**Wie interagieren die Relationen bei zeitlichen Schlüssen?**

---

## Perioden und Periodenstrukturen

---

### Perioden: Ausdehnung und Konvexität

- P ist genau dann **ausgedehnt** bzgl. einer Ordnungsrelation O, wenn P Teile hat, die durch O angeordnet werden.
- P ist genau dann **konvex** bzgl. einer Ordnungsrelation O, wenn alles, was bzgl. O zwischen zwei Teilen von P liegt, auch Teil von P ist.
  - Es wird eine **Teil-von-Relation** benötigt (→ Mereologie (Simons 1987)).

### Beispiel für Perioden

- offene Intervalle über  $\mathbb{Q}$   
 $(q_1, q_2) = \text{def } \{ q \in \mathbb{Q} \mid q_1 < q < q_2 \}$  für  $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, q_1 < q_2$

---

## Periodenstrukturen

---

[Def] Eine **Periodenstruktur**  $I = \langle I, \subseteq, < \rangle$  ist ein geordnetes Tripel mit einer nicht leeren Menge I und den beiden binären Relationen  $\subseteq$  („Inklusion“) und  $<$  („Präzedenz“) über I.

### Beispiele

- Geometrisch: Anordnungen von Linienstücken auf gerichteten Geraden.
- Punktbasiert: Induzierte Ordnung von Intervallen auf geordneten Punktmengen, z.B.

### $INT(\mathbb{Q})$ : $\mathbb{Q}$ -Intervall: offene Intervalle

Inklusion:  $(q_1, q_2) \subseteq (q_3, q_4)$  gdw.  $q_1 \in [q_3, q_4)$  und  $q_2 \in (q_3, q_4]$

Präzedenz für Intervalle:  $(q_5, q_6) < (q_3, q_4)$  gdw.  $q_6 \leq q_3$



---

## Charakterisierung von Periodenstrukturen

---

### Zeitstruktur

- auf Basis zweier Ordnungsrelationen
- Interaktion von Präzedenz und Inklusion
  - 'Primitive Relationen'
  - einige Hilfsrelationen

### Relationensystem

- 13 Relationen
  - paarweise disjunkt
  - gemeinsam vollständig (exhaustiv)
- 'Allen-Relationen' und Zeit-Struktur

---

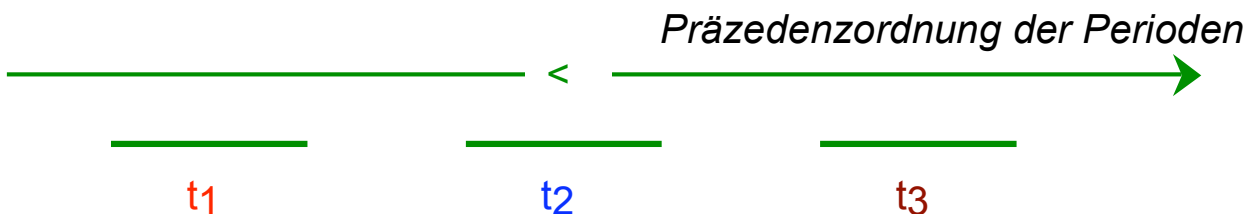
## Basischarakterisierungen für Periodenstrukturen: Präzedenz

---

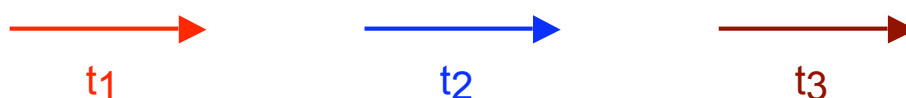
### Präzedenz

- Eine Zeitperiode liegt vor einer anderen.  
[TRANS(<)]  $\forall t_1 t_2 t_3 [t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_3 \rightarrow t_1 < t_3]$   
[IRREF(<)]  $\forall t [\neg t < t]$

[TRANS(<)]



Im Weiteren graphisch dargestellt als:





---

## Im Weiteren

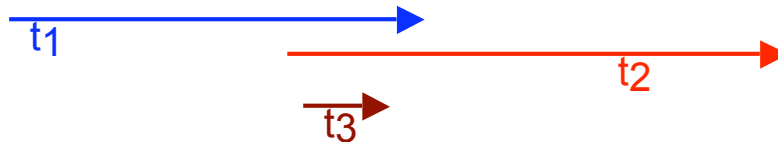
---

- Interaktion von Teil-von und Präzedenz
- Lineare Ordnungen von Perioden
- Teilbarkeit von Perioden

### Hilfsrelation: Überlappung (overlap)

$$[D(\circ)] \quad t_1 \circ t_2 \leftrightarrow_{\text{def}} \exists t_3 [t_3 \sqsubseteq t_1 \wedge t_3 \sqsubseteq t_2]$$

- Zwei Perioden **überlappen** genau dann, wenn sie eine gemeinsame Teilperiode besitzen.



→ wegen  $\text{REF}(\sqsubseteq)$  und  $D(\circ)$  ist Inklusion ein Spezialfall von Überlappung, denn

$$t_1 \sqsubseteq t_2 \text{ gdw. } t_1 \sqsubseteq t_1 \wedge t_1 \sqsubseteq t_2$$

- Überlappung wird häufig als Basisrelation (für Axiomatisierungen der Mereologie) verwendet.

---

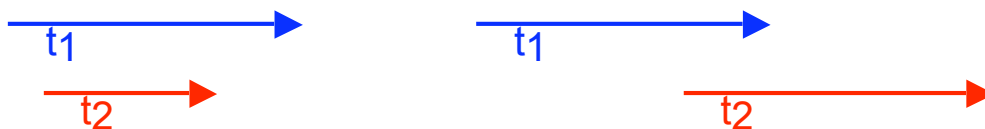
## Interaktion von Präzedenz und Überlappung: Separiertheit

---

### Präzedenz von Perioden: (wir meinen) **vollständige Präzedenz**



Keine Totalität der Präzedenzrelation, auch bei linearer Grundstruktur



### Präzisierung der Präzedenz durch das **Separiertheitsaxiom**

$$[\text{SEP}(\sqsubseteq, <)] \quad \forall t_1 t_2 [t_1 < t_2 \rightarrow \neg (t_1 \circ t_2)]$$

- Verallgemeinerung der Irreflexivität von  $<$ .  
 $\text{SEP}(\sqsubseteq, <), \text{REF}(\sqsubseteq), D(\circ) \models \text{IRREF}(<)$

→ Partielle Präzedenz ist auch verwendbar, das ist aber unüblich.

---

## Interaktion von Präzedenz und Inklusion: Monotonie

---

### Monotonie

$$[\text{MON}(\sqsubseteq, <)] \quad \forall t_1 t_2 t_3 t_4 [t_1 < t_2 \wedge t_3 \sqsubseteq t_1 \wedge t_4 \sqsubseteq t_2 \rightarrow t_3 < t_4]$$

- Präzedenz vererbt sich auf Teilperioden!



- Jeder Monat diesen Jahres liegt nach allen Monaten des vergangenen Jahres.

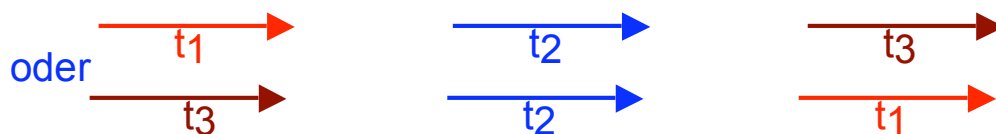
---

## Perioden: Zwischen (betweenness) & Konvexität

---

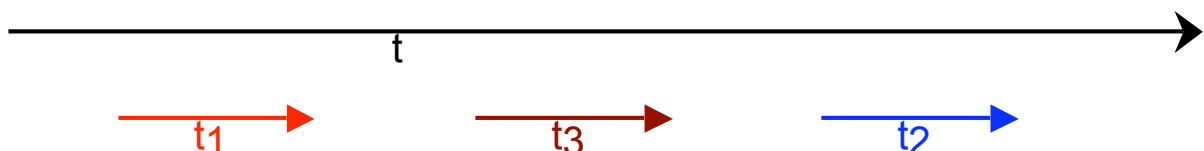
$$[\text{DBTW}(<)] \quad \text{BTW}(t_1, t_2, t_3) \Leftrightarrow_{\text{def}} (t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_3) \vee (t_3 < t_2 \wedge t_2 < t_1)$$

- Eine Zeitperiode liegt **zwischen** zwei anderen



$$[\text{DKVX}(\sqsubseteq, <)] \quad \text{KVX}(t) \Leftrightarrow_{\text{def}} \forall t_1 t_2 t_3 [t_1 \sqsubseteq t \wedge t_2 \sqsubseteq t \wedge \text{BTW}(t_1, t_3, t_2) \rightarrow t_3 \sqsubseteq t]$$

- Eine Zeitperiode ist genau dann **konvex** / zusammenhängend, wenn jede Periode, die zwischen zweien ihrer Teile liegt, auch Teil von ihr ist.



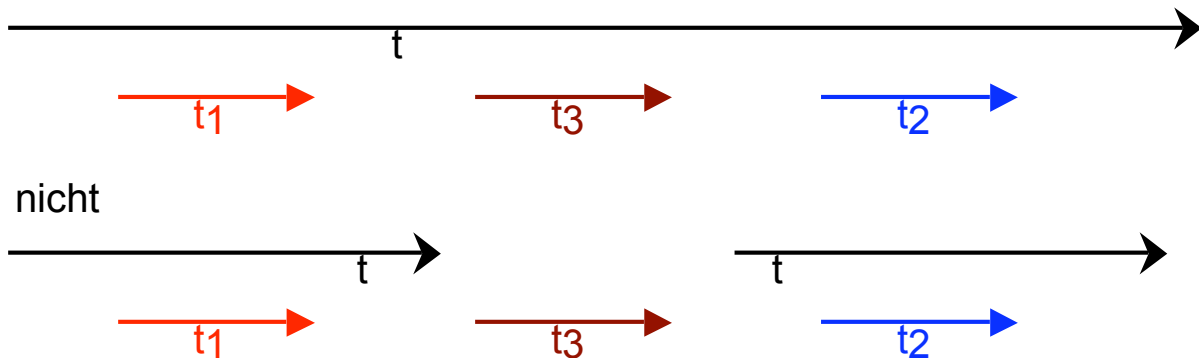
---

## Interaktion von Präzedenz und Inklusion: Konvexität

---

### Axiom: Alle Perioden sind konvex

[CONV( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )]  $\forall t$  [KVX( $t$ )]



- Die Annahme, dass Perioden konvex sind, führt dazu, dass Zeitobjekte wie „im Wintersemester, montags von 12 – 14 h“ nicht zu den Perioden gehören.
- Lineare Ordnungen sind aber auch für nicht konvexe Zeiten definierbar.

---

## Die Struktur der Zeit

---

### Linearität

- Periodenpaare, die nicht durch Präzedenz angeordnet sind, überlappen.

[LIN( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )]  $\forall t_1 t_2 [t_1 < t_2 \vee t_2 < t_1 \vee t_1 \circ t_2]$

Die meisten Ansätze, die mit Periodenstrukturen arbeiten, behandeln nur lineare Zeit.

### Ausnahmen z.B.

- Hajnicz, Elzbieta (1995)
- Kammann, Tobias (1999)

### Bei Periodensystemen für lineare Zeit

- ist Monotonie automatisch gewährleistet

LIN( $\sqsubseteq$ ,  $<$ ), SEP( $\sqsubseteq$ ,  $<$ ), TRANS( $\sqsubseteq$ ), TRANS( $<$ )  $\models$  MON( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )

### Übertragung der Beschränkung aus Punktstrukturen

$$[\text{BOUND\_B}(\prec)] \exists t_B \neg \exists t [t \prec t_B]$$

$$[\text{BOUND\_E}(\prec)] \exists t_E \neg \exists t [t_E \prec t]$$

### Interpretation in Periodenstrukturen

- $t_B$  ist eine Periode, die die gesamte Vergangenheit umfasst
- $t_E$  ist eine Periode, die die gesamte Zukunft umfasst
- es gibt unbeschränkte *Zeitperioden*

### Übertragung der Nachfolge-Optionen aus Punktstrukturen

$$[\text{SUCC\_V}(\prec)] \forall t \exists t_V [t_V \prec t]$$

$$[\text{SUCC\_N}(\prec)] \forall t \exists t_N [t \prec t_N]$$

$$[\text{SUCC}(\prec)] \forall t [\exists t_V [t_V \prec t] \wedge \exists t_N [t \prec t_N]]$$

### Interpretation in Periodenstrukturen

- *Zeitperioden* sind beschränkt
- die Zeitordnung ist unbeschränkt
- *die Vergangenheit* und *die Zukunft* sind keine Zeitperioden

---

## Direkte Nachbarschaft und Lückenlosigkeit

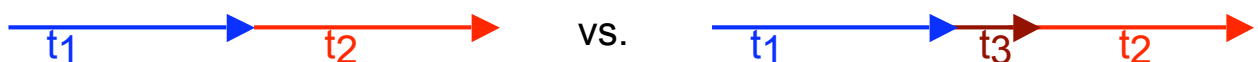
---

### Direkte Nachbarschaft von Perioden

$$[D\prec\circ] \quad t_1 \prec\circ t_2 \Leftrightarrow_{\text{def}} t_1 \prec t_2 \wedge \neg \exists t_3 [t_1 \prec t_3 \wedge t_3 \prec t_2]$$

$$[\text{NEIGH}(\prec)] \quad \forall t_1 t_2 [t_1 \prec t_2] \rightarrow \exists t_3 [t_1 \prec\circ t_3] \wedge \exists t_4 [t_4 \prec\circ t_2]$$

$$[\text{NOGAP}(\prec)] \quad \forall t_1 t_2 [t_1 \prec t_2] \rightarrow t_1 \prec\circ t_2 \vee \exists t_3 [t_1 \prec\circ t_3 \wedge t_3 \prec\circ t_2]$$



- Nachbarschaft drückt in Punktstrukturen Diskretheit aus, in Periodenstrukturen nicht.
- In Periodenstrukturen sollen im Allgemeinen direkte Nachbarn existieren.
- Oft wird auch die Existenz einer Periode, die die Lücke zwischen zwei nicht direkt benachbarten Perioden exakt füllt, angenommen.

---

## Ausdehnung in Periodenstrukturen

---

### Ausgedehnthheit von Perioden / Teilbarkeit

[DAT( $\sqsubseteq$ )]  $AT(t) \leftrightarrow_{\text{def}} \neg \exists t_1 [t_1 \sqsubset t]$

- Eine Periode ist genau dann **atomar**, wenn sie keine echten Teile hat.

[DEXT( $\sqsubseteq, <$ )]  $EXT(t) \leftrightarrow_{\text{def}} \exists t_1 t_2 [t_1 \sqsubseteq t \wedge t_2 \sqsubseteq t \wedge t_1 < t_2]$

- Eine Periode ist genau dann **ausgedehnt**, wenn sie Teile hat, die in der Präzedenz-Relation stehen.

→ Periodenstrukturen ermöglichen ausgedehnte Zeitobjekte und können auch atomare zulassen.

[EXTP( $\sqsubseteq, <$ )]  $\forall t [EXT(t)]$

- Wenn *alle* Perioden ausgedehnt sind, gibt es keine atomaren Perioden.
- EXTP und NEIGH widersprechen sich nicht.

---

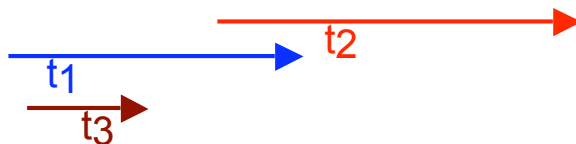
## Teilbarkeit von Perioden: Remainder-Prinzip (1)

---

### Beziehung zwischen Überlappung und Inklusion

[FREE( $\sqsubseteq$ )]  $\forall t_1 t_2 [ \neg(t_1 \sqsubseteq t_2) \rightarrow \exists t_3 [t_3 \sqsubseteq t_1 \wedge \neg(t_3 \circ t_2)] ]$

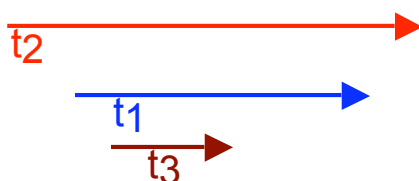
- Wenn  $t_1$  nicht Teil von  $t_2$  ist, dann hat  $t_1$  einen Teil, der  $t_2$  nicht einmal überlappt.



äquivalent zu [FREE( $\sqsubseteq$ )] ist:

$\forall t_1 t_2 [ \forall t_3 [t_3 \sqsubseteq t_1 \rightarrow t_3 \circ t_2] \rightarrow t_1 \sqsubseteq t_2 ]$

- Wenn alle Teile von  $t_1$   $t_2$  überlappen, dann ist  $t_1$  Teil von  $t_2$ .



---

## Teilbarkeit von Perioden: Remainder-Prinzip (2)

---

### In linearen Strukturen

[FREE<sub>LIN</sub>( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )]

$$\forall t_1 t_2 [\neg(t_1 \sqsubseteq t_2) \rightarrow \exists t_3 [t_3 \sqsubseteq t_1 \wedge (t_3 < t_2 \vee t_2 < t_3)]]$$

→ Wenn  $t_1$  nicht Teil von  $t_2$  ist, ragt  $t_1$  an einem Ende über  $t_2$  hinaus.

FREE( $\sqsubseteq$ ), LIN( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )  $\models$  FREE<sub>LIN</sub>( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )

FREE<sub>LIN</sub>( $\sqsubseteq$ ,  $<$ ), SEP( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )  $\models$  FREE( $\sqsubseteq$ )

→ Konvexität der Perioden ist eine Konsequenz von Linearität und Remainder-Prinzip.

TRANS( $<$ ), TRANS( $\sqsubseteq$ ), SEP( $\sqsubseteq$ ,  $<$ ), LIN( $\sqsubseteq$ ,  $<$ ), FREE( $\sqsubseteq$ )  $\models$  CONV( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )

---

## Zusammenstellung (1): Periodenstruktur für lineare Zeit

---

### Teil-von / Inklusion / Mereologie

[D( $\circ$ )]  $t_1 \circ t_2 \leftrightarrow_{\text{def}} \exists t_3 [t_3 \sqsubseteq t_1 \wedge t_3 \sqsubseteq t_2]$

[TRANS( $\sqsubseteq$ )]  $\forall t_1 t_2 t_3 [t_1 \sqsubseteq t_2 \wedge t_2 \sqsubseteq t_3 \rightarrow t_1 \sqsubseteq t_3]$

[REF( $\sqsubseteq$ )]  $\forall t [t \sqsubseteq t]$

[ANTIS( $\sqsubseteq$ )]  $\forall t_1 t_2 [t_1 \sqsubseteq t_2 \wedge t_2 \sqsubseteq t_1 \rightarrow t_1 = t_2]$

[FREE( $\sqsubseteq$ )]  $\forall t_1 t_2 [\neg(t_1 \sqsubseteq t_2) \rightarrow \exists t_3 [t_3 \sqsubseteq t_1 \wedge \neg(t_3 \circ t_2)]]$

### Präzedenz

[TRANS( $<$ )]  $\forall t_1 t_2 t_3 [t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_3 \rightarrow t_1 < t_3]$

### Gemeinsame Axiome: Inklusion und Präzedenz

[SEP( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )]  $\forall t_1 t_2 [t_1 < t_2 \rightarrow \neg(t_1 \circ t_2)]$

[LIN( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )]  $\forall t_1 t_2 [t_1 < t_2 \vee t_2 < t_1 \vee t_1 \circ t_2]$

### Theoreme

[IRREF( $<$ )]  $\forall t [\neg t < t]$       [ASYM( $<$ )]  $\forall t_1 t_2 [t_1 < t_2 \rightarrow \neg(t_1 < t_2)]$

[MON( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )]  $\forall t_1 t_2 t_3 t_4 [t_1 < t_2 \wedge t_3 \sqsubseteq t_1 \wedge t_4 \sqsubseteq t_2 \rightarrow t_3 < t_4]$

[CONV( $\sqsubseteq$ ,  $<$ )]  $\forall t$  [KVX( $t$ )]

---

## Zusammenstellung (2): Weitere Definitionen

---

### Mereologie

$$[D(\sqsubset)] \quad t_1 \sqsubset t_2 \leftrightarrow_{\text{def}} t_1 \sqsubseteq t_2 \wedge \neg(t_2 \sqsubseteq t_1)$$

$$[\text{DAT}(\sqsubseteq)] \quad \text{AT}(t) \leftrightarrow_{\text{def}} \neg \exists t_1 [t_1 \sqsubset t]$$

### Präzedenz

$$[\text{DBTW}(<)] \quad \text{BTW}(t_1, t_2, t_3) \leftrightarrow_{\text{def}} \\ (t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_3) \vee (t_3 < t_2 \wedge t_2 < t_1)$$

$$[D<\diamond] \quad t_1 <\diamond t_2 \leftrightarrow_{\text{def}} t_1 < t_2 \wedge \neg \exists t_3 [t_1 < t_3 \wedge t_3 < t_2]$$

### Gemischt

$$[\text{DEXT}(\sqsubseteq, <)] \quad \text{EXT}(t) \leftrightarrow_{\text{def}} \exists t_1 t_2 [t_1 \sqsubseteq t \wedge t_2 \sqsubseteq t \wedge t_1 < t_2]$$

$$[\text{DKVX}(\sqsubseteq, <)] \quad \text{KVX}(t) \leftrightarrow_{\text{def}} \forall t_1 t_2 t_3 [t_1 \sqsubseteq t \wedge t_2 \sqsubseteq t \wedge \text{BTW}(t_1, t_3, t_2) \\ \rightarrow t_3 \sqsubseteq t]$$

---

## Zusammenstellung (3)

---

### Weitere mögliche Axiome

$$[\text{EXTP}(\sqsubseteq, <)] \quad \forall t [\text{EXT}(t)]$$

$$[\text{AT}(\sqsubseteq)] \quad \forall t \exists t' [\text{AT}(t') \wedge t' \sqsubseteq t]$$

$$[\text{NEIGH}(<)] \quad \forall t_1 t_2 [t_1 < t_2] \rightarrow \exists t_3 [t_1 <\diamond t_3] \wedge \exists t_4 [t_4 <\diamond t_2]$$

$$[\text{NOGAP}(<)] \quad \forall t_1 t_2 [t_1 < t_2] \rightarrow t_1 <\diamond t_2 \vee \exists t_3 [t_1 <\diamond t_3 \wedge t_3 <\diamond t_2]$$

$$[\text{BOUND}_B(<)] \quad \exists t_B \neg \exists t [t < t_B]$$

$$[\text{BOUND}_E(<)] \quad \exists t_E \neg \exists t [t_E < t]$$

$$[\text{SUCC}_V(<)] \quad \forall t \exists t_V [t_V < t]$$

$$[\text{SUCC}_N(<)] \quad \forall t \exists t_N [t < t_N]$$

---

## Beispiele: Intervallstrukturen als Periodenstrukturen (1)

---

### $INT(\mathbb{Z})$ : $\mathbb{Z}$ -Intervall: abgeschlossene Intervalle

$[m_1, m_2] =_{\text{def}} \{ m \in \mathbb{Z} \mid m_1 \leq m \leq m_2 \}$  für  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, m_1 \leq m_2$

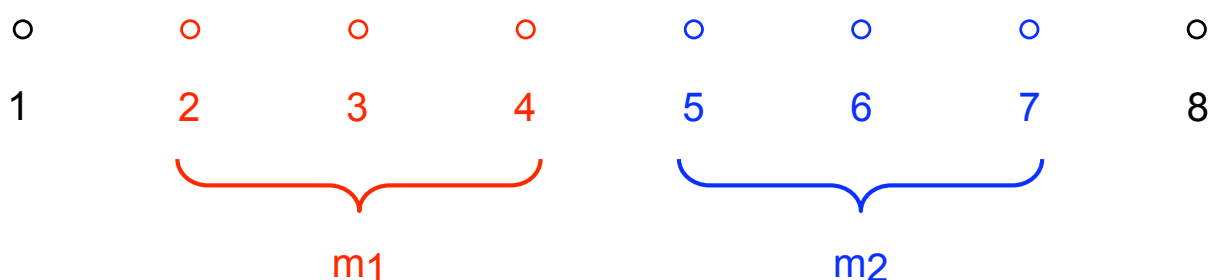
Inklusion: Teilmengenrelation

Präzedenz für Intervalle:  $[m_1, m_2] < [m_3, m_4]$  gdw.  $m_2 < m_3$

Zu  $[m_1, m_2]$  ist  $[1+m_2, m_3]$  ein Nachbarintervall.

$[m, m]$  ist ein 'atomares' Intervall

$[m_1, m_2]$  und  $[m_2, m_4]$  überlappen



---

## Beispiele: Intervallstrukturen als Periodenstrukturen (2)

---

### $INT(\mathbb{Q})$ : $\mathbb{Q}$ -Intervall: offene Intervalle

$(q_1, q_2) =_{\text{def}} \{ q \in \mathbb{Q} \mid q_1 < q < q_2 \}$  für  $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, q_1 < q_2$

Inklusion: Teilmengenrelation

Präzedenz für Intervalle:  $(q_1, q_2) < (q_3, q_4)$  gdw.  $q_2 \leq q_3$

Zu  $(q_1, q_2)$  ist  $(q_2, q_3)$  ein Nachbarintervall.

Es gibt keine atomaren Intervalle.



### Allgemein

Jede Punktstruktur induziert eine Periodenstruktur auf den offenen Intervallen.



Und wie sieht es mit der Gegenrichtung aus?

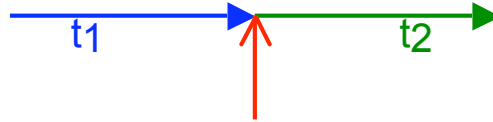
---

## Punktstrukturen aus Periodenstrukturen (1)

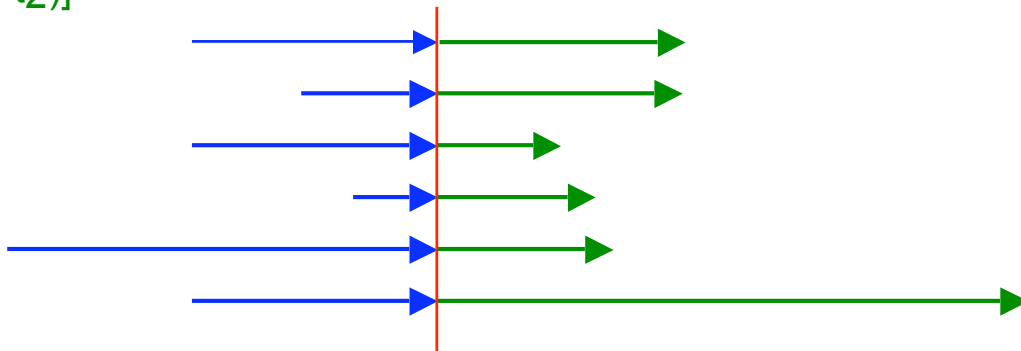
---

### Atomare Perioden: Perioden ohne echte (Perioden-)Teile Endpunkte von Perioden

- Zwei direkt benachbarte Perioden definieren einen Punkt



- Darstellung als Menge (Äquivalenzklasse von) Periodenpaaren  $[(t_1, t_2)]$



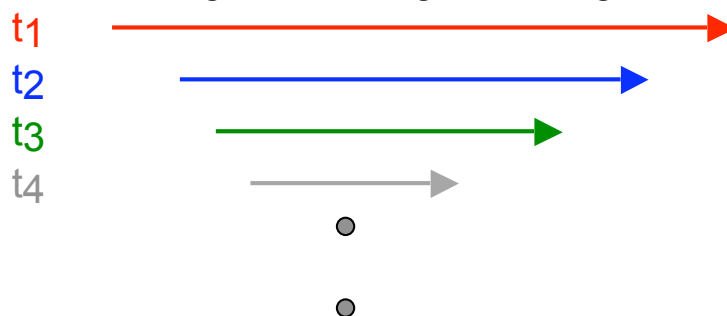
---

## Punktstrukturen aus Periodenstrukturen (2)

---

### Innenpunkte von Perioden

- ‚Periodenschachtelungen‘, Absteigende Folgen von Perioden



- Darstellung als Periodenfolge  $\{ t_i \mid i \in \mathbb{N} \wedge t_{i+1} \sqsubseteq t_i \wedge t_{i+1} \neq t_i \}$

### Motivation

- Alles, was passiert, dauert.
- Zeit verläuft kontinuierlich.
- Es macht keinen Sinn, zu fragen, was zwischen direkt benachbarten Zeiten passiert.

### Die Zeitstruktur

[Allen & Hayes 1985]

- Basiert auf Perioden
- Axiomatische Charakterisierung der linearen Struktur

### Die Sprache besteht aus

- einer Menge von Basisrelationen
  - **exklusiv**: kein Periodenpaar kann zueinander in zwei Basisrelationen stehen
  - **exhaustiv**: jede Konstellation von zwei Perioden ist durch eine Basisrelation beschreibbar
- und Disjunktionen von Basisrelationen

**Verarbeitung** erfolgt durch Constraint-Propagation [Allen 1983]

---

## Basisrelationen für Perioden (1)

---

### Dreizehn einander wechselseitig ausschließende Relationen zwischen Zeitperioden

Symmetrisch

**equal**( $t_1, t_2$ ):  $t_1$  und  $t_2$  sind dieselbe Periode

Asymmetrisch

**before**( $t_1, t_2$ ):  $t_1$  ist vor  $t_2$  und es ist noch was dazwischen.

**meets**( $t_1, t_2$ ):  $t_1$  ist vor  $t_2$  und es gibt keine Periode zwischen  $t_1$  und  $t_2$ , d.h.  $t_1$  endet, wenn  $t_2$  beginnt

**overlaps**( $t_1, t_2$ ):  $t_1$  beginnt vor  $t_2$  und endet nach dem Anfang von  $t_2$

**during**( $t_1, t_2$ ):  $t_1$  ist vollständig in  $t_2$  enthalten

**starts**( $t_1, t_2$ ):  $t_1$  hat denselben Anfang wie  $t_2$ , endet aber vor dem Ende von  $t_2$

**finishes**( $t_1, t_2$ ):  $t_1$  hat dasselbe Ende wie  $t_2$ , beginnt aber nach dem Anfang von  $t_2$

und deren inverse Relationen

## Basisrelationen für Perioden (2)



before  
overlaps

ist ein Spezialfall der Präzedenz  $<$   
ist ein Spezialfall der Überlappung  $\circ$

In Punktstrukturen bilden  $=$ ,  $<$  und  $>$  einen Satz von Basisrelationen.

## Dreizehn Basisrelationen für Perioden in linearen Strukturen

Relation	Symbol	inverse Relation	Symbol für IR	Beispiel
X equal Y	=	Y equal X	=	XXX YYY
X before Y	<	Y after X	>	XXX    YYY
X meets Y	m ( $<\diamond$ )	Y met-by X	mi	XXXYYY
X overlaps Y	o	Y overlaped-by X	oi	XXX YYYY
X starts Y	s	Y started-by X	si	XXX YYYYYY
X during Y	d	Y contains X	di	XXX YYYYYYY
X finishes Y	f	Y finished-by X	fi	XXX YYYYYY

---

## Allens Zeitkalkül: Axiomatik (1)

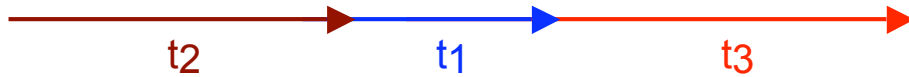
---

### Primitive Relation meets: asymmetrisch

$$[A1] \forall t_1 t_2 [\text{meets}(t_1, t_2) \rightarrow \neg \text{meets}(t_2, t_1)]$$

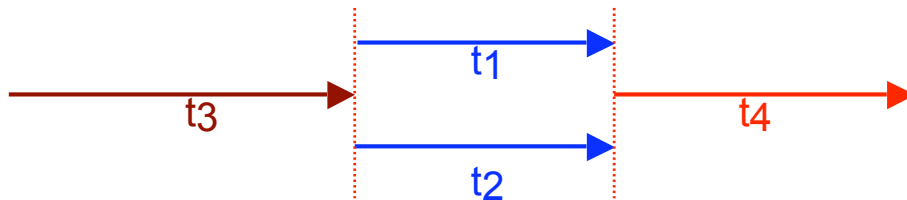
### Perioden sind beidseitig beschränkt

$$[A2] \forall t_1 \exists t_2 \exists t_3 [\text{meets}(t_2, t_1) \wedge \text{meets}(t_1, t_3)]$$



### Perioden sind eindeutig durch sie treffende Perioden bestimmt. ( $\rightarrow$ Extensionalität)

$$[A3] \forall t_1 t_2 [\exists t_3 t_4 [\text{meets}(t_3, t_1) \wedge \text{meets}(t_3, t_2) \wedge \text{meets}(t_1, t_4) \wedge \text{meets}(t_2, t_4)] \rightarrow t_1 = t_2]$$



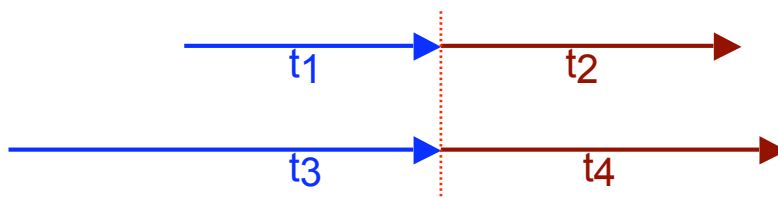
---

## Allens Zeitkalkül: Axiomatik (2)

---

### Perioden definieren Äquivalenzklassen von Perioden, die sie treffen

$$[A4] \forall t_1 t_2 t_3 t_4 [\text{meets}(t_1, t_2) \wedge \text{meets}(t_1, t_4) \wedge \text{meets}(t_3, t_2) \rightarrow \text{meets}(t_3, t_4)]$$



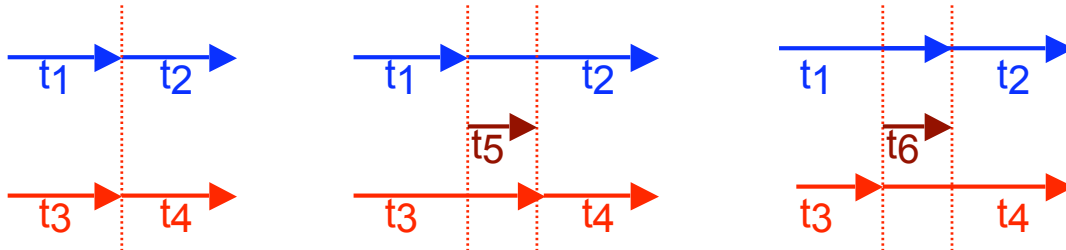
---

## Allens Zeitkalkül: Axiomatik (3)

---

### Linearität: Drei Konstellationen von sich treffenden Periodenpaaren

[A5]  $\forall t_1 t_2 t_3 t_4 [\text{meets}(t_1, t_2) \wedge \text{meets}(t_3, t_4) \rightarrow$   
     $(\text{meets}(t_1, t_4) \vee$   
     $\exists t_5 [\text{meets}(t_1, t_5) \wedge \text{meets}(t_5, t_4)] \vee$   
     $\exists t_6 [\text{meets}(t_3, t_6) \wedge \text{meets}(t_6, t_2)])]$



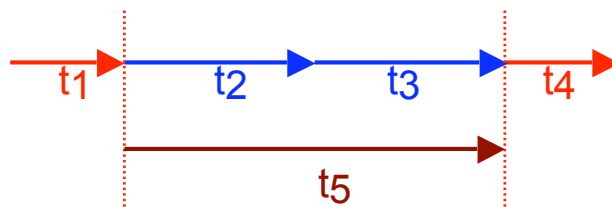
---

## Allens Zeitkalkül: Axiomatik (4)

---

### Beliebige Summierbarkeit von Perioden

[A6]  $\forall t_2 t_3 [\text{meets}(t_2, t_3) \rightarrow$   
     $\exists t_5 [\forall t_1 t_4 [(\text{meets}(t_1, t_2) \wedge \text{meets}(t_3, t_4)) \leftrightarrow$   
     $(\text{meets}(t_1, t_5) \wedge \text{meets}(t_5, t_4))]]]$



**Dagegen ist Zerlegbarkeit von Perioden *nicht* allgemein garantiert**

---

## Definition der Basisrelationen durch meets

---

### Alle Relationen lassen sich mit Hilfe von meets definieren

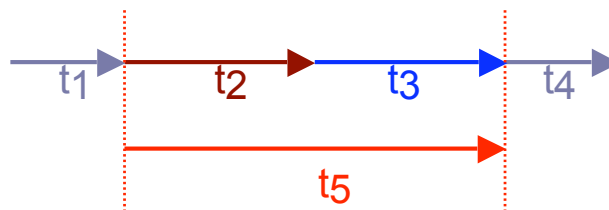
$\text{before}(t_1, t_2) \leftrightarrow_{\text{def}} \exists t_3 [\text{meets}(t_1, t_3) \wedge \text{meets}(t_3, t_2)]$



$\text{starts}(t_2, t_5) \leftrightarrow_{\text{def}}$

$\forall t_1 [\text{meets}(t_1, t_2) \leftrightarrow \text{meets}(t_1, t_5)] \wedge$

$\exists t_3 [\text{meets}(t_2, t_3) \wedge \forall t_4 [\text{meets}(t_3, t_4) \leftrightarrow \text{meets}(t_5, t_4)]]$



- Der Rest zur Übung.
- Die Definierbarkeit in dieser Form hängt von der Vollständigkeit der Periodenstruktur ab.

---

## Zusammenfassung

---

### Periodenstrukturen

- Ausgedehnter Zeiten als Basisentitäten
- Interaktion von Teil-von-Struktur und temporaler Ordnung
- Beschränkung auf lineare Strukturen und konvexe Zeitobjekte
- Kein Widerspruch zwischen direkter Nachbarschaft und dichter Struktur
- Punkt als ‚kleinste‘ Perioden oder über Abstraktion (Mengenbildung)
- 'Allens' Relationensystem
  - Axiomatische Charakterisierung der Struktur basierend auf der Relation **meets**
  - 13 exklusive und exhaustive Basisrelationen

### Nächste Sitzung

- weitere Relationen als Disjunktionen der Basisrelationen
- Spezifikation der Informationskombinatorik durch Kompositionstabellen für die Basisrelationen.
- Constraint-Verfahren zum Schließen über Perioden

---

## Literatur

---

- Allen, James F. (1983): „Maintaining knowledge about temporal intervals“. *Communications of the ACM* 26. 832–843.
- Allen, James F. & Patrick J. Hayes (1985): „A common-sense theory of time“. In: *Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)* 1. Los Angeles. 528–531.
- Hajnicz, Elzbieta (1995). Some considerations on non-linear time intervals. *Journal of Logic, Language, and Information* 4. 335–357.
- Kammann, Tobias (1999). *Qualitative Relationen für Intervalle in verzweigten gerichteten Strukturen*. Diplomarbeit. Universität Hamburg: Hamburg. available via [www.informatik.uni-hamburg.de/WSV/Axiomatik-english.html](http://www.informatik.uni-hamburg.de/WSV/Axiomatik-english.html)
- Simons, Peter (1987): *Parts. A Study in Ontology*. Oxford: Clarendon Press.
- van Benthem, Johan F.A.K. (1983): *The Logic of Time. A Model-Theoretic Investigation into the Varieties of Temporal Ontology and Temporal Discourse*. Dordrecht: Kluwer. (second edition 1991.)