Grundlagen der Verarbeitung von Wissen über Raum, Zeit und Ereignisse

8. Sitzung

Strukturaspekte des Raums

Gliederung

- Raumstruktur und Raumrepräsentation
- Geometrische Struktur (Euklid, Hilbert)
- Topologie (Punkt-Mengen-Topologie)

Motivation und Anwendungen der Raummodellierung

Räumliches Wissen für

- Räumlich organisierte Informationssysteme
  - GIS, Karten, Atlanten
- Kommunikation über räumliche Strukturen (formale / natürliche Sprachen)
- Analyse, Interpretation
  - Bildverstehen / Vision
  - naive Physik / Mechanik / Kinematik
- Robotik
  - (räumliche) Handlung, Manipulation
  - Fortbewegung im Raum, Wegverfolgung, Hindernisvermeidung
  - Exploration
- Planung
  - räumliche Konfiguration, Layout
  - Wege
- Wissensverarbeitung
  - diagrammatisches Schließen

Zwei Sichten auf Raum und ‚Inhalt'

Objekt-Sicht

- Raum ist ein Container für (physische / materielle) Objekte
- Objekten kann ihre Position im Raum zugeordnet werden (z.B. Koordinaten bezogen auf ein Koordinatensystem)
  - Diskrete, gestalthafte Phänomene z.B. Seen, Straßen, Städte
- Darstellung in Vektor-Datenstruktur

Feld-Sicht

- Raumpunkte als Träger räumlicher Eigenschaften
- Eine räumliche Eigenschaft ist eine Abbildung von Raumpunkten auf eine Attributsmengen
  - kontinuierliche, gestaltlose Phänomene z.B. Niederschlagsmenge, Oberflächenbeschaffenheit
  - vergleichbar mit zeitlichen ‚Fluents'
- Darstellung in Raster-Strukturen (*grid*), ggf. durch Konturlinien

➔ Für beide Sichten ist die zugrunde liegende Raum-Struktur zu klären

Zwei grundsätzliche Ansätze zur Raumrepräsentation

Propositional

- Modellierung von Raumkonzepten
- Nutzung von Funktor-Argument-Struktur
- Gleichstellung von Raum-Entitäten mit anderen Individuen (➔ Ontologie)

Depiktional

- Analoge Repräsentation: Repräsentation und Repräsentiertes weisen (wesentliche, nützliche) Strukturübereinstimmungen auf.
- Repräsentation von Raum und Objekten in Zellmatrizen

Hybride Ansätze

- Integration von propositionalen und depiktionalen Anteilen

➔ Systemarchitektur

! In dieser Vorlesung: Konzentration auf die propositionalen Ansätze und Raumkonzepte.

Von ein- zu mehrdimensionalen Räumen

Gemeinsamkeiten zwischen Zeit und Raum

- dienen zur Positionierung von Situationen bzw. materiellen Objekten
- Unterscheidbarkeit von Punkten und ausgedehnten Entitäten
- mereologische Struktur (Enthaltensein, Überlappung)
- topologische Struktur (Rand, Berührung, Zusammenhang)
- Ordnungsstruktur (zwischen, Konvexität)
- metrische Struktur (*Länge, Distanz*)

Unterschiede zwischen Zeit und Raum

- Zeit ist inhärent orientiert, im Raum ist freie Bewegung möglich
- Situationen besetzen Zeit nicht so wie materielle Objekte es tun.
- keine räumliche Entsprechung zur linearen vs. verzweigenden Zeit
- Dimensionalität
  - teilweise wird „räumlich" nur für 3D-Strukturen verwendet (➔ Bildverarbeitung)
  - teilweise wird „räumlich" sogar für gekrümmte lineare Strukturen verwendet.

Mathematische Modelle der Raumstruktur (I): Euklid

Klassische Sicht: Euklids Elemente (3. Jhd. v. Chr.)

- Geometrie als Theorie der räumlichen Umwelt des Menschen, des (dreidimensionalen) physikalischen Raumes
- Die Postulate der Geometrie stellen die Gegebenheiten der Natur in einer mathematisch präzisen Formulierung dar.
- Axiome/Postulate als anschauliche Grundwahrheiten über den physikalischen Raum

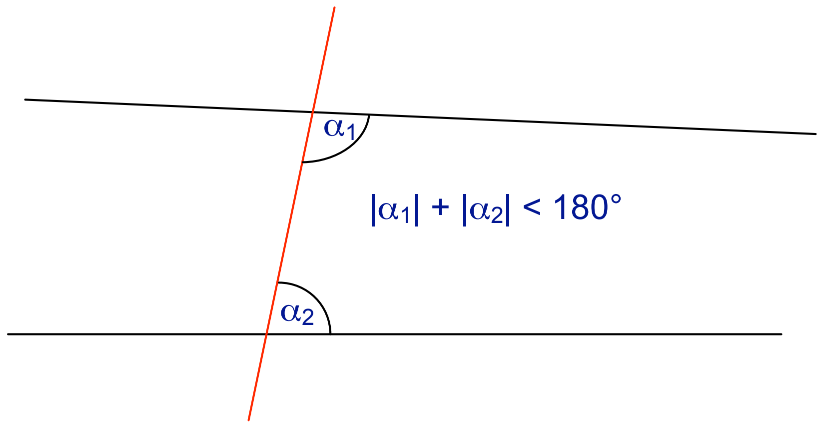
➔ Axiome/Postulate der Geometrie zu formulieren, ist die Aufgabe, die Essenz des realen Raumes in einer exakten (mathematischen) Sprache zu beschreiben.

➔ Nur eine wahre Geometrie ist möglich.

➔ Muss das (unanschauliche) Parallelenpostulat durch Anschaulicheres ersetzt werden?

Das Parallelenpostulat

- Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass die auf einer Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann treffen sich die beiden geraden Linien bei beliebiger Verlängerung auf dieser Seite.



- Unabhängigkeit von den anderen Postulaten?
- Einfachere, „einsichtigere“ Formulierung möglich?

Nicht-euklidische Geometrien

- zuerst durch Bolyai und Lobachevskii seit Mitte des 19. Jhds. im Rahmen der Diskussion de Parallelenpostulats
- Voraussetzung dafür, die Beziehung zwischen Geometrie und Realität in einem neuen Licht zu sehen.

➔ Die euklidische Geometrie ist nur *eine* Denkmöglichkeit neben anderen. Somit kann auch nicht mehr von *der* Geometrie als *der* Disziplin der mathematischen Beschreibung *des* Raumes ausgegangen werden.

➔ Ablösung der euklidischen Geometrie durch ein System von Geometrien

Nicht-euklidische Geometrien (2)

allgemeiner als die Euklidische Geometrie

- Ordnungsgeometrie
- affine Geometrie
- projektive Geometrie
- Topologie
- Metrische Räume

Alternativen zur euklidischen Geometrie

- elliptische Geometrien
- hyperbolische Geometrie

Anwendungsdomänen nicht-euklidischer Geometrien:

- Physik
- Psychologie: „Ist der visuelle Raum euklidisch?“

Mathematische Modelle der Raumstruktur (II)

Moderne Sicht: Verschiedene Arten der räumlichen Strukturierung

- sind getrennt formalisierbar und untersuchbar.
- finden sich in anderen Bereichen wieder
- können auch als alternative Modelle unserer Raumauffassung verstanden werden
- entsprechen unterschiedlichen Abstraktionsgraden vom ‚realen‘ Raum
  - Topologie
  - metrische Räume
  - Ordnungsgeometrie
  - absolute Geometrie
  - Euklidische Geometrie
  - nicht-euklidische Geometrie

Mathematische Auffassung der Raumstruktur

Mathematik fokussiert auf die Struktur der Modelle

- Welche Strukturannahmen für die Modelle haben welche Konsequenzen?
- Welche Strukturannahmen sind stärker, schwächer oder unabhängig?
- Welches sind die schwächsten Strukturannahmen mit gewissen Konsequenzen?

➔ Modelle sind immer Mengen (von Mengen von …) oder durch solche repräsentierbar

Informatische Auffassung der Raumstruktur

Informatik / KI fokussiert auf die Repräsentationssprache

- Welches sind die primitiven / komplexen Ausdrücke der Sprache?
- Was sollen die Ausdrücke bedeuten? Unter welchen Bedingungen ist ein Ausdruck wahr? (Wie kann ich das feststellen?)
- Welches ist die einfachste Sprache, mit der ich eine Aussage machen kann?
- Welche Bedeutungsrelationen bestehen?
- Wie kann ich aus wahren Aussagen weitere wahre Aussagen (systematisch) ableiten?
- In welcher Sprache kann ich die Ableitungen einfach vollziehen?

➔ In der Informatik / KI wird der Raum oft als isomorph zu dem $\mathbb{R}^3$ (bzw. $\mathbb{R}^2$) aufgefasst, die Repräsentationssprache darüber jedoch beschränkt.

➔ Beschränkung im Ausdrucksinventar haben in Mathematik und Informatik unterschiedliche Gründe.

Aufbau der euklidischen Geometrie

➔ Deutsche Übersetzung von C. Thaer
Englische Übersetzung von Th.L. Heath bei Dover

Definitionen: Entitäten und Konzepte

- Punkte, Linien (Strecken (*line segment*), Bögen), Winkel, Flächen (Kreise, Dreiecke)
- gerade, eben, geradlinig, recht, stumpf, spitz, dreiseitig, gleichseitig, parallel
- Grenze, Mittelpunkt, Durchmesser

Axiome: Allgemeine Grundannahmen zu (Größen-)Gleichheit

- unabhängig vom Raum / von der Geometrie

Postulate: Geometrische Struktur

➔ In der aktuellen Diskussion wird nicht in dieser Form zwischen Axiomen und Postulaten unterschieden

Euclid's Geometry: Postulates

Let the following be postulated:

1. To draw a straight line from any point to any point.
2. To produce a finite straight line continuously in a straight line.
3. To describe a circle with any center and radius.
4. That all right angles equal one another.
5. That, if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.

➔ No coordinates, no origin
➔ no infinite / unbounded entities (straight lines, planes)

Hilberts Grundlagen der Geometrie (1902)

Drei Systeme von Dingen

- Punkte (Elemente der linearen, ebenen und räumlichen Geometrie)
- Geraden (Elemente der ebenen und räumlichen Geometrie)
- Ebenen (Elemente der räumlichen Geometrie (des Raumes !))

Fünf Gruppen von Axiomen

- Verknüpfung (Inzidenz, Teil-von)
- Anordnung (*zwischen* → Huntington 1924, 1938; Geradheit)
- Kongruenz (Äquidistanz und Winkelgleichheit)
- Parallelität (Existenz & Eindeutigkeit)
- Stetigkeit (*continuity*) (Archimedisches Axiom → Messung mit Zahlen; Vollständigkeit)

➔ innerhalb dieser Gruppen kann weiter zwischen linearen, ebenen und räumlichen Axiomen unterschieden werden.

➔ Keine Koordinaten, kein Ursprung

➔ weitere Entitäten auf der Basis von Punkten (Strecke (*line segment*), Strahl (*ray*))

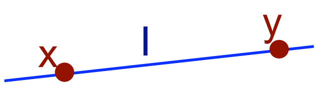
Hilbert: Axiome der Inzidenz

Auf jeder Geraden liegen (mindestens) zwei Punkte.

(I1) $\forall l\ \exists x\ \exists y\ [x \neq y \wedge x\ \iota\ l \wedge y\ \iota\ l]$

Durch jedes Punktpaar geht (mindestens) eine Gerade.

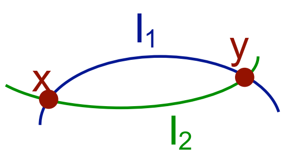
(I2) $\forall x\ \forall y\ \exists l\ [x\ \iota\ l \wedge y\ \iota\ l]$



Zwei (verschiedene) Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam und zwei (verschiedene) Punkte haben höchstens eine Gerade gemeinsam.

(I3) $\forall x\ \forall y\ \forall l_1\ \forall l_2$
$[x\ \iota\ l_1 \wedge y\ \iota\ l_1 \wedge x\ \iota\ l_2 \wedge y\ \iota\ l_2 \rightarrow (x = y \vee l_1 = l_2)]$

nicht:



Hilbert: Axiome der Inzidenz (Forts.)

Ebene Geometrie: Zu jeder Geraden gibt es einen Punkt, der nicht auf ihr liegt.

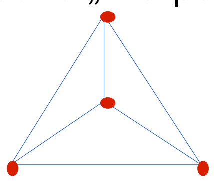
(I4) $\forall l\ \exists x \quad [\neg(x\ \iota\ l)]$

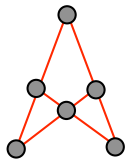
Drei (verschiedene) Punkte, die auf einer Geraden liegen, heißen kollinear.

$$\mathrm{col}(x, y, z) \leftrightarrow_{def} \quad x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \exists l\ [x\ \iota\ l \wedge y\ \iota\ l \wedge z\ \iota\ l]$$

! Diese Axiome sagen nichts über die Natur von Geraden oder Punkten aus.

Kleinsche „Vierpunkte-Geometrie“ (4 P und 6 G oder 4 G und 6 P?)





Hilbert: Axiome der Anordnung

Liegt ein Punkt zwischen Zweien, dann sind die drei Punkte kollinear.

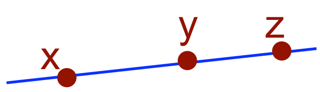
(β1) $\forall x\ \forall y\ \forall z \quad [\beta(x, y, z) \rightarrow \mathrm{col}(x, y, z)]$

Von drei kollinearen Punkten liegt einer zwischen den anderen beiden.

(β2) $\forall x\ \forall y\ \forall z \quad [\mathrm{col}(x, y, z) \rightarrow (\beta(x, y, z) \vee \beta(y, x, z) \vee \beta(x, z, y))]$

Zwischen ist symmetrisch bezüglich der ersten und dritten Argumentstelle.

(β3) $\forall x\ \forall y\ \forall z \quad [\beta(x, y, z) \rightarrow \beta(z, y, x)]$



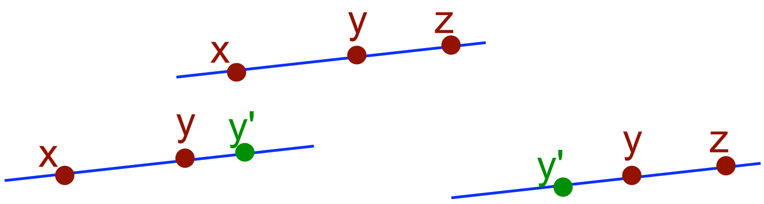
Hilbert: Axiome der Anordnung (Forts.)

Zwischen ist asymmetrisch bezüglich der ersten und zweiten Argumentstelle.

(β4) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \ [\beta(x, y, z) \rightarrow \neg\beta(y, x, z)]$

Liegt ein Punkt zwischen Zweien und ein weiterer liegt auf derselben Geraden, dann liegt dieser auf einer der beiden Seiten des ersten Punktes.

(β5) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall y'\ [\beta(x, y, z) \wedge \mathrm{col}(y, y', x) \rightarrow$
$(\beta(x, y, y') \vee \beta(y', y, z))]$



y teilt die Gerade in zwei 'Hälften'

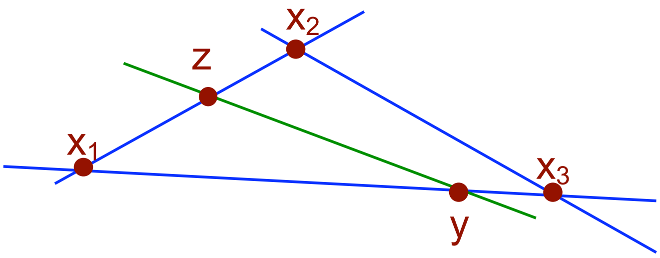
Hilbert: Axiome der Anordnung (2. Forts.)

Unbeschränktheit: Jenseits eines Punktes liegt immer ein weiterer Punkt.

(β6) $\forall x\ \forall y\ \ [x \neq y \rightarrow \exists z\ [\beta(x, y, z)]]$

Ebene Geometrie: Eine Gerade, die eine Seite eines Dreiecks schneidet und den dritten Eckpunkt nicht enthält, schneidet eine weitere Seite des Dreiecks.

(β7) $\forall x_1\ \forall x_2\ \forall x_3\ \forall l\ [\neg(x_1\ \iota\ l) \wedge \neg(x_2\ \iota\ l) \wedge \neg(x_3\ \iota\ l) \wedge$
$\exists y\ [y\ \iota\ l \wedge \beta(x_1, y, x_3)] \rightarrow \exists z\ [z\ \iota\ l \wedge (\beta(x_1, z, x_2)$
$\vee\ \beta(x_2, z, x_3))]]$



Anordnungsgeometrie und Geraden

Geraden

- sind in bezug auf die durch „zwischen“ definierte Ordnung unverzweigt und linear
- entsprechen maximalen Mengen von Punkten, von denen je drei irgendwie durch „zwischen“ geordnet werden

➔ damit rechtfertigt „zwischen“ die Benennung „Gerade“

„Dimension“ und Ordnung

➔ Lineare Ordnungsstrukturen liegen vor, wenn je drei Punkte irgendwie durch „zwischen“ geordnet werden

➔ Planare oder räumliche Ordnungsstrukturen liegen vor, wenn mindestens drei Punkte nicht durch „zwischen“ geordnet werden

Überblick über den weiteren Verlauf der Vorlesung

Topologie in Mathematik und KI

- Punktmengentopologie durch Umgebungen und offene Mengen
  - Definition topologischer Räume
  - topologische Typen von Mengen und Punkten
- Topologische KI-Kalküle, insbesondere RCC
- Inferenzen und Ausdrucksmöglichkeiten
- Digitale Topologie

Anordnung und Richtung im Raum

- Anordnung und Referenzrahmen
- Anordnungsinformation zur Selbstlokation

Raumpartitionierung

- Qualitative Raum-Kalküle
- Quadtree-Repräsentationen
- Voronoï-Zerlegungen

Literatur

Euklid (1973): *Die Elemente*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft. (Übersetzung von Clemens Thaer (1933–37))

Hilbert, David (1902): *Grundlagen der Geometrie*. (achte Auflage (1956), mit Revisionen und Ergänzungen von Paul Bernays. Stuttgart: Teubner.)

Huntington, Edward V. (1924): „A new set of postulates for betweenness, with proof of complete independence“. *Transactions of the American Mathematical Society 26*. 257–282.

Huntington, Edward V. (1938): „Inter-relations among the four principal types of order“. *Trans. Amer. Math. Soc. 38*. 1–9.