Grundlagen der Verarbeitung von Wissen über Raum, Zeit und Ereignisse

10. Sitzung

Digitale Topologie

Gliederung

- Aufgabenstellung der digitalen Topologie
- Topologie als Nachbarschaftsstruktur
- Zusammenhang und Zusammenhangsparadoxien
- Lösung der Paradoxien
- Ränder und Inneres

Räumliche Repräsentationsformate

Räumliche Repräsentationsmedien

- weisen eine inhärent räumliche Struktur auf
- Repräsentation eines Objektes / Sachverhaltes
  - ist an diese Struktur gebunden
  - wird von der Struktur unterstützt
- analoge Repräsentation von Raum
  - Repräsentation und Repräsentiertes weisen (wesentliche, nützliche) Strukturübereinstimmungen auf.
- Allgemein: Diagrammatische Repräsentation

Digitale / Diskrete Repräsentationsmedien

- vorgegebene Auflösung / Granularität
- Endliche Repräsentation
- Repräsentation von Raum und Objekten in Zellmatrizen
  - scharfe Zellzuordnungen
  - graduelle (‚Fuzzy‘) Zuordnungen (in dieser Sitzung nicht behandelt)

➔ digitale Topologie, digitale Geometrie

Digitale Topologie

Digital pictures are rectangular arrays of nonnegative numbers. The analysis of a digital picture usually involves

- „segmenting“ it into parts and measuring various properties of and relations among the parts.

In particular, one often wants

- to separate out the connected components of a picture subset
- to determine the adjacency relationships among those components,
- to track and encode their borders, or
- to „thin“ them down to „skeletons“ that have no interiors,
- without changing their connectedness properties.

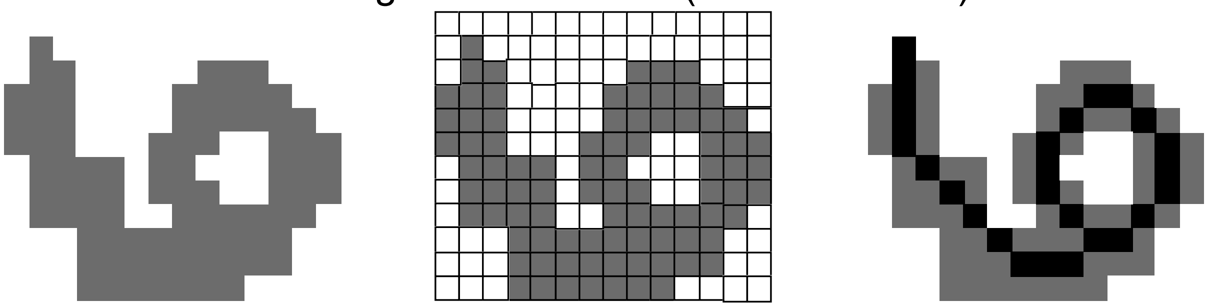
There are standard algorithms for doing all these tasks; but to prove that they work, one needs to establish some basic topological properties of digital picture subsets.

[Azriel Rosenfeld 1979]

Skelettierungsaufgabe

Reduktion eines gegebenen Bildes

- so dass die wesentlichen Eigenschaften erhalten bleiben und
- die Mustererkennung erleichtert wird (→ Normalform)



➔ Welches sind die wesentlichen Eigenschaften?

➔ Wie stellt man fest, ob der Algorithmus die wesentlichen Eigenschaften erhält?

➔ Welche Schritte können parallel ausgeführt werden, ohne dass die wesentlichen Eigenschaften verletzt werden?

Digitale Topologie

Aufgabe

- Repräsentation von 2- oder 3-dimensionalen *Bildern* (Resultat der Wahrnehmung)
- Repräsentation von 2- oder 3-dimensionalen *räumlichen Konstellationen* (Wissensverarbeitung)
- Transformationen unter Erhalt wesentlicher Eigenschaften
- Basis für den Beweis der Korrektheit der Transformationen

Format: Diskrete Repräsentation

- 2- oder 3-dimensionale arrays (natürlicher Zahlen) ($\mathbb{Z}^2$ oder $\mathbb{Z}^3$)

➔ Ausklammern von beschränkten Strukturen, um Sonderfälle am Bildrand zu umgehen.

- *pixel* bzw. *voxel* als Bezeichnung für Elemente der topologischen Strukturen.

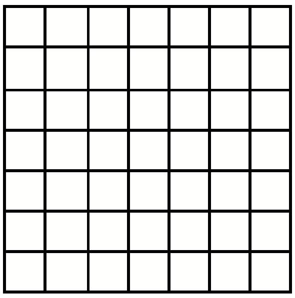
Problem

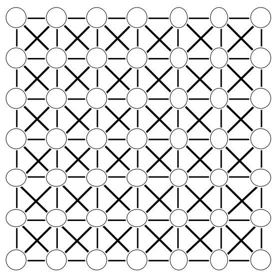
- adäquate Übertragung topologischer Konzepte auf diskrete Strukturen, wie etwa $\mathbb{Z}^2$ oder $\mathbb{Z}^3$

➔ Zusammenhang

Zwei Sichtweisen / Visualisierungen

- Matrizen (*array*) über $\mathbb{Z}$
  - Zellen symbolisieren Pixel
  - Linien symbolisieren Grenzen zwischen Pixeln
- Graphen / Gitter (*grid*) / Verbände (*lattice*), deren Knoten Koordinaten aus $\mathbb{Z}$ aufweisen.
  - Kreise symbolisieren Pixel
  - Linien symbolisieren Nachbarschaften zwischen Pixeln

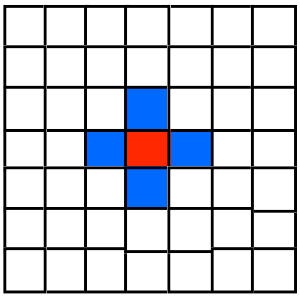


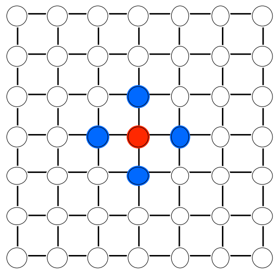


4-Nachbarschaft in der Ebene

Definition: 4-Nachbarschaft (adjacency)

- Zwei Punkte p_1 und p_2 der Ebene $\mathbb{Z}^2$ sind *4-benachbart (4-adjecent)*, falls sich genau eine Koordinate von p_1 von der korrespondierenden Koordinate von p_2 um 1 unterscheidet.



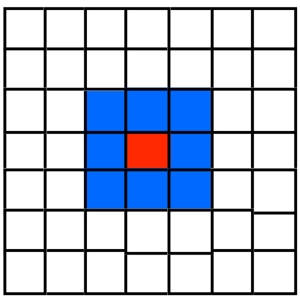


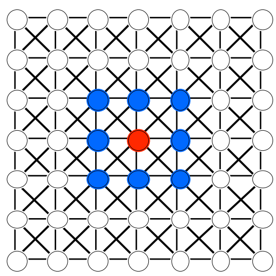
4-Nachbarn

8-Nachbarschaft in der Ebene

Definition: 8-Nachbarschaft

- Zwei Punkte p_1 und p_2 der Ebene $\mathbb{Z}^2$ sind *8-benachbart (8-adjacent)*, falls sie verschieden sind und sich jede Koordinate von p_1 von der korrespondierenden Koordinate von p_2 höchstens um 1 unterscheidet.





8-Nachbarn

  - für $p_1 = (x_1, y_1) \neq p_2 = (x_2, y_2)$:
    $x_1 \in \{x_2 - 1, x_2, x_2 + 1\}$, $y_1 \in \{y_2 - 1, y_2, y_2 + 1\}$

Nachbarschaften in $\mathbb{Z}^3$

Definition: 26-Nachbarschaft

- Zwei Punkte p_1 und p_2 des Raumes $\mathbb{Z}^3$ sind *26-benachbart*, falls sie verschieden sind und sich jede Koordinate von p_1 von der korrespondierenden Koordinate von p_2 höchstens um 1 unterscheidet.

Definition: 18-Nachbarschaft

- Zwei Punkte p_1 und p_2 der Ebene $\mathbb{Z}^3$ sind *18-benachbart*, falls sie 26-benachbart sind und sich höchstens zwei Koordinaten von p_1 von den korrespondierenden Koordinaten von p_2 unterscheiden.

Definition: 6-Nachbarschaft

- Zwei Punkte p_1 und p_2 der Ebene $\mathbb{Z}^3$ sind *6-benachbart*, falls sie 26-benachbart sind und sich höchstens eine Koordinate von p_1 von der korrespondierenden Koordinate von p_2 unterscheidet.

Pfade in $\mathbb{Z}^2$

Definition: Pfad

- Ein *Pfad* ist eine Folge $p_0, p_1, \ldots, p_n$ von Punkten ($0 \leq n$), wobei jeweils p_i und p_{i-1} ($1 \leq i \leq n$) benachbart sind.

➔ Pfade sind gerichtet und können geschlossen sein und innere Zyklen haben.

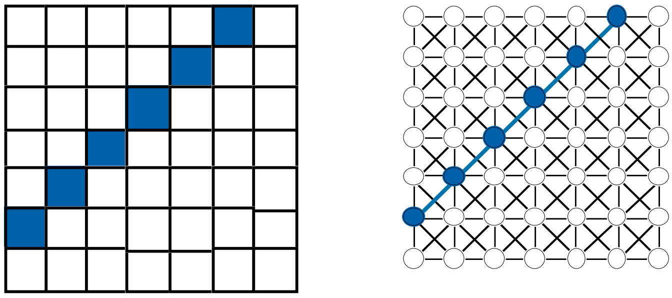
Definition: Kurve und Bogen (*arc*)

- Eine *einfache geschlossene Kurve* ist eine zusammenhängende Menge von Punkten, von denen jeder mit genau zwei anderen Punkten der Menge benachbart ist.
- Ein *einfacher Bogen* ist eine zusammenhängende Menge von Punkten, von denen jeder bis auf zwei – die *Endpunkte* des Bogens – mit genau zwei anderen Punkten der Menge benachbart ist.

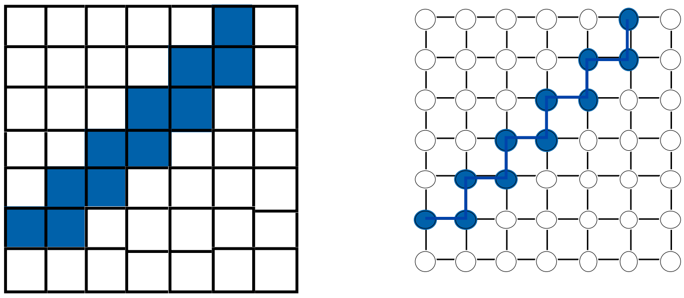
➔ Kurven und Bögen sind ungerichtet und ohne Verzweigungen.

➔ Bei Auszeichnung von Anfangspunkt und Richtung werden Kurven und Bögen zu Pfaden.

Digitale Pfade / Bögen



8-Pfad/8-Bogen



4-Pfad/4-Bogen

(4–er- / 8–er-) Zusammenhang in $\mathbb{Z}^2$

Definition: Pfadverbunden (*path connected*)

- Zwei Punkte P und Q der Ebene $\mathbb{Z}^2$ sind *durch einen Pfad verbunden*, falls es einen Pfad $p_0, p_1, \ldots, p_n$ gibt, mit $P = p_0$ und $Q = p_n$.

Definition: Pfadverbunden in einer Teilmenge

- Zwei Punkte P und Q sind *verbindbar in* S (S aus $\mathbb{Z}^2$), falls ein Pfad von P nach Q existiert, der ganz in S liegt.

Satz

➔ „Pfad-verbindbar in S“ ist eine Äquivalenzrelation.

Definition: Zusammenhangskomponente, zusammenhängend

- Die Äquivalenzklassen bzgl. „Pfad-verbindbar in S“ heißen *Zusammenhangskomponenten* von S. Falls S genau eine Zusammenhangskomponente besitzt, heißt S *zusammenhängend*.

Rosenfeld 1979

Alternative Definition von Zusammenhang

Definition: Nachbarschaft von Mengen

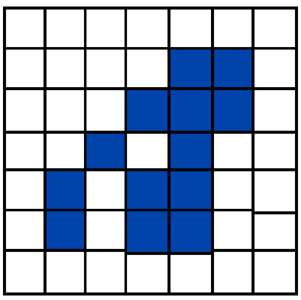
- Punkt P ist S aus $\mathbb{Z}^2$ *benachbart*, falls P einem Punkt von S benachbart ist.
- Die Mengen S_1 und S_2 aus $\mathbb{Z}^2$ sind *benachbart*, falls je ein Punkt von S_1 und S_2 benachbart sind.

Definition: zusammenhängend, Zusammenhangskomponente

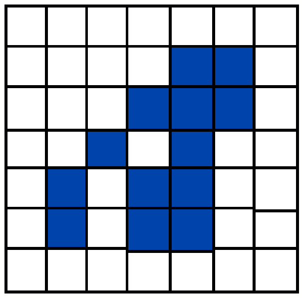
- S aus $\mathbb{Z}^2$ ist *unzusammenhängend*, falls S in zwei Teilmengen zerlegt werden kann, die nicht benachbart zueinander sind.
- S aus $\mathbb{Z}^2$ ist *zusammenhängend*, falls S nicht in zwei Teilmengen zerlegt werden kann, die nicht benachbart zueinander sind.
- Eine *Zusammenhangskomponenten* von S ist eine nicht-leere zusammenhängende Teilmenge von S, die zu keinem anderen Punkt von S benachbart ist.

Kong & Rosenfeld 1989

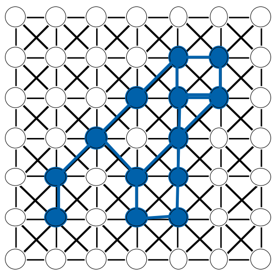
Wie viele Zusammenhangskomponenten ?

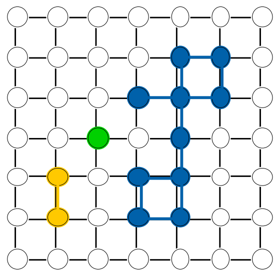


Unterschiedliche Bewertung des Zusammenhangs



8-zusammenhängend drei 4-Zusammenhangskomponenten





Zusammenhang: Nachbarschaften und Topologie

Ein Umgebungssystem für 4-Nachbarschaften

Sei P = (x, y):

$$B(P) = \begin{cases} \{P\} & \text{, falls } x + y \text{ gerade} \\ \{P \text{ und die 4-er-Nachbarn von } P\} & \text{, falls } x + y \text{ ungerade} \end{cases}$$

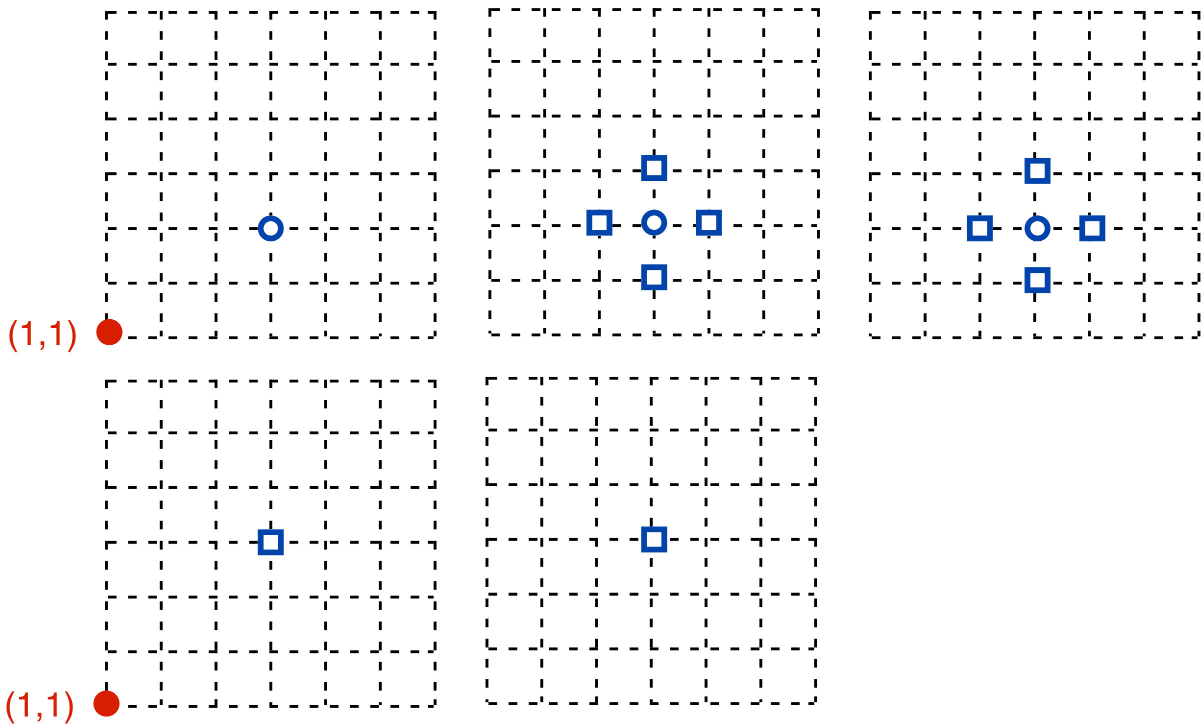
- B(P) ist die kleinste offene Menge, die P enthält.

➔ Zusammenhang in der von dieser Basis induzierten Topologie ist 4-Zusammenhang

aber

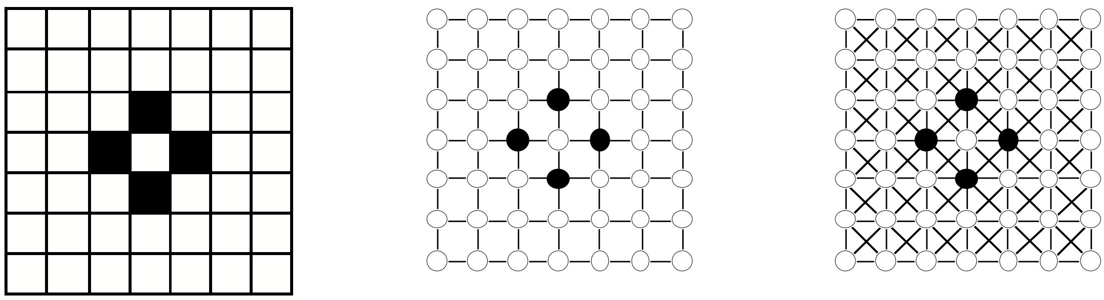
- Umgebungen sind nicht „homogen“ in der Ebene verteilt.
- Umgebungen sind nicht „translationsinvariant“,
- d.h. das Bild der Umgebung eines Punktes unter einer Translation ist eventuell nicht die Umgebung des Bildes.

Umgebungen und Umgebungen von Umgebungen



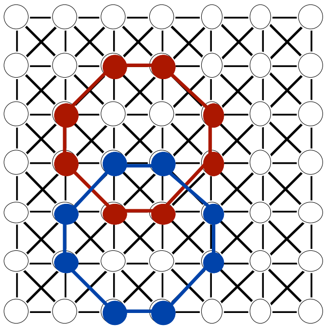
1. Punkt in der Ebene 2. Umgebung des Punktes 3. Umgeb. der Umgeb.punkte

Zusammenhangsparadoxien / Zusammenhangsanomalien



schwarze Pixel	vier Komponenten, vollkommen nicht-zusammenhängend	eine Komponente, geschlossener Pfad / Kurve
weiße Pixel	zwei Komponenten	eine Komponente
Inneres und Äußeres der schwarzen Menge	Trennung durch nicht zusammenhängende Menge	Keine Trennung durch „geschlossenen Pfad“

Noch eine Zusammenhangsanomalie

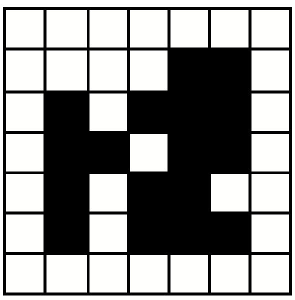


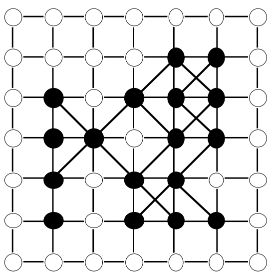
- Bei 8-Pfaden können sich zwei geschlossene Kurven „durchdringen“ ohne gemeinsame Punkte zu haben.

Ein Umweg um die Zusammenhangsanomalien

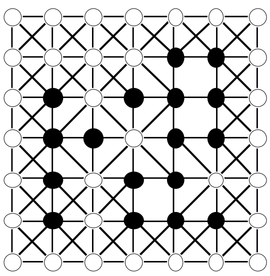
Unterscheidung von

- Vordergrund, schwarze Punkte
  - *m*-Nachbarschaft, wenn beide Punkte schwarz sind
- Hintergrund, weiße Punkte
  - *n*-Nachbarschaft, wenn wenigstens ein Punkt weiß ist





(8,4)-Bild



(4,8)-Bild

➔ Die Nachbarschaftsstruktur ergibt sich nicht allein aus dem Medium, sondern auch aus dem Inhalt.

Digitale Bilder (digital picture)

Ein *digitales Bild* ist ein Quadrupel (V, m, n, B), wobei

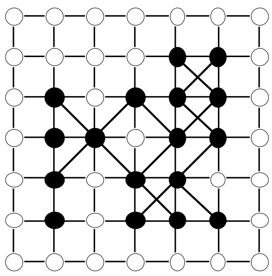
i. $V = \mathbb{Z}^2$,

ii. $B \subset V$, im Normalfall ist B endlich

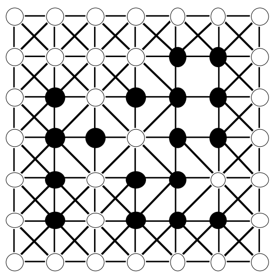
iii. (m, n) = (4, 8) oder (m, n) = (8, 4)

- B: „schwarze Punkte“; V\B: „weiße Punkte“.
- Zwei schwarze Punkte sind benachbart, wenn sie m-benachbart sind.
- Zwei Punkte, von denen einer weiß ist, sind benachbart, wenn sie n-benachbart sind.
- Ein Punkt p ist zu einer Punktmenge S benachbart, wenn p zu einem Punkt aus S benachbart ist.
- Zwei Mengen S und T sind benachbart, wenn ein Punkt aus S zu einem Punkt aus T benachbart ist.
- Eine Menge S von schwarzen oder weißen Punkten ist zusammenhängend, falls es nicht möglich ist, S in zwei nicht-benachbarte Teilmengen zu zerlegen.
- Eine *Komponente* einer Menge S von schwarzen oder weißen Punkten ist eine nicht-leere, zusammenhängende Teilmenge von S, die zu keinem anderen Punkt (derselben Färbung) aus S benachbart ist.

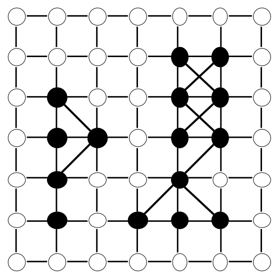
Zusammenhang / Komponenten



(8, 4)-Bild



(4, 8)-Bild



(8, 4)-Bild

	(8, 4)-Bild	(4, 8)-Bild	(8, 4)-Bild
B: schwarze Punkte	• zusammenhängend • eine Komponente • ein Loch	• nicht zusammenhängend • zwei Komponenten • kein Loch	• nicht zusammenhängend • zwei Komponenten • kein Loch
V\B: weiße Punkte	• nicht zusammenhängend • zwei Komponenten	• zusammenhängend • eine Komponente	• zusammenhängend • eine Komponente

Hierarchische Gliederung eines Bildes

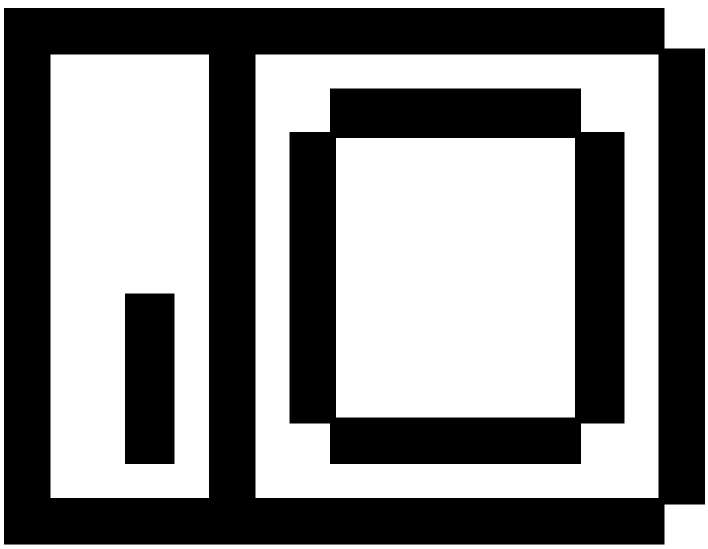
Definition: Hintergrund, einschließen (surround), Loch

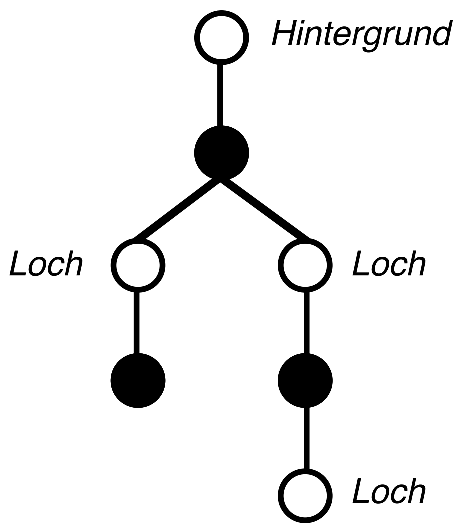
- Ist die Menge der schwarzen Punkte eines Bildes endlich, dann gibt es genau eine weiße Komponente, die unendlich ist, der *Hintergrund*.
- Sei X eine zusammenhängende Punktmenge.
- X *schließt* einen Punkt P *ein* gdw. P in einer endlichen Komponente des Komplementes von X enthalten ist.
- X *schließt* eine Punktmenge Y *ein* gdw. X jeden Punkt von Y einschließt.

➔ 'Einschließen' ist eine partielle Ordnung.

- Eine weiße Komponente, die benachbart zu einer sie einschließenden schwarzen Komponente C ist, ist ein *Loch* in C.

Hierarchie des Einschließens von Komponenten





Rand und Inneres

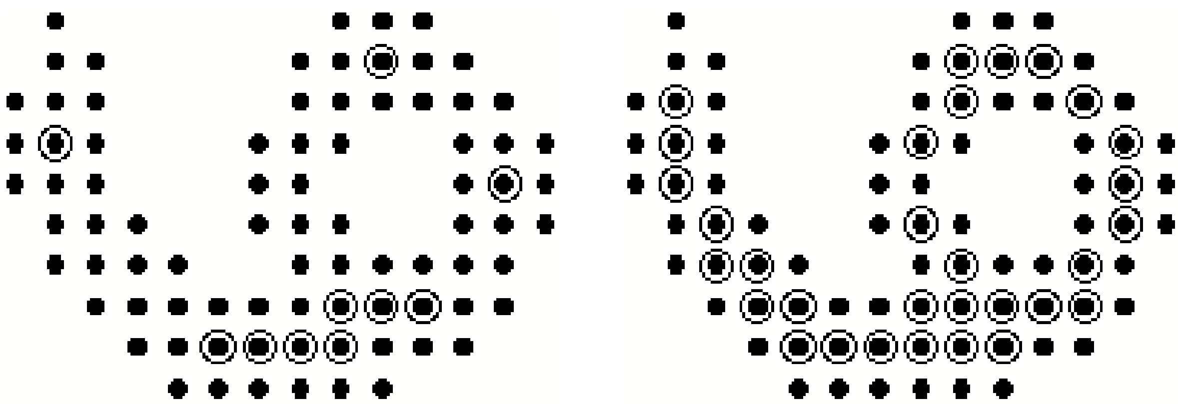
Definition: Randpunkt, innerer Punkt

- Ein schwarzer Punkt ist *Randpunkt*, wenn er einem weißen Punkt benachbart ist.
- Ansonsten ist der Punkt ein *innerer Punkt*.
- Der *Rand* einer schwarzen Komponente ist die Menge aller ihrer Randpunkte.
- Das *Innere* einer schwarzen Komponente ist die Menge aller ihrer inneren Punkte.
- Der *Rand* einer schwarzen Komponente hinsichtlich einer weißen Komponente D ist die Menge aller ihrer Punkte, die benachbart zu D sind.

Satz (→ Jordan)

➔ In einem zweidimensionalen (4, 8)- oder (8, 4)-digitalen Bild ist jeder Rand einer schwarzen Komponente C hinsichtlich einer weißen Komponente D zusammenhängend.

Innere Punkte in 4- und 8-Nachbarschaft



(4, 8)-Inneres   (8, 4)-Inneres

Zusammenfassung

Digitale Topologie

- räumliche Struktur des Mediums
- Klärung von strukturellen Eigenschaften als Basis für Algorithmen (-verifikation)
- digitalisierte Strukturen von Punkten / Zellen / Pixeln mit direkter Nachbarschaft
  - 4- und 8-Nachbarschaft
- digitale Struktur verhält sich anders als kontinuierliche Strukturen
  - Zusammenhangsparadoxien
- Lösung der Paradoxien: (8, 4)- oder (4, 8)-Bilder

➔ Strukturelle Beziehungen sind nicht allein durch das Medium bestimmt, sondern auch durch den Inhalt.

➔ Dieselben Probleme können sich in Kalkülen wie dem RCC ergeben.

Literatur

Kong, T.Y. & A. Rosenfeld (1989). Digital Topology: Introduction and Survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing 48*. 357–393.

Latecki, Longin (1992). *Digitale und allgemeine Topologie in der bildhaften Wissensrepräsentation*. St. Augustin: infix.

Rosenfeld, Azriel (1979). Digital topology. *Amer. Math. Monthly 86*. 621–630.