

Grundlagen der Verarbeitung von Wissen über Raum, Zeit und Ereignisse

13. Sitzung

Voronoi-Diagramme

Gliederung

- Voronoi-Diagramme
- Delaunay-Triangulationen

Nachbarschaft – Adjazenz

→ Gold 1992

Wann sind zwei Objekte benachbart?

- Topologie: Wenn sich ihre Grenzen berühren
- Anordnung: Wenn nichts zwischen ihnen ist
- Distanz: Wenn ihr Abstand kleiner ist als der konkurrierender Objekte

Nachbarschaft in Partitionierungen des Raumes

- Benachbarte Zellen haben eine Grenze gemeinsam.
- Nachbarschaft kann durch Graphen, die benachbarte Zellen verbinden, erfasst und weiter spezifiziert werden.

Welche Partitionierung prägen die Objekte dem Raum auf?

- Jedem Raumpunkt kann das Objekt zugeordnet werden, das ihm am nächsten ist.
- Jedes Objekt hat einen Einflussbereich im Raum, der durch die anderen Objekte beschnitten wird.
- Die Größe des Einflussbereichs hängt von der Objektdichte ab.
- Der Raum kann in Einflussbereiche partitioniert werden.

Voronoi Diagramme

- Aurenhammer 1991, Okabe, Boots & Sugihara 1992
- Dirichlet-Zerlegung (und noch viele andere Namen)

Voronoi-Diagramme

- Fundamentale Datenstruktur der 'Computational Geometry'
- Zerlegung der Ebene nach dem Prinzip des 'nächsten Nachbarn'
- nützlich auch für viele nicht (offensichtlich) geometrische Probleme
- erfunden / definiert unabhängig von einander in verschiedenen disziplinären Kontexten
- entstehen in vielen natürlichen Kontexten ('Gleichgewichtszustand')
- haben interessante mathematische Eigenschaften

Anwendungen, auch außerhalb der Informatik

Naturwissenschaften

- Wachstums- und Einflussmodelle (Kristallographie)
- Formbeschreibung

Geographie

- Visualisierung; Interpolation

Planung

- Optimale Positionierung von Einrichtungen (Schulen)
- Finden der dichtesten Einrichtung (Postamt-Problem)
- Finden der größten Freifläche einer bestimmten Form

Informatik

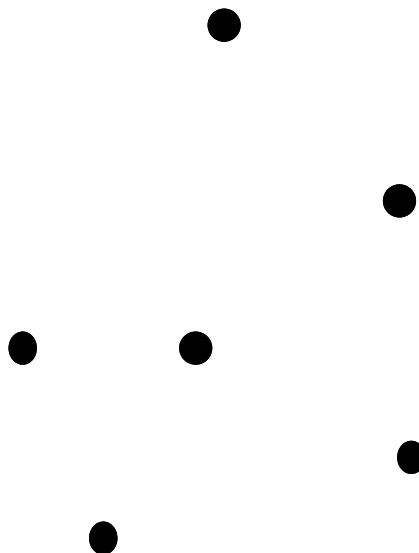
- Computer Graphik
- Roboternavigation
- Mustererkennung, Cluster-Analyse
-
-

Voronoi Diagramme (Definition)

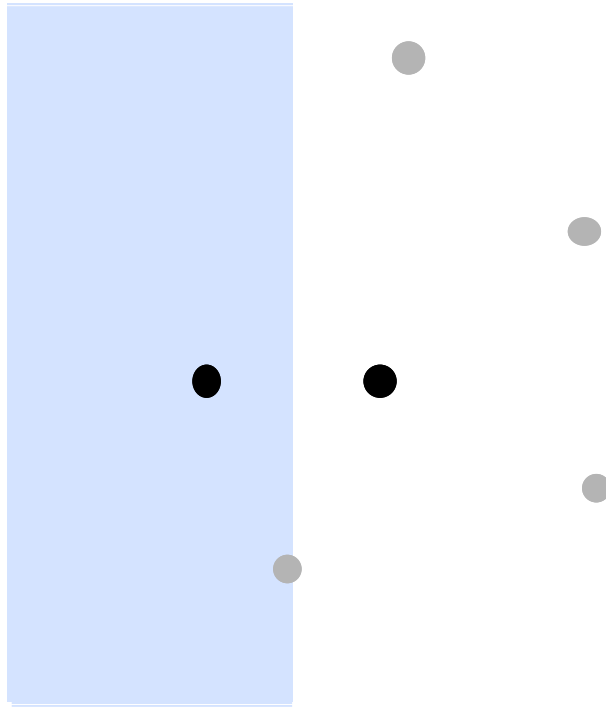
Zerlegung eines Grundbereiches G (der Ebene)

- Gegeben sei eine endliche Menge von Punkten (**Generatoren**) $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\} \subset G$ und eine Abstandsfunktion d auf G .
- Der **Dominanzbereich** von P_i über P_j ist die Menge aller Punkte (aus G), die näher an P_i als an P_j liegen. $\text{dom}(P_i, P_j) = \{Q \in G \mid d(Q, P_i) \leq d(Q, P_j)\}$ (\rightarrow Halbebene)
- Das **Voronoi-Polygon** zu P_i ist die Menge aller Punkte (aus G), die ihm am nächsten sind, also der Durchschnitt aller seiner Dominanzbereiche. $V(P_i) = \bigcap_j \text{dom}(P_i, P_j) (\neq \emptyset)$
 - Die Grenzen der Voronoi-Polygone sind Linien gleichen Abstandes. $V(P_i) \cap V(P_j) = \{Q \in G \mid d(Q, P_i) = d(Q, P_j)\}$
 - $V(P_i)$ ist konvex (wenn G konvex ist), kann teilweise unbeschränkt sein
 - Jeder Punkt aus G ist in einem Voronoi-Polygon enthalten.
- **Voronoi-Diagramm** zu \mathcal{P} : die Menge der Voronoi-Polygone $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \{V(P_i) \mid P_i \in \mathcal{P}\}$. (\rightarrow polygonale Zerlegung von G)

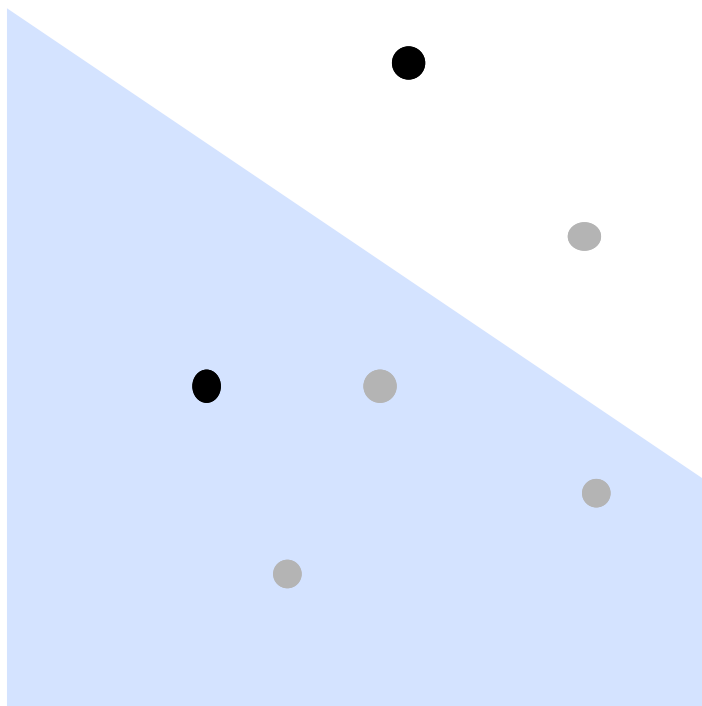
Voronoi-Diagramm (Beispiel)



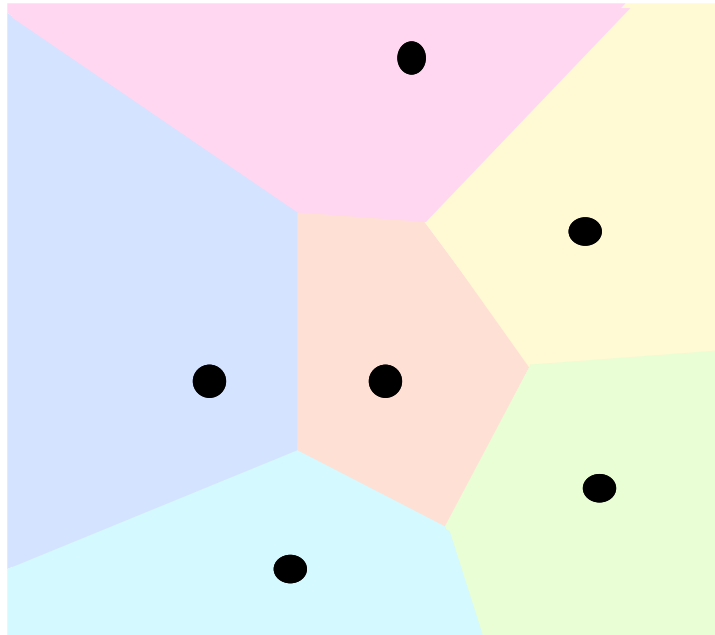
Voronoi-Diagramm (Beispiel)



Voronoi-Diagramm (Beispiel)



Voronoi-Diagramm (Beispiel)



Voronoi-Kanten und -Vertices

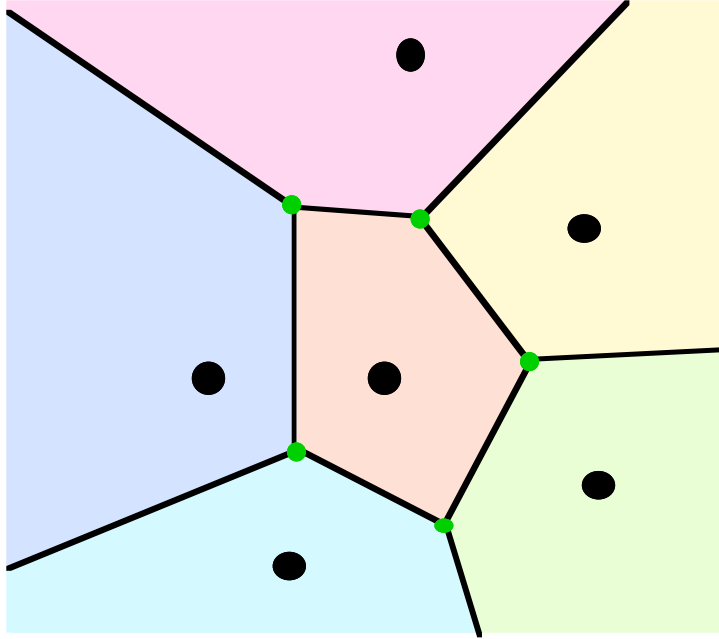
Voronoi-Kanten

- sind Grenz-Segmente von benachbarten Voronoi-Polygonen
- sind maximale Überschneidungen von zwei verschiedenen Voronoi-Polygonen
- Anzahl $< 3n$

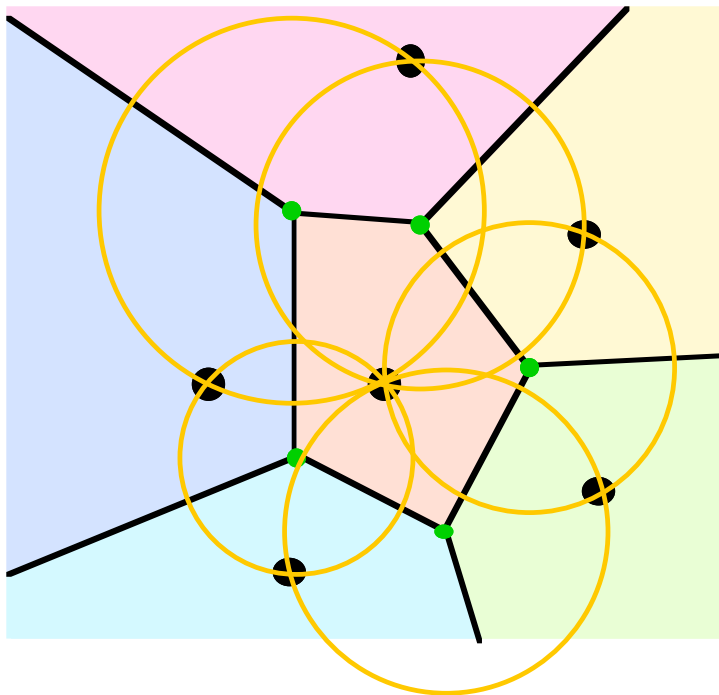
Voronoi-Vertex

- ist Eckpunkt von mindestens drei verschiedenen Voronoi-Polygonen.
- sind maximale Überschneidungen von drei verschiedenen Voronoi-Polygonen.
- Treffpunkt von mindestens drei Voronoi-Kanten.
- der Mittelpunkt eines Kreises, auf dem (mindestens) drei Generator-Punkte liegen und der keinen Generator-Punkt enthält.
- Anzahl $< 2n$

Voronoi-Diagramm (Beispiel)



Voronoi-Diagramm (Beispiel)



Anwendungen von Voronoi-Zerlegungen

Zugriff des nächsten Generators

- Postamt-Problem: Welches ist das nächste Postamt zu einer Position
- Assoziativer Datei-Zugriff (Ähnlichster Datensatz bei zwei Merkmalen)
- Enthalten in Voronoi-Polygon → Zeitkomplexität: $O(\log n)$

Planung

- Finden der größten Freifläche einer bestimmten Form (z.B. Kreis)
- Optimale Positionierung von Einrichtungen (Schulen)
- Voronoi-Vertex oder (unbeschränkte) Voronoi-Kante außerhalb der konvexen Hülle der Generatoren

Anwendungen von Voronoi-Zerlegungen

Cluster-Analyse

- Klassenbildung aufgrund von Ähnlichkeitsmaßen
- Dichte Cluster bilden kleine Voronoi-Polygone
- 'Grenz-Generatoren' haben asymmetrische Voronoi-Polygone

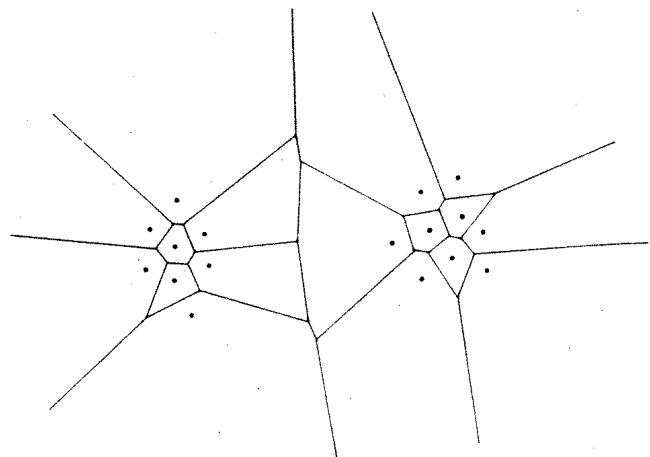


Figure 2. Voronoi diagram for two dense clusters.

Verallgemeinerung: Voronoï-Diagramm

Beliebige geometrische Entitäten als Generatoren

- Zwei Punkte: Gerade als Grenzlinie
- Gerade + Punkt: Parabel als Grenzlinie
- Zwei Geraden: Winkelhalbierende als Grenzlinie
- Strecke + Punkt: Parabelausschnitte + Halbgeraden
- Strecke + Gerade: Strecke + Parabelenden

Beispiel

Skelett oder Achse von
Konturbildern

→ Setzt die Segmentierung der
Kontur voraus

(hier: Segmentgrenzen an konvexen
Ecken)

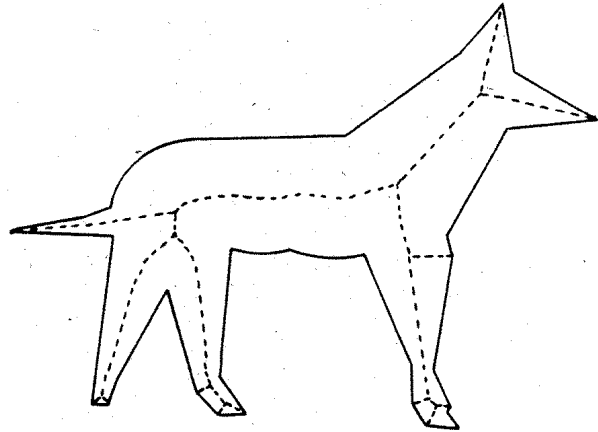


Figure 9. Contour and its medial axis [Philbrick 1968].

Anwendungen von Voronoï-Zerlegungen

- Voronoï-Kanten: Maximierung der Distanz zu den benachbarten
Generatoren

Roboternavigation

- Voronoï-Kanten besitzen
maximalen Freiheitsgrad
- z.B. Korridor-Verfolgung:
Ausgeglichener Abstand
zu Generatoren
(= Wänden / Hindernisse)

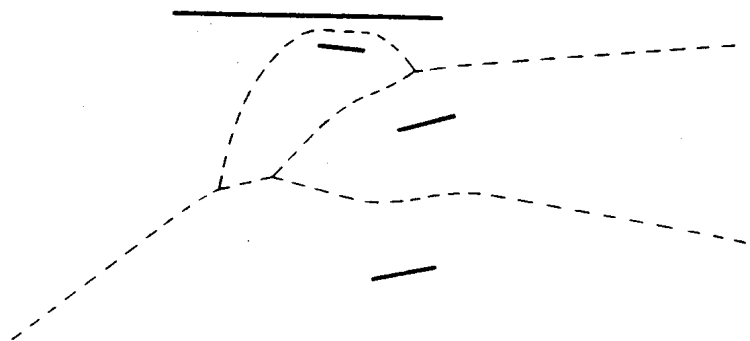


Figure 25. Voronoï diagram for line segments.

Delaunay-Triangulation

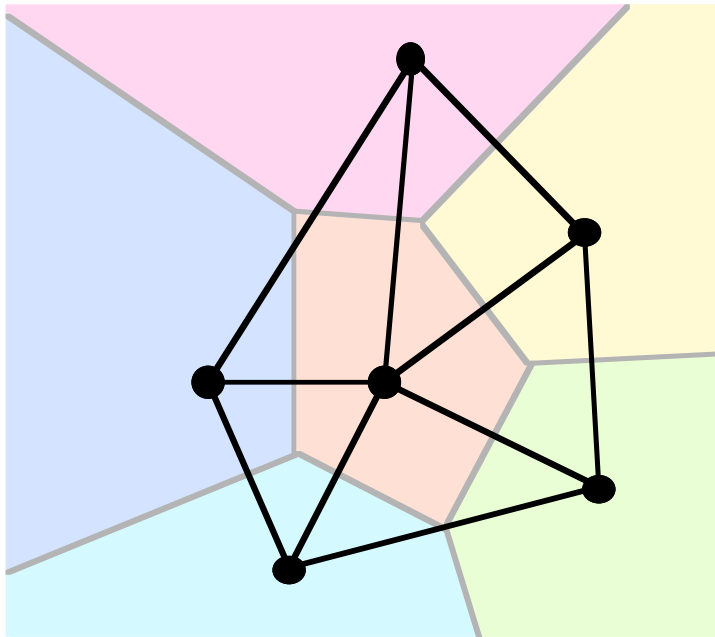
Zerlegung der konvexen Hülle einer Menge von Punkten $\{P_1, \dots, P_n\}$

- Sei $\{V(P_1), \dots, V(P_n)\}$ das Voronoï-Diagramm mit den Generatoren $\{P_1, \dots, P_n\}$.
- Die Kanten der **Delaunay-Pretriangulation** sind die direkten Verbindungen zwischen zwei Generatoren, die eine Voronoï-Kante gemeinsam haben.
- **Delaunay-Triangulationen** sind Delaunay-Pretriangulation, bei denen jede Region ein Dreieck ist. (Also: jeder Vertex im V-Diagramm gehört zu genau drei Kanten.)
 - Kanten in der Delaunay-Triangulation stehen senkrecht auf den Voronoï-Kanten (schneiden sie aber nicht unbedingt)
 - Dreiecken in einer Delaunay-Triangulation entsprechen Voronoï-Vertices.

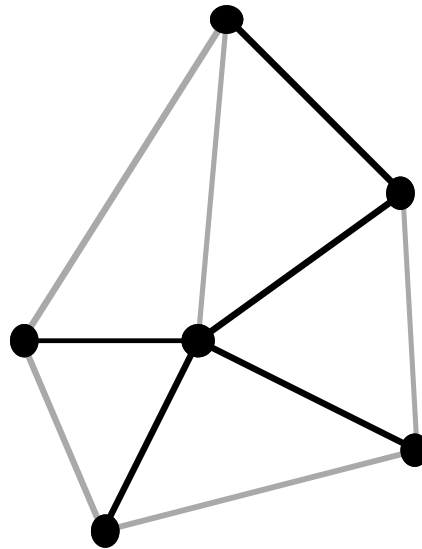
Eigenschaften

- Maximierung des minimalen Winkels unter allen mögl. Triangulationen
- Optimal hinsichtlich der Einheitlichkeit der Winkel der Dreiecke.
- Kanten des minimalen aufspannenden Baums sind Delaunay-Kanten.

Delaunay-Triangulation (Beispiel)



Delaunay-Triangulation (Beispiel)



- enthält den minimalen aufspannenden Baum

Anwendungen von Delaunay-Triangulation

Nächster Nachbar unter den Generatoren

- ist mit einer Delaunay-Kante verbunden

Nächstes Paar unter den Generatoren

- z.B. für Kollisionserkennung
- Aufwandsreduktion auf $O(n)$

Wegeplanung

- Approximative Lösung des Traveling-Salesman-Problems

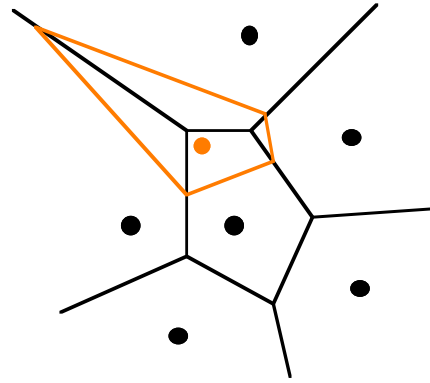
Interpolation

- Delaunay-Triangulation bilden optimale Basis für die Interpolation von Funktionen auf Basis der Werte an den Ecken der Dreiecke (→ Computer-Graphik)

Erzeugung eines Voronoï-Diagramms

Durch sukzessives Einfügen

- Bestimme das Polygon $V(P)$, in dem Q liegt.
- Bestimme die neue Kante zwischen Q und P .
- Bestimme die (neuen) Vertices (mit bestehenden Kanten) und die beteiligten Generatoren.
- Erzeuge neue Kanten, bis das Polygon komplett ist.
- Lösche den in $V(Q)$ eingeschlossenen Teil des alten Diagramms.



Aufwand

- Worst case: n^2 , Durchschnitt: $n \cdot \log(n)$
- Andere Algorithmen garantieren $n \cdot \log(n)$

Zusammenfassung

Voronoï-Diagramm und Delaunay-Triangulation

- Vorverarbeitungsschritt für viele Arten weiterer Verarbeitung
- Anzahl der explizit repräsentierten Objekte / Beziehungen: $O(n)$
- Implizite Kodierung von Information über n^2 bzw. n^3 Punktkonstellationen
- Abstandsinformation 'qualitativ' kodiert.
(Allerdings müssen Voronoï-Kanten und -Vertices mit Koordinaten beschrieben werden. Probleme durch Rundungsfehler !)

Sind Voronoï-Diagramme 'qualitativ'?

- Gold 1992: "Thus the visual estimation of the relative contribution of neighbouring data points is not based on metric decisions, but on the relative positions of the "neighbouring" data points (in a Voronoï sense)."