Nested Petri Nets

Alexander Beifuß, Robert Keßler, Tim Krämer

Universität Hamburg
Fachbereich Informatik
Theoretische Grundlagen der Informatik

31. Januar 2012

Gliederung

Motivation

Grundlagen

Nested Nets

Netze in Netzen und andere Petri Netz Modelle

Entscheidbarkeit für Netze in Netzen

Workflow Netze

Erweiterte Workflow Netze

Motivation:

Petri Netze

- Grafisch darstellbar
- Modellierung (Spezifikation)
- Analyse, Simulation, Verifikation

Erweiterung zu Nested Nets

- Erweiterung der Notation und Struktur
- Bezug zur Objektorientierung (Werte-Semantik)
- Intuitive Abbildung von Hierarchien
- geeignet für verteilte Systeme / Protokolle

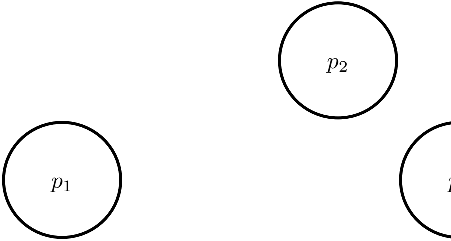
Grundlagen: Netze (Wiederholung)

Netz
$\mathcal{N} = (P, T, F) : P \cap T = \emptyset$

Plätze/Stellen
$p \in P$

Transitionen
$t \in T$

Flussrelation
$F = (P \cup T) \times (T \cup P)$
Notation: $xFy \Leftrightarrow (x, f) \in F$



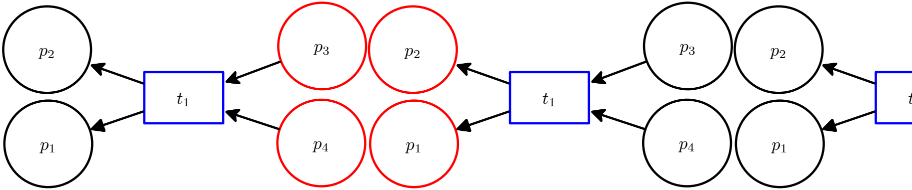
Grundlagen: Netze (Wiederholung)

Vor-/Nachbereich von $x \in P \cup T$

- ${}^\bullet x = \{y \mid yFx\}$
- $x^\bullet = \{y \mid xFy\}$

Ein- und ausgehende Kanäle einer Transition t

- $I = \{(p,t) \mid p \in {}^\bullet t\}$
- $O = \{(t,p) \mid p \in t^\bullet\}$



Grundlagen: Multimengen (Wiederholung)

Definition der Multimenge m über Grundmenge S

$m : S \to \mathbb{N}$
(Informatiker kennen dieses Konzept auch unter dem Begriff *'bag'*)

Beispiel

$S = \{\clubsuit, \heartsuit\}$
$m = \{\clubsuit, \clubsuit, \heartsuit\}$ (eine mögliche Multimenge über S)
$m(\clubsuit) = 2$
$m(\heartsuit) = 1$

Endliche Multimenge

m ist endlich $\Leftrightarrow$ $supp(m)$ endlich ist, wobei
$supp(m) := \{s \in S \mid m(s) > 0\}$ die reduzierte Grundmenge ist.

Grundlagen: Multimengen (Wiederholung)

Inklusion für Multimengen

$m \leq m'$, wenn m in m' enthalten ist.
(sofern m und m' vergleichbar sind und m in m' enthalten ist)

Summation von Multimengen

$(m + m')(s) = m(s) + m'(s) : s \in supp(m) \cup supp(m')$
$\{\clubsuit, \heartsuit, \heartsuit\} + \{\spadesuit, \clubsuit\} = \{\spadesuit, \clubsuit, \clubsuit, \heartsuit, \heartsuit\}$

Mögliche Multimengen über einer Grundmenge S

$S = \{\clubsuit, \heartsuit\}$
$S_{MS} = \{\emptyset, \{\clubsuit\}, \{\heartsuit\}, \{\heartsuit, \heartsuit\}, \{\clubsuit, \clubsuit\}, \{\clubsuit, \heartsuit\}, \dots\} = \mathbb{N}_0^S$

Grundlagen: (S-)Markierungen (Wiederholung)

Sei $\mathcal{N} = (P, T, F)$ ein Netz und S eine beliebige Menge. Eine Markierung von $\mathcal{N}$ über S ist eine Funktion M von P nach S_{MS}, welche jeden Platz auf eine Multimenge über S abbildet.

- $M : P \rightarrow S_{MS}$

Ein Netz $\mathcal{N}$ mit markierten Plätzen (Initial-Markierung) nennt man 'markiertes Netz'. $< \mathcal{N}, M >$

S-Markierungen erlauben beliebig komplexe Marken (Beispiele):

- (*'black dot token'*), $S = \{\bullet\}$
- (*'colored token'*), $S \subseteq \{\mathbb{N}\}$
- (*'marked net token'*), $S = \{< \mathcal{N}, M_{\mathcal{N}} >, \ldots\}$
- Aber auch Mischformen (Petri Netze höherer Ordnung, *high-level Petri nets*)

Grundlagen: Kantenbeschriftung

Kanten werden mit Variablen und Ausdrücken versehen um das Schaltverhalten zu definieren.

- Variablen: $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ (Variablen-Namen)
- Konstanten: $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ (Konstanten-Namen)
- Bezeichner: $B := V \cup C$
- Ausdruck: $e : B \to \mathbb{N}$ (endliche Multimenge gefordert) (oft notiert in der Form $v_1 + (v_2 + (c_1 + \dots))$
- $B_{MS} = \{\emptyset, \{v1\}, \dots\} = \mathbb{N}_0^B$, auch als $Expr(B)$ bezeichnet

Auswertung eines Audrucks

Mit $c \in M$ und $b : V \to M$, folgt:
$b(e)$ ist eine Multimenge über M.

Grundlagen: Transitionsbeschriftungen

Transitionen können Beschriftungen bekommen um Transitionen in verschiedenen Ebenen synchron zu Schalten.

- $Lab = \{l_1, l_2, \dots\}$
- $Lab' = \{l^1, l^2, \dots\} : Lab \cap Lab' = \emptyset$
- $\forall l \in Lab \cup Lab' \overset{def}{\rightarrow} \bar{l} : Lab, Lab'$,
  $\overline{Lab} =_{def} \{\bar{l} \mid l \in Lab\}, \overline{Lab'} =_{def} \{\overline{l'} \mid l' \in Lab'\}$
  (paarweise disjukten)
- $\bar{\bar{l}} =_{def} l$
- $\mathcal{L} =_{def} Lab \cup Lab' \cup \overline{Lab} \cup \overline{Lab'}$

Dazu später mehr ...

Nested Nets

Definition: Netsted Net Struktur Σ

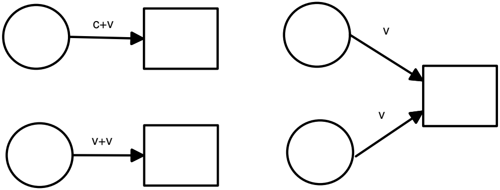
- Σ ist eine Anordnung von $k \geq 1$ Netzen $[\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k]$
- $\mathcal{N}_1$ ist das System-Netzen
- $\mathcal{N}_i : 1 < i \leq k$ sind Element-Netze
- In den $\mathcal{N}_i$ können Kanäle mit Ausdrücken aus $Expr(A)$ beschriftet sein. ($\mathcal{E}(p, t)$ an $\mathcal{I} und \mathcal{E}(t, p)$ an $\mathcal{O}$) - Restriktionen.
- In den $\mathcal{N}_i$ können Transitionen Beschriftungen aus $\mathcal{L}$ tragen (auch mehrere möglich).

Jedes $\mathcal{N}_i : i \in \{2, 3, \ldots, k\}$ hat eine Markierung über einer endlichen Menge S_i.
Mit $\mathcal{M}$ sei dann die Menge aller markierter Element-Netze $< \mathcal{N}_i, M_{i,0} >$ aus Σ bezeichnet.

Nested Nets

Restriktionen für Eingangs-Kanäle einer Transition

- keine Konstanten $c \in C$
- keine mehrfach Auftretenden einer Variablen $v \in V$



Restriktion wichtig, da WQO-Eigenschaften nicht erhalten bleiben würden (später mehr dazu ...)

Nested Nets

Definition: Nested Net

Nested Net Struktur Σ, bei der jede Konstante $c \in C$ als fixe Untermenge von $\mathcal{M}$ interpretiert wird.

- Die Markierung des System-Netzes ist eine Markierung über $\mathcal{M}$.
- Ein markiertes Nested Net: Nestet Net + Initial-Markierung.

Die Definition eines Nested Petri Netzes hängt damit stark von den Grundmengen S_i ab (siehe Nested Net Struktur).

- ein-elementige Grundmenge $\rightarrow$ normale Petrinetze als Element-Netze
- mehr-elementige Grundmenge $\rightarrow$ gefärbte Netze als Element-Netze
- markierte Netze $\rightarrow$ Hierarchie beliebiger Tiefe
- System-Netz $\rightarrow$ Rekursion

Nested Nets

Sei $\mathcal{N}_i = (P_i, T_i, F_i)$ ein Netz in einem Nested Nets mit der Markierung M

Definition: Bindung von $t \in T_i$

Funktion b, welche jede Variable $v \in V$ auf $b(v) \in \mathcal{M} \bigcup_i S_i$ abbildet.

Definition: gebundene Transition Y

$Y = (t, b)$, t ist eine Transition und b eine Bindung von t.

Definition: schaltbare gebundene Transition

$Y = (t, b)$ ist aktiviert in einer Markierung M von $\mathcal{N}_i$ gdw.
$\forall p \in {}^{\bullet}t : b(\mathcal{E}(p, t)) \subseteq M(p)$.

Nested Nets

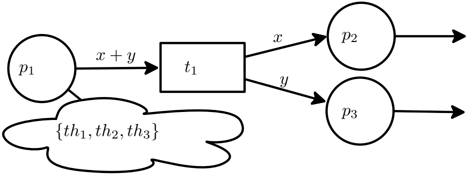
Sei $\mathcal{N}_i = (P_i, T_i, F_i)$ ein Netz in einem Nested Net mit der Markierung M

Definition: Schalten einer gebundenen Transition $Y = (t, b)$

$M \xrightarrow{Y} M'$, wenn

$\forall p \in P_i, M'(p) =_{def} M(p) - b(\mathcal{E}(p,t)) + b(\mathcal{E}(t,p))$

Ein markiertes Element-Netz, welches zur Variablenbindung in $\mathcal{E}(p,t)$ dient, nennt man *'am Schalten von t beteiligt'*.



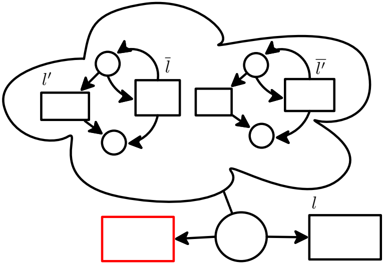
Bsp.
$b(\mathcal{E}(p_1, t_1))$
$= b(x+y)$
$= b : \{x, y\} \to S$
(eine mögl. Bindung)
$Y = (t_1, \{x : th_1, y : th_2\})$

$M'(p_1) = \{th_1, th_2, th_3\} - \{th_1, th_2\} + \emptyset = \{th_3\}$

Nested Nets

Schaltdynamik - Transport Schritt

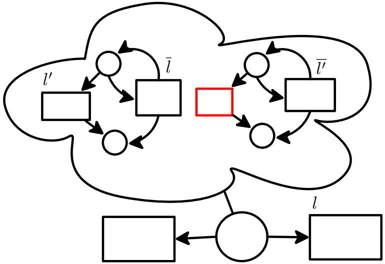
Schalten einer unbeschrifteten Transition im System-Netz ohne Einfluß auf die Markierung eines Element-Netzes.



Nested Nets

Schaltdynamik - Objekt-autonomer Schritt

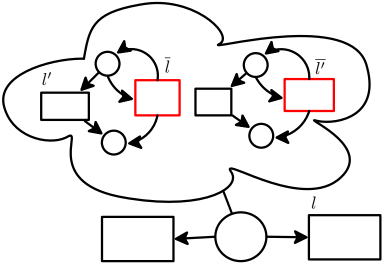
Schalten einer unbeschrifteten Transition eines Element-Netzes ohne Einfluß auf das System- oder andere Element-Netze.



Nested Nets

Schaltdynamik - Horizontale Synchronisation

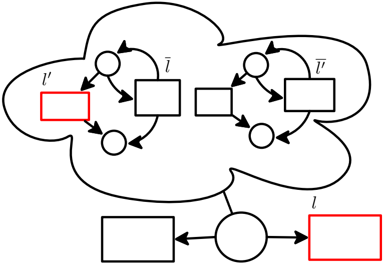
Gleichzeitiges Schalten von zwei Transitionen zweier Element-Netze auf dem selben Platz mit Transitionsbeschriftungen l und $\bar{l}$



Nested Nets

Schaltdynamik - Vertikale Synchronisation

Gleichzeitiges Schalten einer Transition t des System-Netzes und der mit $\bar{l}$ beschrifteten Transition im Element-Netz.



Netze in Netzen und andere Petri Netz Modelle

Wie auch die Wahl der S_i für die Element-Netze $\mathcal{N}_i$, ist es z.B. auch möglich per Definition $\bullet$ (oder beliebige andere Marken) als markiertes Element-Netz zuzulassen.

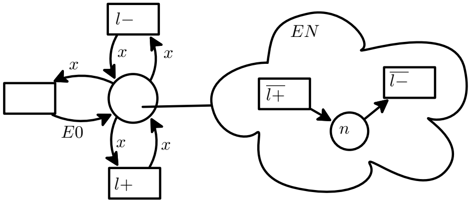
Einfache Petri Netze

System-Netze mit Markierungen über $\mathcal{M} = \{\bullet\}$ sind Spezialfälle von Netzen in Netzen.

Netze in Netzen und andere Petri Netz Modelle

Simulation von Petri Netze mit Rücketz-Kanten

- Rücksetz-Kanten sind solche Kanten bei denen ein Platz komplett geleert wird.
- Idee: Eine Menge von n Marken auf einem Platz wird durch ein Element-Netz mit n Marken ersetzt.
- (auch Inkre- und Dekrementation kann simuliert werden)



Entscheidbarkeit für Netze in Netzen

Verifikation

kritische Probleme bei Verifikation von Petri Netzen:

- Halteproblem
  - Ein Netz terminiert, falls es nicht unendlich ausgeführt werden kann
- Erreichbarkeit
  - Eine Markierung M' ist von M aus erreichbar, wenn eine Schaltfolge existiert mit der man von M zu M' gelangt.
- Begrenztheit
  - Die Erreichbarkeits-Menge eines Netzes ist die Menge aller Markierungen, welche aus der Start-Markierung erreichbar sind.

Entscheidbarkeit für Netze in Netzen

Verifikation

- Instandhaltbarkeit
  - Gegeben ist eine Start-Markierung M sowie eine endliche Menge $Q = q_1, q_2, \ldots, q_m$ an Markierungen. Es gilt zu entscheiden ob eine Schaltfolge existiert, bei der jede Markierung der Zwischenschritte einem der q_i entspricht.
- Unvermeidbarkeit
  - Es gilt zu entscheiden ob alle Schaltfolgen startend bei gegebener Initial-Markierung M eine Markierung besuchen, welche keinem der q_i entspricht.

Entscheidbarkeit für Netze in Netzen

Erreichbarkeit und Begrenztheit sind für Netsted Petri Nets unentscheidbar.

Nested Petri Nets können Petri Netze mit Rücksetzkanten simulieren $\Rightarrow$Gültigkeit dieses Satzes, weil schon gezeigt, dass Erreichbarkeit und Begrenztheit für Petri Netze mit Rücksetzkanten unentscheidbar ist.

Wiederholung: Transitionssystem $\mathcal{S} = \langle S, \rightarrow \rangle$

- $\mathcal{S}$: Set an Zuständen
- $\rightarrow \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ Transitionsrelation
- $Succ(s)$: Set $\{s' \in \mathcal{S} | s \rightarrow s'\}$ von direkten Nachfolgern von s
- $\mathcal{S}$ ist endlich verzweigt, wenn die Menge der $Succ(s)$ endlich ist.

Ein wohlgeformtes Transitionssystem ist ein Transitionssystem mit einer kompatiblen Quasi-Wohlordnung.

Entscheidbarkeit für Netze in Netzen

Wiederholung: Quasi-Ordnung $\leq$

- reflexive und transitive Relation $\leq$ (über ein Set X)
- Quasi-Wohlordnung (well-quasi-ordering) beschreibt jede Quasi-Ordnung $\leq$, sodas für jede endliche Sequenz $x_0, x_1, x_2, ...$ in X Indizes $i \leq j$ existieren, sodass $x_i \leq x_j$ gilt.

wohlgeformte Transitionssysteme

- Transitionssystem $\Sigma = \mathcal{S}\langle S, \rightarrow, \leq \rangle$ mit $\leq \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, sodass $\leq$ eine Quasi-Wohlordnung und $\leq$ 'kompatibel' zu $\rightarrow$ ist
- 'kompatibel' meint, dass für alle $s_1 \leq t_1$ und Transitionen $s_1 \rightarrow s_2$ eine Transition $t_1 \rightarrow t_2$ existiert, sodass $s_2 \leq t_2$ gilt

Entscheidbarkeit für Netze in Netzen

Quasi-Ordnung auf $\mathcal{M}_{MS}$

- $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{MS} : M_1 \leq M_2$, wenn für alle $p \in P_{\mathcal{N}_1}$ gilt, dass eine injektive Funktion $\jmath_p : M_1(p) \to M_{2(p)}$ existiert, sodass für $\forall \langle \mathcal{N}, m \rangle \in M_1(p)$ gilt $\jmath_p(\langle \mathcal{N}_i, m \rangle) = \langle \mathcal{N}_i, m \rangle \vee \langle \mathcal{N}_j, m' \rangle$ mit $m \leq m'$.

These

- $\mathcal{M}_{MS}$ als Set für alle Zustände des NPN
- $\to$ die Flussrelation auf $\mathcal{M}_{MS}$
- $\leq$ die Quasi-Ordnung auf $\mathcal{M}_{MS}$
- $\langle \mathcal{M}_{MS}, \to, \leq \rangle$ ist ein wohl geformtes Transitionssystem

Beweis

- $\leq$ ist eindeutig eine Quasi-Wohlordnung
  zu zeigen: Kompatibilität zur Transitionsrelation $\to$.
- Fallunterscheidung:
  1. Sei $M_1 \to^t M_1'$ ein gültiger Schritt über eine Transition t und sei $M_1 \leq M_2$.
     Dann existiert für jede transferierte Marke $s \in M_1(p)$ ein Objekt $\jmath_p(s) \in M_2(p)$.
     Wegen der Eingabebeschränkungen werden alle Objekte unabhängig tranferiert und das Schalten von t hängt nicht von Markierungen ab.
     D.h.: Wenn $M_2 \to^t M_2'$, dann $M_1' \leq M_2'$.
  2. objectautonomer Schritt: Kompatibilität offensichtlich
  3. Horizontale Synchronisation: gleichzeitige Ausführung objectautonomer Schritte. Ebenfalls offensichtlich Kompatibel.
  4. Vertikale Synchronisation: gleichzeitige Ausführung von Transport- und diversen objectautonomen Schritten. Kompatibilität durch Kombination der vorherigen Beweise.

- Halteproblem, Instandhaltbarkeit und Unvermeidbarkeit: entscheidbar für wohl geformte Transitionssysteme mit
  1. transitiver Kompatibilität
  2. Entscheidbare $\leq$ Ordnung
  3. geltenden $Succ(s)$
- Für Nested Petri Nets gilt somit:
  1. Quasi-Ordnung $\leq$ entscheidbar
  2. $Succ(s)$ gilt
- damit erzielen wir:
  1. Halteproblem: entscheidbar für Nested Petri Netze.
  2. NPN sind ausdrücklich schwächer als Turing Maschinen. (Halteproblem nicht entscheidbar für TM)
  3. Instandhaltbarkeit und Unvermeidbarkeit: entscheidbar für NPN

Reminder: Workflow Netze

Definition

Ein P/T-Netz $\mathcal{N} = (P,T,F,m_a)$ heißt Workflow-Netz (WF-Netz), falls

- *es existieren zwei Plätze $\{a, e\} \in P$ mit ${}^\bullet a = \emptyset$ und $e^\bullet = \emptyset$*
- *alle Plätze und Transitionen auf Pfaden zwischen a und e liegen*
- *m_a durch $[\ m_a(p)$:= **if** p = a **then** 1 **else** 0 **fi** $]$ festgelegt ist*
- *m_e durch $[\ m_e(p)$:= **if** p = e **then** 1 **else** 0 **fi** $]$ festgelegt ist*

Reminder: Workflow Netze (Korrektheit)

Definition

Ein WF-Netz $\mathcal{N} = (P, T, F, m_a)$ heißt korrekt, falls gilt:

- $\forall m \in R(\mathcal{N})\ \exists w \in T^* : m \xrightarrow{w} m_e$
- $\forall m \in R(\mathcal{N}) : m(e) \geq 1 \Rightarrow m = m_e$
- $\forall t \in T\ \exists m \in R(\mathcal{N}) : m \xrightarrow{t}$

Labelfunktion

In den Erweiterten Workflow Netzen werden Ausnahmetransitionen eingeführt. Um diese zu unterscheiden wird das Alphabet der Labelfunktion Σ aufgeteilt in Σ^e und Σ^n aufgeteilt für die gilt:

- $\Sigma^e \cap \Sigma^n = \emptyset$
- $\Sigma^e \cup \Sigma^n = \Sigma$

Dies entspricht der Labelung für vertikale Synchronisation.

Erweitertes Workflow Netz

Definition

Ein gefärbtes Petrinetz N $= (P, T, F, \upsilon, \ell)$ über dem Universum $\mathcal{U}$ ist ein Erweitertes Workflow Netz (EWF Netz) mit dem initialen Platz a $\in$ P und dem finalen Platz e $\in$ P und einer Menge von Ausnahmetransitionen $T' \subseteq T$ falls:

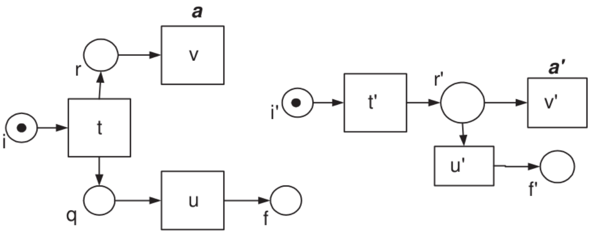
- $\{t \mid (t,a) \in F\} = \{t \mid (e,t) \in F\} = \emptyset$;
- $\upsilon(a) = \upsilon(e) = \{black\}$;
- $\forall t \in T$ *gilt:* $t \in T'$ *gdw.* $\ell(t) \in \Sigma^e$ *und* $\{p \mid (t,p) \in F\} = \emptyset$;
- $\forall n$, $n \in (P \cup T)$ *gibt es einen Pfad von a nach n;*
- $\forall n$, $n \in (P \cup T)$ *gibt es einen Pfad von n zu m, mit* $m \in T' \cup \{e\}$.

EWF-Netz: Korrektheit

Definition

Ein EWF-Netz N $=$ (P, T, F, υ, ρ, l) mit einem initialen Platz a und einem finalen Platz e über dem Universum $\mathcal{U}$ wird korrekt genannt gdw. $\forall m \in \mathcal{R}(N)$

- *entweder* $\exists r$, *mit* $r \in T^*$, *sodass m* $\xrightarrow{r} m_e$ *oder m* $\xrightarrow{\sigma}$ *für ein* $\sigma \in \Sigma^e$ *und*
- *m* $\xrightarrow{r}$ *(*m_e *+ q)* $\Rightarrow$ *q* $= \emptyset$ *gilt.*



Medizin - Vorgehensweise

- Klassisch ist das EPRS (Electronic Patient Record System)
  - Datenorientiertes System
  - eine Datenstruktur je Patient / Eintragen aller Schritte und Informationen
  - Relationale Datenbank mit regelbasierte Systeme zum MDS (Medical Decision Support)
  - daraus wurden viele Protokolle/Prozesse gewonnen
- heute eher Guidelines, sodass alle mitmachen können (Krankenschwestern, Sanitäter)
- wurden versucht als Flowcharts zu modellieren
- sollten in MDSS einfließen (Medical-Decision-Support-Systems)

SCLC

Im Beispiel wird die Behandlung von SCLC (Small-Cell-Lung-Cancer) als Motivation genutzt. Das Beispiel wird dabei von Guidelines inspiriert, die vom National Comprehensive Cancer Network (SUA) unter Modifizierung der Universität Texas M.D. Anderson Cancer Center erstellt wurden.

Guidelines bestehen aus:

- Sammlung von Standartprotokollen
- Vorgehensweisen
- Diagnoseverfahren

Definitionen: Protokolle

Jedes solcher Protokoll hat einen Anfangspunkt, einen Endpunkt und es behandelt Ausnahmefälle durch das beenden des Prozesses. Es sind somit **Erweiterte Workflow Netze** die wie folgt notiert werden:

ProtocolName$\langle exception_1, \cdots, exception_n\rangle$

Bsp.: MandT$\langle positive\rangle$, RadCon$\langle radiationscarring\rangle$, Surveillance$\langle\rangle$

$\rightarrow$ beim Auslösen einer Ausnahmetransition $\Rightarrow$ EWF-Netz terminiert

Beispiel: MandT$\langle positive \rangle$

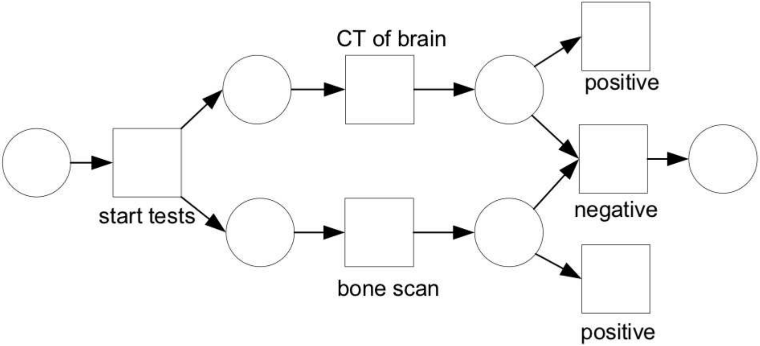


Abbildung: Mandatory Test Protocol (MandT$\langle positive \rangle$)

Beispiel: Stest⟨⟩

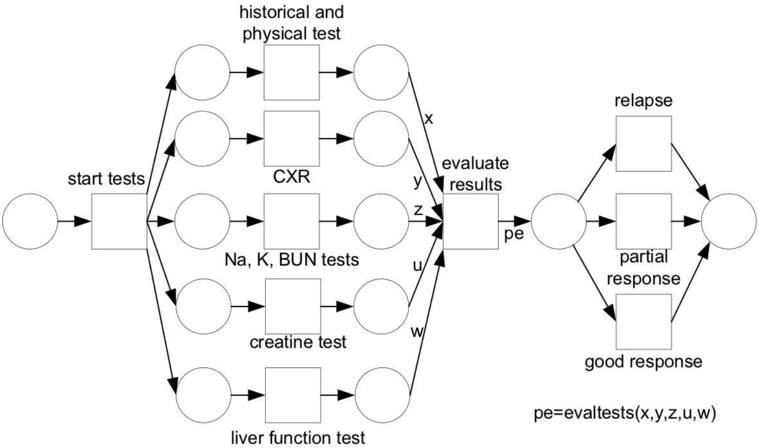


Abbildung: Surveillance Test Protocol (STest⟨⟩)

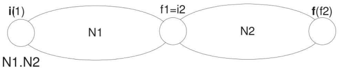
Definition: Initial, Final, *Initialisierung*

- ein EWF-Netz (N,m) wird Initial genannt, falls gilt m $= m_a$
- ein EWF-Netz (N,m) wird Final genannt, falls gilt m $= m_e$
- die Funktion Init(N) erzeugt ein markiertes EWF-Netz mit (N,m_a)

Kombination von Protokollen

EWF-Netze werden mittels der Operationen $\|$ und $\cdot$ verknüpft:

- $\|$ ist dabei der Paralleloperator, der zwei EWF-Netze parallel ausführt
- $\cdot$ ist der Sequenzoperator, der zwei EWF-Netze hintereinander ausführt



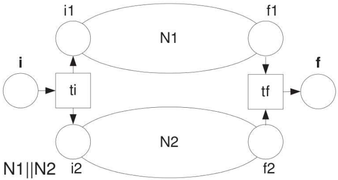


Abbildung: Sequenzielle & Parallele Ausführung von EWF-Netzen

Surveillance Protokoll

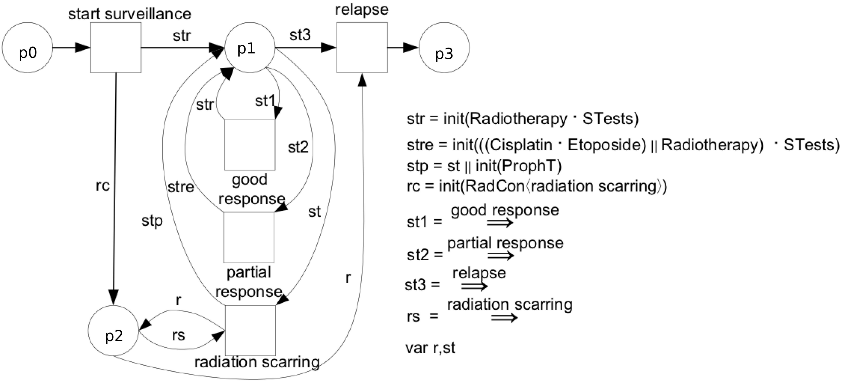


Abbildung: Surveillance Protocol (Surveillance)

Komplettes: SCLC Protokoll

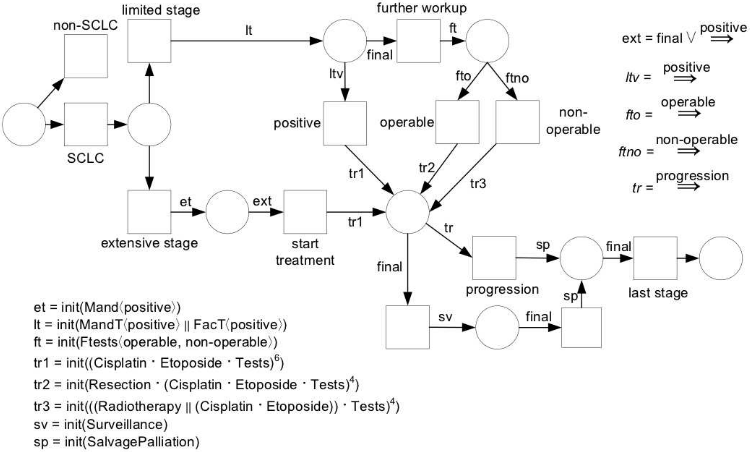


Abbildung: Complete SCLC Protocol (SCLC$\langle non - SCLC \rangle$)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!