Formale Grundlagen der Informatik 3
Kapitel 3

Aussagenlogik
Natürliche Deduktion
Korrektheit und Vollständigkeit

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

16. November 2015

Inferenzregeln (Konjunktion, Disjunktion, Implikation)

- **Konjunktionsregeln**

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\,(\wedge i) \qquad \frac{A \wedge B}{A}\,(\wedge e_1) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,(\wedge e_2)$$

- **Disjunktionsregeln**

$$\frac{A}{A \vee B}\,(\vee i_1) \qquad \frac{B}{A \vee B}\,(\vee i_2) \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,(\vee e)$$

- **Implikations-Einführung und -Elimination**

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\,(\Rightarrow i) \qquad \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}\,(\Rightarrow e)$$

Inferenzregeln (Negationsregeln)

- **Doppelte Negation**

$$\frac{\neg\neg A}{A}\,(\neg\neg e) \qquad \frac{A}{\neg\neg A}\,(\neg\neg i)$$

- **Negations-Einführung und -Elimination**

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\,(\neg i) \qquad \frac{A \quad \neg A}{\bot}\,(\neg e)$$

- **Bottom-Elimination**

$$\frac{\bot}{A}\,(\bot e)$$

Abgeleitete Inferenzregeln

Die Regel $\neg\neg i$ ist nicht zwingend nötig. Sie kann aus den anderen abgeleitet werden. Weitere neben $\neg\neg i$ abgeleitete Inferenzregeln sind:

- **Modus Tollens und Law of the excluded middle**

$$\frac{A \Rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}\,(MT) \qquad \frac{}{A \vee \neg A}\,(LEM)$$

- **Proof by contradiction (PBC)**

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A}\,(PBC)$$

Beispiele

1. $A, \neg\neg(B \wedge C) \vdash \neg\neg A \wedge C$
2. $(A \wedge B) \wedge C, D \wedge E \vdash B \wedge D$
3. $(A \wedge B) \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
4. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C$
5. $A \Rightarrow B \vdash (A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C)$
6. $A \vee B \vdash B \vee A$
7. $B \Rightarrow C \vdash (A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$
8. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
9. $A \Rightarrow B, A \Rightarrow \neg B \vdash \neg A$
10. $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$
11. $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C, \neg C, A \vdash B$
12. $\vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Der Kalkül

Nun haben wir zunächst nur eine Ansammlung von Regeln (einen Kalkül). Wir wollen zeigen, dass wir mit diesem Kalkül sinnvoll arbeiten können, d.h. wir wollen zeigen

1. Korrektheit: Wenn $F_1, \dots, F_n \vdash G$, dann $F_1, \dots, F_n \models G$
2. Vollständigkeit: Wenn $F_1, \dots, F_n \models G$, dann $F_1, \dots, F_n \vdash G$

Hinweis

Zur Nachbereitung

Die nächsten Folien geben nur knapp die grobe Idee des Beweises wieder. In der Vorlesung haben wir den Beweis behandelt. Bitte mit euren Mitschriften und ggf. mit der Literatur (siehe Verweis hinten) nacharbeiten. Insbesondere für die, die heute nicht da waren gilt: Umbedingt in die Literatur gucken!

Korrektheit

Der Ablauf und die Idee für den Korrektheitsbeweis:

- Zunächst genauer fassen, wie die Regeln anzuwenden sind, insb. jene, die mit Annahmen arbeiten (dazu: genau fassen, wie die Boxen benutzt werden, wann Formeln in den Boxen benutzt werden dürfen etc.).
- Dann die primäre Idee: *Induktion über die Länge des Beweises* (d.h. über die Anzahl der Schritte im Beweis).
  - Beim Induktionsanfang kann dann nur eine Prämisse benutzt worden sein.
  - Im Induktionsschritt geht man alle Regeln durch und wandelt den gegebenen $n+1$-Schrittigen Beweis zunächst durch Streichen der letzten Zeile und Umwandlung aller noch vorhandenen Annahmen in Prämissen in einen n-Schrittigen Beweis um, auf den die Induktionsannahme angewendet werden kann. Dies nutzt man dann um damit und mit der Regel, die gerade betrachtet wird, zu zeigen, dass auch der $n+1$-Schrittige Beweis die Folgerbarkeit impliziert.

Vollständigkeit (1/2)

Der Ablauf und die Idee für den (schwierigen) Vollständigkeitsbeweis:

- Zunächst den Beweis in drei Schritte aufteilen:
  1. Aus $F_1, \dots, F_n \models G$ folgt $\models (F_1 \Rightarrow (F_2 \Rightarrow \dots (F_n \Rightarrow G) \dots))$
  2. Aus $\models (F_1 \Rightarrow (F_2 \Rightarrow \dots (F_n \Rightarrow G) \dots))$ folgt $\vdash (F_1 \Rightarrow (F_2 \Rightarrow \dots (F_n \Rightarrow G) \dots))$
  3. Aus $\vdash (F_1 \Rightarrow (F_2 \Rightarrow \dots (F_n \Rightarrow G) \dots))$ folgt $F_1, \dots, F_n \vdash G$

  Wobei der erste und dritte Schritt schnell gezeigt ist.

Vollständigkeit (2/2)

Der Ablauf und die Idee für den (schwierigen) Vollständigkeitsbeweis:

- Anstelle des zweiten Schrittes allgemeiner zeigen: Aus $\models H$ folgt $\vdash H$
  Hierzu:
  1. Zeige, dass wenn z.B. in einer Formel F, die die atomaren Formeln A, B, C, D enthält, und diese Formel erfüllbar ist, wenn A, B, D auf 1 und C auf 0 gesetzt werden, dass dann $A, B, \neg C, D \vdash F$ ableitbar ist und ebenso, wenn dies die Formel F falsch macht, dass dann $A, B, \neg C, D \vdash \neg F$ ableitbar ist. Zeige dies allgemein!
  2. Nutze dann die Regel LEM um in einer Sequenz zunächst alle Literale zu erzeugen und dann den Beweis von oben für die eigentliche Formel zu nutzen. Mit $\vee_E$ wird daraus dann ein Beweis der eigentlichen Formel.

Literatur

Literatur

In der Literatur kann man viele Varianten des heute vorgestellten Kalküls finden. Die heutige Vorlesung orientierte sich am ersten Kapitel in dem Buch *Logic for Computer Science* von M. Huth und M. Ryan (Cambridge, 2. Auflage, 2004).

Literaturhinweis

Eingeführt wurden natürliche Deduktionssysteme von Gerhard Gentzen. Nachzulesen z.B. in *Investigations into logical deduction*, in *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, M. E. Szabo (Hrsg.), North-Holland Publishing Company, 1969. Die ursprüngliche Arbeit ist aus dem Jahre 1935.