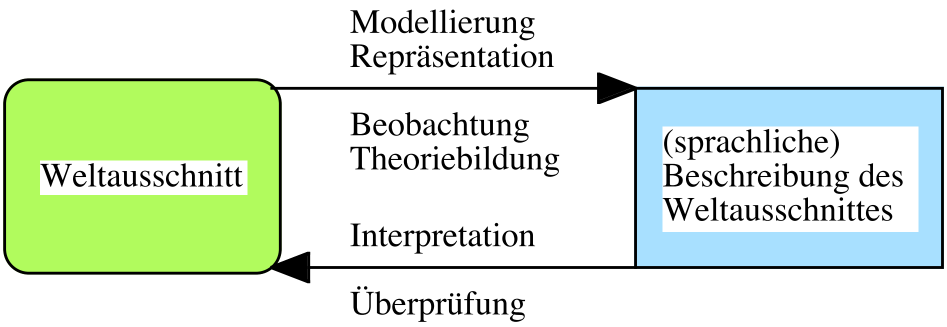
Aussagenlogik: Grundbegriffe, Semantik



Beschreibungen / Formeln

- können einen Weltausschnitt (unter einer Interpretation)
- korrekt oder inkorrekt beschreiben

Mathematische Abstraktion (Aussagenlogik)

- eine Interpretation (Belegung) ordnet Formeln Wahrheitswerte zu.

Wahrheitswerte

- sind keine Formeln und können nicht in Formeln auftreten
- Die Menge der *Wahrheitswerte* enthält genau zwei Elemente.
- Wir verwenden die Menge {**0**, **1**}, wobei wir **0** auch ‚falsch' aussprechen und **1** als ‚wahr' aussprechen.
- Häufig werden auch die Mengen {**falsch**, **wahr**}, {**f**, **w**}, {**f**, **t**} verwendet.

Aussagen / Formeln

- können bezüglich einer Interpretation / Belegung wahr oder falsch sein

Die aussagenlogische Semantik

- regelt, wie komplexe Formeln zu ihren Wahrheitswerten kommen
- modelliert die Bedeutung von Formeln über die Gesamtheit aller Möglichkeiten der Wahrheitswertzuordnung (Wahrheitswertverläufe)
- stellt Fachtermini für die Beschreibung von Wahrheitswertverläufen und den Vergleich von Wahrheitswertverläufen bereit.

Belegung von Aussagensymbolen: Zuordnung von Wahrheitswerten

Definition 3.1

Eine ***Belegung*** (oder *Wahrheitswertzuordnung*) ist eine Funktion $\mathcal{A}_{\mathcal{As}}: \mathcal{As}_{AL} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, die die Aussagensymbole auf Wahrheitswerte abbildet.

Auf Basis von $\mathcal{A}_{\mathcal{As}}$ ergibt sich eine Funktion $\mathcal{A}: \mathcal{L}_{AL} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, die alle Formeln bewerte
Für jedes Aussagensymbol $A \in \mathcal{As}_{AL}$ sei $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}_{\mathcal{As}}(A)$.
Für alle Formeln $F, G \in \mathcal{L}_{AL}$ sei

$$\mathcal{A}(\neg F) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ falls } \mathcal{A}(F) = \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}((F \land G)) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ falls } \mathcal{A}(F) = \mathbf{1} \text{ und } \mathcal{A}(G) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}((F \lor G)) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ falls } \mathcal{A}(F) = \mathbf{1} \text{ oder } \mathcal{A}(G) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}((F \Rightarrow G)) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ falls } \mathcal{A}(F) = \mathbf{0} \text{ oder } \mathcal{A}(G) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}((F \Leftrightarrow G)) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ falls } \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

Zum Selbststudium

In früheren Fassungen dieser Unterlagen

- haben wir Belegungen als partielle Funktionen definiert, die also nicht allen Aussagesymbolen einen Wert zuordnen müssen.
- Das hat einige Beweise viel komplizierter als erforderlich gemacht, ohne je richtig zu nützen.
- Deshalb nutzen wir jetzt nur noch Belegungen, die wirklich jedes Aussagensymbol bewerten.
- Daher ist zu bedenken, dass Belegungen, die in Beispielen auftauchen (z.B. auf der nächsten Seite), in der Regel nur unvollständig spezifiziert sind.

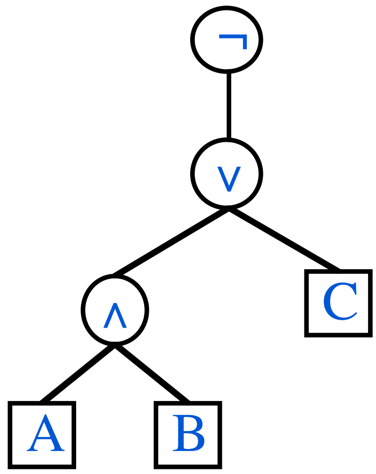
Beispiel: $\mathcal{A}_i(\neg((A \wedge B) \vee C))$

Es seien $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s1}$ und $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s2}$ Belegungen, für die gilt:

$\mathcal{A}_{\mathcal{A}s1}(A) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s1}(B) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s1}(C) = \mathbf{0}$
$\mathcal{A}_{\mathcal{A}s2}(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s2}(B) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s2}(C) = \mathbf{1}$

$\mathcal{A}_1(A) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_1(B) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_1(C) = \mathbf{0}$
$\mathcal{A}_1((A \wedge B)) = \mathbf{0}$
$\mathcal{A}_1(((A \wedge B) \vee C)) = \mathbf{0}$
$\mathcal{A}_1(\neg((A \wedge B) \vee C)) = \mathbf{1}$

$\mathcal{A}_2(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_2(B) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_2(C) = \mathbf{1}$
$\mathcal{A}_2((A \wedge B)) = \mathbf{0}$
$\mathcal{A}_2(((A \wedge B) \vee C)) = \mathbf{1}$
$\mathcal{A}_2(\neg((A \wedge B) \vee C)) = \mathbf{0}$



Beobachtungen zu Definition 3.1

Beobachtung 3.1.1

Es sei $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s}$ eine Belegung.

- Dann weist $\mathcal{A}$ der Formel F einen eindeutig bestimmten Wahrheitswert zu.
  - ➔ Die Funktionen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s}$ stimmen auf den Aussagensymbolen überein.
  - ➔ $\mathcal{A}$ ist eine eindeutige Erweiterung von $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s}$. (Prinzip der strukturellen Rekursion)
  - ➔ Im weiteren keine typographische Unterscheidung zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s}$.

Beobachtung 3.1.2

Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ zwei Belegungen.

- Wenn für alle Aussagensymbole A_1 von F: $\mathcal{A}(A_1) = \mathcal{A}'(A_1)$, dann auch $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}'(F)$
  - ➔ Für den Wahrheitswert einer Formel F unter einer Belegung spielt die Zuordnung von Wahrheitswerten zu Aussagensymbolen, die nicht in F vorkommen, keine Rolle.

Mögliche Welten und Zustandsbeschreibungen (Spies)

Mögliche Welt (Spies Abs. 1.5)

Eine aussagenlogische mögliche Welt zu einer Liste atomarer Aussagen gibt zu jeder Aussage der Liste genau einen Wahrheitswert an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	…
	0	0	0	0	0	0	0	0	…
	1	0	0	0	0	0	0	0	…
	0	1	0	0	0	0	0	0	…
	1	1	0	0	0	0	0	0	…
	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Anmerkungen

Jede Zeile beschreibt eine Konstellation von Wahrheitswertzuordnungen (Belegungen), d.h. einen (prinzipiell) möglichen Zustand der Welt („Mögliche Welt“).

Werden n atomare Aussagen betrachtet, so existieren 2^n verschiedene Wahrheitswertzuordnungen zu diesen atomaren Aussagen, d.h. 2^n mögliche Welten.

Belegungen und *Mögliche Welten*

Ein Beispiel:

- HP7_e ≈ Harry Potter 7 ist auf Englisch erschienen.
- HP7_d ≈ Harry Potter 7 ist auf Deutsch erschienen.
- K23_e ≈ Kunde 23 kauft englische Bücher.
- K23_d ≈ Kunde 23 kauft deutsche Bücher.

Belegungen

	HP7_e	HP7_d	K23_e	K23_d
$\mathcal{A}_1$	0	0	0	0
$\mathcal{A}_2$	1	0	0	0
$\mathcal{A}_3$	0	1	0	0
$\mathcal{A}_4$	1	1	0	0
$\mathcal{A}_5$	0	0	1	0
$\mathcal{A}_6$	1	0	1	0
$\mathcal{A}_7$	0	1	1	0
$\mathcal{A}_8$	1	1	1	0

	HP7_e	HP7_d	K23_e	K23_d
$\mathcal{A}_9$	0	0	0	1
$\mathcal{A}_{10}$	1	0	0	1
$\mathcal{A}_{11}$	0	1	0	1
$\mathcal{A}_{12}$	1	1	0	1
$\mathcal{A}_{13}$	0	0	1	1
$\mathcal{A}_{14}$	1	0	1	1
$\mathcal{A}_{15}$	0	1	1	1
$\mathcal{A}_{16}$	1	1	1	1

Zum Selbststudium: Belegungen, *Mögliche Welten* & Datenbanken

Datenbanken ≈ Sammlung von Aussagen

- In Datenbanken werden Aussagen über die Welt gespeichert, z.B. solche, wie im Beispiel der vorigen Folie, die in einer Datenbank eines Internet-Buchhändlers eine Rolle spielen:
  - Die HP7-Aussagen betreffen die Verfügbarkeit von Produkten (Büchern), sind also relevant für die Lieferbarkeit und für Ankündigungen.
  - Die K23-Aussagen betreffen das Kaufverhalten eines Kunden, sind also interessant für die on-line Information des Kunden.
- Das hier verwendete Darstellungsformat der Aussagenlogik, d.h. eine Aussage wird durch ein Aussagensymbol repräsentiert, ist vereinfachend; komplexe Domänen und insbesondere komplexe Bedeutungs- und Schlusszusammenhänge werden nicht berücksichtigt.
  - Die Prädikatenlogik (wird in späteren Kapiteln behandelt) macht es möglich, die interne Struktur von Aussagen zu berücksichtigen.
  - In Datenbanksystemen werden meist spezielle Subsysteme/Subsprachen der Prädikatenlogik verwendet; so ist etwa SQL eine Einschränkung der PL.

Verknüpfungstafeln für Junktoren

- stellen die Bedingungen der Definition 3.1 übersichtlicher dar.

	F	G	$(F \wedge G)$	$(F \vee G)$	$(F \Rightarrow G)$	$(F \Leftrightarrow G)$
$\mathcal{A}_1$	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
$\mathcal{A}_2$	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
$\mathcal{A}_3$	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
$\mathcal{A}_4$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

	F	$\neg F$
$\mathcal{A}'_1$	**0**	**1**
$\mathcal{A}'_2$	**1**	**0**

- In jeder Zeile steht eine Belegung.
- Alle aufgeführten Belegungen unterscheiden sich in der interessierenden Domäne

Zum Selbststudium: Das allgemeine Schema für Verknüpfungstafeln

	Teilformeln		komplexe, zusammengesetzte Formeln			
	F	G	(F ∧ G)	(F ∨ G)	(F ⇒ G)	(F ⇔ G)
$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_1$(F)	$\mathcal{A}_1$(G)	$\mathcal{A}_1$((F ∧ G))	$\mathcal{A}_1$((F ∨ G))	$\mathcal{A}_1$((F ⇒ G))	$\mathcal{A}_1$((F ⇔ G))
$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_2$(F)	$\mathcal{A}_2$(G)	$\mathcal{A}_2$((F ∧ G))	$\mathcal{A}_2$((F ∨ G))	$\mathcal{A}_2$((F ⇒ G))	$\mathcal{A}_2$((F ⇔ G))
$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_3$(F)	$\mathcal{A}_3$(G)	$\mathcal{A}_3$((F ∧ G))	$\mathcal{A}_3$((F ∨ G))	$\mathcal{A}_3$((F ⇒ G))	$\mathcal{A}_3$((F ⇔ G))
$\mathcal{A}_4$	$\mathcal{A}_4$(F)	$\mathcal{A}_4$(G)	$\mathcal{A}_4$((F ∧ G))	$\mathcal{A}_4$((F ∨ G))	$\mathcal{A}_4$((F ⇒ G))	$\mathcal{A}_4$((F ⇔ G))

	F	¬F
$\mathcal{A}'_1$	$\mathcal{A}'_1$(F)	$\mathcal{A}'_1$(¬F)
$\mathcal{A}'_2$	$\mathcal{A}'_2$(F)	$\mathcal{A}'_2$(¬F)

- Jede Kombination von Wahrheitswerten für die Teilformeln (F und G) muss in einer dei Belegungen $\mathcal{A}_i$ vorkommen.

  ➔ Die Verknüpfungstafel für einen n-stelligen Junktor enthält 2^n Zeilen.

Zum Selbststudium: Natürliche Sprache und Junktoren

Die Verknüpfungstafeln der Junktoren

- legen die Bedeutung der aussagenlogischen Junktoren fest
- bestimmen, welche natürlichsprachlichen Elemente durch die Junktoren symbolisiert werden können

Beispiel: ‚und'

- Der Satz ‚Peter trägt eine Kiste und Paul trägt eine Kiste' ist falsch,
  wenn ‚Peter trägt eine Kiste' falsch ist oder wenn ‚Paul trägt eine Kiste' falsch ist.
  Sonst ist der Satz wahr.

  ➔ Diese Verwendung von ‚und' kann durch ∧ symbolisiert werden.
- Der Satz ‚Peter und Paul tragen eine Kiste' beschreiben eine Gemeinschaftsaktion.

  ➔ Diese Verwendung von ‚und' kann nicht einfach durch ∧ symbolisiert werden.
- Der Satz ‚Peter ist gefallen und hat sich verletzt' ist falsch,
  wenn ‚Peter ist gefallen' falsch ist oder wenn ‚Peter hat sich verletzt' falsch ist.
  Sonst ist der Satz wahr.

  ➔ Diese Verwendung von ‚und' kann durch ∧ symbolisiert werden.
  Mit ∧ wird aber kein zeitlicher oder kausaler Zusammenhang ausgedrückt.

Die zweistelligen Junktoren

- Eine Formel mit n Aussagensymbolen hat 2^n bzgl. der Aussagensymbole unterscheidbare Belegungen.
- Es gibt 2^{2^n} Möglichkeiten, n Formeln mit n-stelligen (wahrheitsfunktionalen) Junktoren zu verknüpfen. ➔ Es gibt 16 zweistellige Junktoren.
- *Wahrheitsfunktional*: Wahrheitswert der Formel ergibt sich eindeutig aus den Wahrheitswerten der Teilformeln.

	F	G	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
$\mathcal{A}_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{A}_2$	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$\mathcal{A}_3$	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$\mathcal{A}_4$	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
				$\wedge$						$\vee$		$\Leftrightarrow$				$\Rightarrow$		
					$\nRightarrow$		$\nLeftarrow$		$\nLeftrightarrow$		$\downarrow$			$\Leftarrow$			$\uparrow$	

$\downarrow$ Peirce-Pfeil (NOR) $\uparrow$ Sheffer-Strich (NAND)

Wahrheitstafeln: Verallgemeinerung der Verknüpfungstafeln

Das Prinzip: Gegeben sei eine Formel F mit n (verschiedenen) Aussagensymbolen.
Tafel mit 2^n Zeilen, die ersten n Spalten mit den Aussagensymbolen beschriftet.
Für jede komplexe Teilformel von F eine weitere Spalte.
In jeder Zeile steht eine Belegung. Belegungen in verschiedenen Zeilen unterscheiden sich bei mindestens einem der interessierenden Aussagensymbole.
Die Berechnung erfolgt von den Teilformeln zu den komplexeren Formeln.

Beispiel: $F := (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee \neg C)$

	A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg C$	$(A \vee \neg C)$	$(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee \neg C)$
$\mathcal{A}_1$	0	0	0				
$\mathcal{A}_2$	0	0	1				
$\mathcal{A}_3$	0	1	0				
$\mathcal{A}_4$	0	1	1				
$\mathcal{A}_5$	1	0	0				
$\mathcal{A}_6$	1	0	1				
$\mathcal{A}_7$	1	1	0				
$\mathcal{A}_8$	1	1	1				

Wahrheitstafeln zur Berechnung von Wahrheitswertverläufen

für komplexe Formeln

- Mehrere komplexe Formeln (und ihre Teilformeln) können in eine Tafel eingetragen werden.

Beispiel

	A	B	¬A	(¬A ∨ B)	(A ⇒ B)
$\mathcal{A}_1$	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
$\mathcal{A}_2$	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
$\mathcal{A}_3$	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
$\mathcal{A}_4$	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

Definition 3.2

Eine Spalte der Wahrheitstafel bezeichnen wir auch als den *Wahrheitswertverlauf* der zugehörigen Formel.

➔ Die Formeln (¬A ∨ B) und (A ⇒ B) haben denselben Wahrheitswertverlauf.

Zum Selbststudium: Formeln vs. Wahrheitswerte

- Formeln sind Zeichenketten.
- Wahrheitswerte sind keine Zeichenketten.
- Aus diesem Grund können eine Formel und ein Wahrheitswert auch nicht identisch sein. Gemäß unserer Farbkodierung gilt: blaue Objekte und grüne Objekte können nicht gleichgesetzt werden.
- Trotzdem finden sich Gleichsetzungen der Art A = **1**, die ausdrücken sollen, dass A unte einer (ungenannten) Belegung wahr ist, also als Kurzform für $\mathcal{A}$(A) = **1**. Wahrheitswertverläufe, an denen wir hier primär interessiert sind, werden durch die Kurzschreibweise nicht gut erfasst. Gewöhnen Sie sich deshalb lieber Schreibweisen an, die die jeweils gemeinte Belegung explizit machen.
- Manche Autoren verwenden auch 0 und 1 als logische Konstanten, die Kontradiktionen oder Tautologien sind. Für diese Konstanten gilt dann also für jede Belegung $\mathcal{A}$(0) = **0** bzw. $\mathcal{A}$(1) = **1**. Diese Konstanten sind dann aber keine Wahrheitswerte sondern Formeln, wir haben gemäß unserer Farbdarstellung also blaue und grüne 0-en und 1-en. Wir werden in Kürze die Zeichen ⊥ (bottom) und ⊤ (top) als entsprechende logische Konstanten einsetzen.

Modelle

Definition 3.3

- Eine Belegung $\mathcal{A}$ heißt genau dann *Modell* für F, wenn $\mathcal{A}$(F) = **1**
  ➔ Um festzustellen ob $\mathcal{A}$ Modell von F ist, berücksichtigt man genau die Zelle der Wahrheitstafel, die durch $\mathcal{A}$ und F festgelegt wird.
- Weitere Sprechweisen / Schreibweisen für „$\mathcal{A}$ ist Modell für F“
  - $\mathcal{A}$ macht F wahr, $\mathcal{A}$ erfüllt F
  - F gilt unter der Belegung $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{A} \models$ F
- Falls $\mathcal{A}$ kein Modell für F ist ($\mathcal{A}$(F) = **0**), dann sagen wir auch
  - $\mathcal{A}$ macht F falsch, $\mathcal{A}$ falsifiziert F
  - F gilt nicht unter der Belegung $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{A} \not\models$ F
- Wenn **M** eine Formelmenge ist, dann heißt eine Belegung $\mathcal{A}$, die Modell für jede Formel aus **M** ist, *Modell* für **M**.

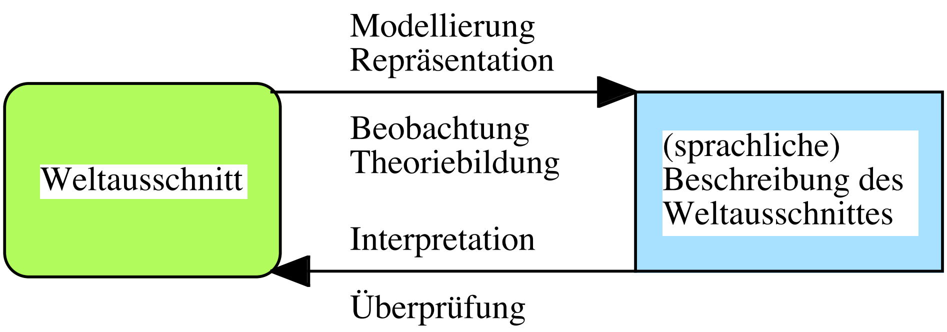
Begriffe der Metasprache: Semantik (1)

Belegung

- Wahrheitswertzuordnung zu Formeln ➔ eine Zeile der Wahrheitstafel

Modell einer Formel

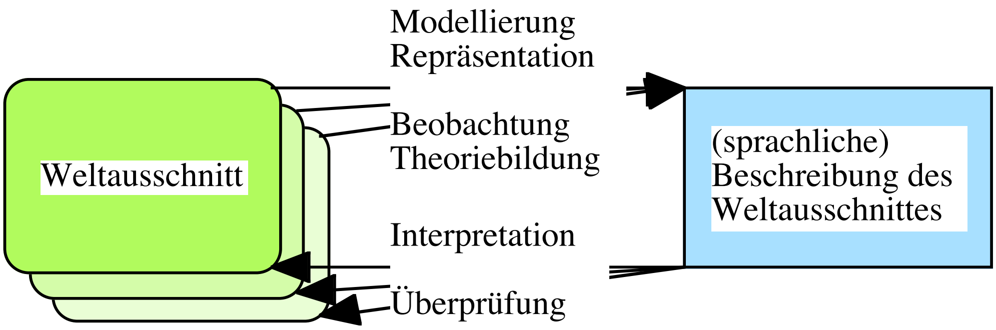
- Belegung, die die Formel wahr macht ➔ eine Zelle der Wahrheitstafel



Beschreibungen können unvollständig sein

Wahrheitswertverlauf einer Formel

- Die Wahrheitswerte der Belegungen ➔ eine Spalte der Wahrheitstafel



- Formeln und Formelmengen können verschiedene Modelle haben.

- Mathematische Abstraktion: Interpretation in einem Weltausschnitt als Belegung von Aussagensymbolen.

Belegungen – Beschreibungen eines Weltausschnitts

Das Internet-Buchhändler Beispiel:

- Atomare Aussagen: HP7_e, HP7_d, K23_e, K23_d

Ein – beispielhafter – Zustand der Datenbasis:

$\mathcal{A}$(HP7_e) = $\mathcal{A}$(K23_d) = **1** $\mathcal{A}$(HP7_d) = $\mathcal{A}$(K23_e) = **0**

Belegungen

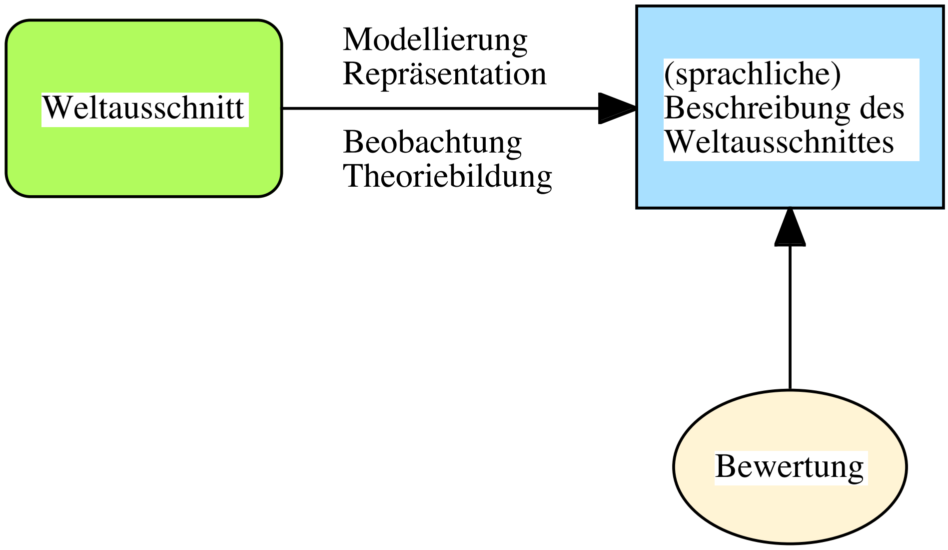
	HP7_e	HP7_d	K23_e	K23_d
$\mathcal{A}_1$	**0**	**0**	**0**	**0**
$\mathcal{A}_2$	**1**	**0**	**0**	**0**
$\mathcal{A}_3$	**0**	**1**	**0**	**0**
$\mathcal{A}_4$	**1**	**1**	**0**	**0**
$\mathcal{A}_5$	**0**	**0**	**1**	**0**
$\mathcal{A}_6$	**1**	**0**	**1**	**0**
$\mathcal{A}_7$	**0**	**1**	**1**	**0**
$\mathcal{A}_8$	**1**	**1**	**1**	**0**

	HP7_e	HP7_d	K23_e	K23_d
$\mathcal{A}_9$	**0**	**0**	**0**	**1**
$\mathcal{A}_{10}$	**1**	**0**	**0**	**1**
$\mathcal{A}_{11}$	**0**	**1**	**0**	**1**
$\mathcal{A}_{12}$	**1**	**1**	**0**	**1**
$\mathcal{A}_{13}$	**0**	**0**	**1**	**1**
$\mathcal{A}_{14}$	**1**	**0**	**1**	**1**
$\mathcal{A}_{15}$	**0**	**1**	**1**	**1**
$\mathcal{A}_{16}$	**1**	**1**	**1**	**1**

Begriffe der Metasprache: Semantik (2)

Erfüllbarkeit – Unerfüllbarkeit – Gültigkeit – Kontingenz

- Eigenschaften von Formeln, die über ihre Wahrheitswertverlauf definiert sind.
- Klassifikation einer Formel gemäß der zugehörigen Spalte in der Wahrheitstafel.



Erfüllbarkeit – Unerfüllbarkeit

Verhalten von Formeln (Formelmengen) unter beliebigen Belegungen

Definition 3.4

- Eine Formel F heißt genau dann *erfüllbar*, falls ein Modell für F existiert, anderenfalls heißt F *unerfüllbar* (*Kontradiktion*)
- Eine Formel F heißt genau dann *falsifizierbar*, falls eine falsifizierende Belegung für F existiert.
- Eine Formelmenge **M** heißt genau dann *erfüllbar*, falls ein Modell für **M** existiert, andernfalls heißt sie *unerfüllbar*.

Beispiele 3.4.1

- Jedes Aussagensymbol ist erfüllbar und falsifizierbar. z.B. $\mathcal{A}_1(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_2(A) = \mathbf{0}$
- $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee \neg C)$ ist erfüllbar. z.B. $\mathcal{A}_1(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_1(B) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_1(C) = \mathbf{0}$
- $A \wedge \neg A$ ist unerfüllbar.
- $\{A \vee B, A \wedge B\}$ ist erfüllbar. z.B. $\mathcal{A}_3(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_3(B) = \mathbf{1}$
- $\{A, \neg A\}$ ist unerfüllbar, obwohl die Formeln A und $\neg A$ erfüllbar sind.

Zum Selbststudium: Die leere (Formel-)Menge

- Es hat sich eingebürgert, die Definitionen, die über Formelmengen reden, wie folgt auf die leere (Formel-)Menge anzuwenden:
  - Jede Belegung ist Modell der leeren Menge.
  - Die leere Menge ist *erfüllbar*.

- Eine unerfüllbare Formel(menge) kann keinen Weltausschnitt korrekt beschreiben.
- Eine allgemeingültige Formel beschreibt jeden Weltausschnitt unter jeder Interpretation korrekt.

  ➔ Unerfüllbare und allgemeingültige Formeln können nicht dazu dienen einen Weltausschnitt oder eine Interpretation von dem/der anderen zu unterscheiden.

Allgemeingültigkeit – Kontingenz

Definitionen 3.5

- Eine Formel F heißt genau dann *allgemeingültig*, falls jede Belegung $\mathcal{A}$ ein Modell für F ist.
- Weitere Sprechweisen / Schreibweisen für „F ist gültig“:
  - F ist *gültig*
  - F ist eine *Tautologie*
  - $\models$F
- Eine Formel F heißt genau dann *kontingent*, wenn sie erfüllbar und falsifizierbar ist (d.h falls F ein Modell $\mathcal{A}$ hat, aber es auch Belegung $\mathcal{A}'$ gibt, die kein Modell für F ist).

Beispiele

- Aussagensymbole sind kontingente Formeln
- A ∨ ¬B ist kontingent $\mathcal{A}_3(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_3(B) = \mathbf{1}$, dann $\mathcal{A}_3(A \vee \neg B) = \mathbf{1}$
  $\mathcal{A}_2(A) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_2(B) = \mathbf{1}$, dann $\mathcal{A}_2(A \vee \neg B) = \mathbf{0}$
- A ∨ ¬A ist allgemeingültig

Allgemeingültigkeit – Kontingenz – Unerfüllbarkeit

(Aussagen-)Logische Formeln

<table>
<tr><td colspan="2">erfüllbare Formeln</td><td rowspan="2">unerfüllbare Formeln</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(allgemein-) gültige Formeln</td><td>kontingente Formeln</td></tr>
<tr><td colspan="2">falsifizierbare Formeln</td></tr>
<tr><td>wahr unter allen Belegungen
Wahrheitswertverlauf konstant 1
jede Belegung ist ein Modell</td><td>wahr / falsch unter manchen Belegungen
Wahrheitswertverlauf nicht konstant
es gibt ein Modell und eine falsifizierende Belegung</td><td>falsch unter allen Belegungen
Wahrheitswertverlauf konstant 0
es existiert kein Modell</td></tr>
</table>

- Die allgemeingültigen und die unerfüllbaren Formeln sind *logisch interessant*, da sie sich unter jeder beliebigen Belegung gleich verhalten.
- Die kontingenten Formeln sind *epistemisch interessant*, da sie Aussagen über die Welt machen.

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit

Prüfung auf Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit

- Für eine Formel F mit n Aussagensymbolen kann eine komplette Wahrheitstafel berechnet werden.
  - F ist *erfüllbar*, falls mindestens eine Belegung den Wahrheitswert **1** für F ergibt.
  - F ist *allgemeingültig*, falls alle Belegungen den Wahrheitswert **1** für F ergeben.
  - F ist *falsifizierbar*, falls mindestens eine Belegung den Wahrheitswert **0** für F ergibt.
  - F ist *unerfüllbar*, falls keine Belegung den Wahrheitswert **1** für F ergibt.

Ein einfaches Verfahren

- zur Prüfung dieser Eigenschaften basiert also auf der Erstellung und Auswertung von Wahrheitstafeln
- Die Tafeln können aber sehr groß werden.

Verallgemeinerbarkeit ist aber beschränkt

- nicht direkt anwendbar für
  - (Un)erfüllbarkeitsprüfung von (unendlichen) Formelmengen
  - kompliziertere Logiken (Prädikatenlogik)

Allgemeingültigkeit – Unerfüllbarkeit

Satz 3.1: Eine Formel F ist genau dann eine Tautologie, wenn ¬F unerfüllbar ist.
Voraussetzungen: Definitionen 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, F sei eine Formel.
Bew.: F ist eine Tautologie
GDW. jede Belegung $\mathcal{A}$ Modell für F ist, d.h. $\mathcal{A}(F) = \mathbf{1}$
GDW. jede Belegung $\mathcal{A}$ ¬F falsch macht, d.h. $\mathcal{A}(\neg F) = \mathbf{0}$
GDW. ¬F besitzt kein Modell
GDW. ¬F ist unerfüllbar

Satz 3.2: Eine Formel F ist genau dann unerfüllbar, wenn ¬F eine Tautologie ist.
Voraussetzungen und Bew.: Analog zum vorherigen.

➔ Zu jeder allgemeingültigen Formel existiert eine korrespondierende unerfüllbare Formel und umgekehrt.

allgemeingültig		**unerfüllbar**
$A \vee \neg A$	$\rightarrow$	$\neg(A \vee \neg A)$
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\leftarrow$	$A \wedge \neg A$

reductio ad absurdum
– ein klassisches Verfahren zur Prüfung von Allgemeingültigkeit

- Man beweist die Allgemeingültigkeit einer Formel F, indem man zeigt, dass es unmöglich ist, eine falsifizierende Belegung für F zu finden.
  - Der Gesamtformel wird der Wahrheitswert **0** zugewiesen
  - An Hand des Hauptoperators wird geprüft, unter welchen Bedingungen F falsch werden könnte.
  - Dann werden die Teilformeln entsprechend untersucht

Beispiel	A	B	¬A	$(\neg A \vee B)$	$(A \Rightarrow B)$	$(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$
1. Annahme						
2a.						
3a.						
2b.						
3b.						
4b.						
5. Test						

- Wenn es unmöglich ist, F falsch zu machen, muss F unter allen Belegungen wahr sein.

reductio ad absurdum
– ein klassisches Verfahren zur Prüfung von Allgemeingültigkeit

- Man beweist die Allgemeingültigkeit einer Formel F, indem man zeigt, dass es unmöglich ist, eine falsifizierende Belegung für F zu finden.
  - Der Gesamtformel wird der Wahrheitswert **0** zugewiesen
  - An Hand des Hauptoperators wird geprüft,
    unter welchen Bedingungen F falsch werden könnte.
  - Dann werden die Teilformeln entsprechend untersucht

Beispiel	A	B	¬A	(¬A ∨ B)	(A ⇒ B)	(¬A ∨ B) ⇔ (A ⇒ B)
1. Annahme						**<u>0</u>**
2a.				**<u>1</u>**	**<u>0</u>**	**0**
3a.	**<u>1</u>**	**<u>0</u>**		**1**	**0**	**0**
2b.				**<u>0</u>**	**<u>1</u>**	**0**
3b.		**<u>0</u>**	**<u>0</u>**	**0**	**1**	**0**
4b.	**<u>1</u>**	**<u>0</u>**	**0**	**0**	**1**	**0**
5. Test	**1**	**0**	**<u>0</u>**	**<u>0</u>**	**<u>0</u>**	**<u>1</u>**

- Da es unmöglich ist, F falsch zu machen, muss F unter allen Belegungen wahr sein.

reductio ad absurdum II

Reductio ad absurdum ist generell für die Tautologie-Prüfung anwendbar
und terminiert in jedem Fall:

- Beginne mit dem Hauptoperator.
- Reduziere in jedem Schritt die Zahl der noch zu bearbeitenden Junktoren.
  - In jedem Schritt sind 1 bis 3 Fälle für die Teilformeln zu behandeln.
- Da die Anzahl der Fallunterscheidungen bei endlicher Anzahl von Junktoren endlich ist und die Zahl der zu unterscheidenden Fälle höchstens 3 ist, terminiert das Verfahren.

➔ *Reductio ad absurdum* ist ein terminierender Algorithmus, der beliebige Formeln der Aussagenlogik auf Allgemeingültigkeit prüft.

➔ Das Problem der Allgemeingültigkeitsprüfung von Formeln der Aussagenlogik ist entscheidbar.

➔ Aber: Im schlimmsten Fall muss die komplette Wahrheitstafel aufgebaut werden.

Zur Erinnerung: Ein erster Algorithmus-Begriff SE1 - Level 1 Folie 76

- Wir verstehen unter einem Algorithmus einen **endlichen Text**, in dem ein für einen Prozessor (Interpreter) eindeutiges allgemeines und schrittweises **Problemlösungsverfahren** aus **Aktionen**, die auf **sprachlichen Einheiten** arbeiten, beschrieben ist.
- Ein Algorithmus **terminiert**, wenn er nicht nur in einer endlichen Vorschrift beschrieben ist, sondern auch nach endlich vielen Schritten seine Bearbeitung beendet.

[Formulierung und Hervorhebung: SE1 - Level 1 Folie 76

Zwei ergänzende Anmerkungen zur Termination:

- Es ist wichtig, dass ein Algorithmus für jede Eingabe (für die der Algorithmus konzipiert ist) nach endlich vielen Verarbeitungsschritten stoppt.
- Die Eigenschaft eines Berechnungsverfahrens zu terminieren, sollte bewiesen werden.

Informelle Beschreibung des Begriffs "Algorithmus"

(1) Ein Algorithmus wird durch eine endliche Menge von Instruktionen endlicher Grösse gegeben.

(2) Es existiert ein berechnender Agent (Mensch oder Maschine), der auf der Grundlage Instruktionen die Berechnungen durchführen kann.

(3) Es existieren Einrichtungen (Komponenten) für die Durchführung, Speicherung und der Wiederabruf von Berechnungsschritten.

(4) Sei *ALG* ein Algorithmus entsprechend (1) und *AG* ein berechnender Agent im Sinne von (2). Dann führt *AG* die Berechnungen auf der Grundlage von *ALG* so durch, dass für jede gegebene Eingabe (Aufgabenstellung) die Berechnung in diskreten Berechnungsschritten, d.h. ohne die Methode von kontinuierlichen Methoden oder analogen Verfahren, erfolgt.

(5) *AG* führt die Berechnungen auf der Grundlage von *ALG* deterministisch durch, d.h. ohne Verwendung von Zufallsmethoden oder –hilfsmitteln (etwa einem Würfel, etc.).

[Charakterisierung folgt: Rogers 1987

Entscheidungsprozeduren

Definition

Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von Formeln, d.h. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{AL}}$. Ein Algorithmus A_{EP} ist eine Entscheidungsprozedur für $\mathcal{P}$, falls für jede Formel $\mathrm{F} \in \mathcal{L}_{\mathrm{AL}}$ gilt:

- der Algorithmus A_{EP} terminiert
- A_{EP} liefert die Antwort 'JA' für $\mathrm{F} \in \mathcal{P}$ und die Antwort 'NEIN' für $\mathrm{F} \notin \mathcal{P}$.

Anmerkungen:

- der Algorithmus A_{EP} liefert für jede Formel eine Antwort, er "entscheidet" zwischen den $\mathcal{P}$-Fällen und den Nicht-$\mathcal{P}$-Fällen.
- Entsprechend zur obigen Definition kann auch für andere Wortmengen, d.h. andere Sprachen, die Frage der Entscheidbarkeit gestellt werden.
- Das Thema "Entscheidbarkeit" betrifft insbesondere die Frage, welche Probleme *entscheidbar* und welche *unentscheidbar* sind. [Unentscheidbare Probleme sind solche, für die es keine Entscheidungsprozeduren gibt.]

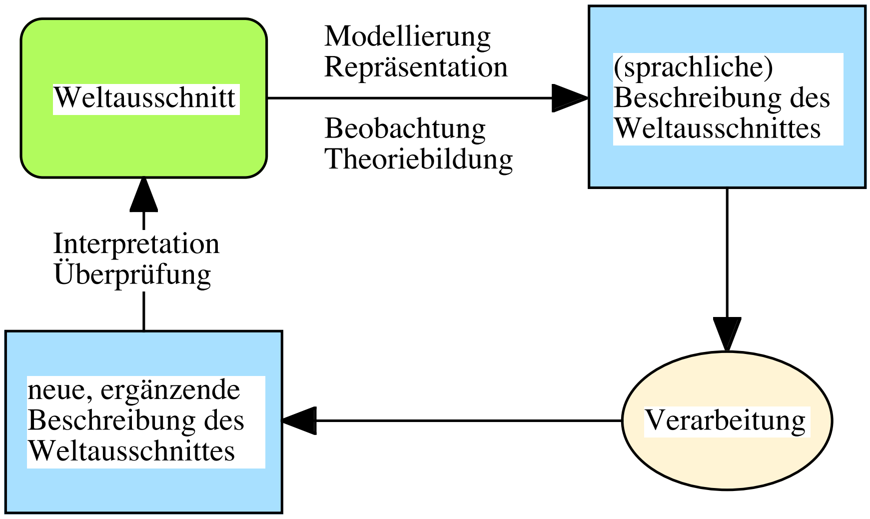
Literaturhinweise zu *Algorithmen & Entscheidbarkeit*

- Auf die folgenden Bücher, die in Veranstaltungen des Master-Studiums für Sie interessant werden können, wurde in den letzten Folien Bezug genommen:
  - Rogers, Hartley (1987). *Theory of recursive functions and effective computability*. Cambridge, MA: MIT-Press.
  - Ben-Ari, Mordechai (2001). *Mathematical logic for computer science*. London: Springer-Verlag. (second edition).

- Das Thema "Entscheidbarkeit" wird im weiteren Verlauf von FGI-1 noch vertieft behandelt werden.

Äquivalenz – Folgerung

- Beziehungen zwischen Formeln, die über ihre Wahrheitswertverläufe definiert sind
- Vergleich zweier Spalten in der Wahrheitstafel.



Erfüllbarkeit – Unerfüllbarkeit – Folgerung

- Auch für unendliche Formelmengen definiert.