Wissensrepräsentation
–

Christopher Habel, Özgür Özçep

Sommersemester 2005

Sitzung 23: Fuzzy Logic & Possibilistische Logik

- Unscharfe Mengen
- Possibilistische Logik

Literatur

Fuzzy sets & Fuzzy logic

Zadeh, Lotfi A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control, 8*. 338–353.

Zadeh, Lotfi A. (1975). Fuzzy logic and approximate reasoning. *Synthese, 30*. 407–428.

Zadeh, L. (1987). Commonsense und Fuzzy Logic. In N. Cercone & G. McCalla (eds.), *The Knowledge Frontier*. (pp. 103–136). New York: Springer-Verlag.

Fuzzy Logic: Einführendes Beispiel

Deklarative / assertorische Perspektive [TELL]

John ist groß.

- *Wahr*, wenn größe(john) = 1,90m
- *Falsch*, wenn größe(john) = 1,60m
- ?, wenn größe(john) = 1,80m

Interrogative Perspektive [ASK]

Ist John groß?

- *Ja*, wenn größe(john) = 1,90m
- *Nein*, wenn größe(john) = 1,60m
- *Ziemlich*, wenn größe(john) = 1,80m

Semantik der Prädikatenlogik: Modell (Zur Erinnerung !)

Ein *Modell* für $\mathcal{L}_{PL}$ ist ein Paar $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, wobei

- $\mathcal{D}$ ist eine beliebige, nicht leere Menge (*Domäne*),
- $\mathcal{I}$ ist eine Abbildung (*Interpretation*), die folgendes leistet:
  - für jedes $c \in \mathcal{Kon}(\mathcal{L}_{PL})$ ist $\mathcal{I}(c) \in \mathcal{D}$
  - für jedes $P \in \mathcal{Rel}_n(\mathcal{L}_{PL})$ ist $\mathcal{I}(P) \subseteq \mathcal{D}^n$ eine n-stellige Relation
  - Wir schreiben auch $c^{\mathcal{I}}$ statt $\mathcal{I}(c)$ und $P^{\mathcal{I}}$ statt $\mathcal{I}(P)$

Wahrheitswert bzgl. eines Modells

$[P(c_1,\dots, c_n)]^{\mathcal{I}} = \mathbf{t}$ gdw. $\langle c_1^{\mathcal{I}},\dots, c_n^{\mathcal{I}} \rangle \in P^{\mathcal{I}}$

Charakteristische Funktion χ_M zu einer Menge M

Charakteristische Funktion χ_M zu einer Menge M:

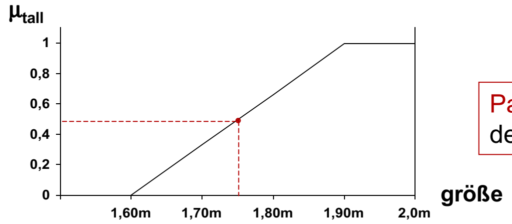
$\chi_M(x) = 0$ gdw. $x \notin M$
$\chi_M(x) = 1$ gdw. $x \in M$

$\langle c_1^{\mathcal{I}}, \ldots, c_n^{\mathcal{I}} \rangle \in P^{\mathcal{I}}$ gdw. $\chi_{P^{\mathcal{I}}}(\langle c_1^{\mathcal{I}}, \ldots, c_n^{\mathcal{I}} \rangle) = 1$
gdw. $[P(c_1, \ldots, c_n)]^{\mathcal{I}} = \mathbf{t}$

- Zweiwertige Logik
  - Extension von P ist eine „scharfe" Menge, charakterisiert durch eine „klassische" charakteristische Funktion $\chi_{P^{\mathcal{I}}}$ mit den Werten 0 und 1.
    - χ_P ist eine Treppenfunktion mit Unstetigkeit an den „Grenzen von $P^{\mathcal{I}}$".

Zugehörigkeit zu einer unscharfen Menge: Beispiel *tall*

$$\mu_{tall}(x) = \begin{cases} 0 & \text{größe}(x) \le 1{,}60\text{m} \\ 1 & \text{größe}(x) \ge 1{,}90\text{m} \\ 1 - \dfrac{1{,}90\text{m} - \text{größe}(x)}{0{,}30\text{m}} & \text{sonst} \end{cases}$$



Paare von Elementen und deren Zugehörigkeitswert

- Unscharfe Menge (fuzzy set) $M_{tall} = \{(x, \mu_{tall}(x))\}$
- Zugehörigkeitsfunktion: $\mu_{tall}(x)$

Zwei Sichtweisen auf Fuzzyness

- **Bewertung einer Aussage: Grad der Wahrheit**
  - Gegeben: Messung
  - größe(john) = 1,75m
  - „John ist groß" ist wahr zu 0,5
  - Eingesetzt für Sensorik, Aktorik (Regelungsmechanismen)
  - Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen
- **Constraint-Sichtweise: Grad des Glaubens**
  - Gegeben: unsichere Aussage
  - „‚John ist groß' ist wahr zu mindestens 0,5"
  - Weiterverarbeitung unter unsicherer Information
  - Einsetzbar in Wissensverarbeitung
  - Possibilistische Logik

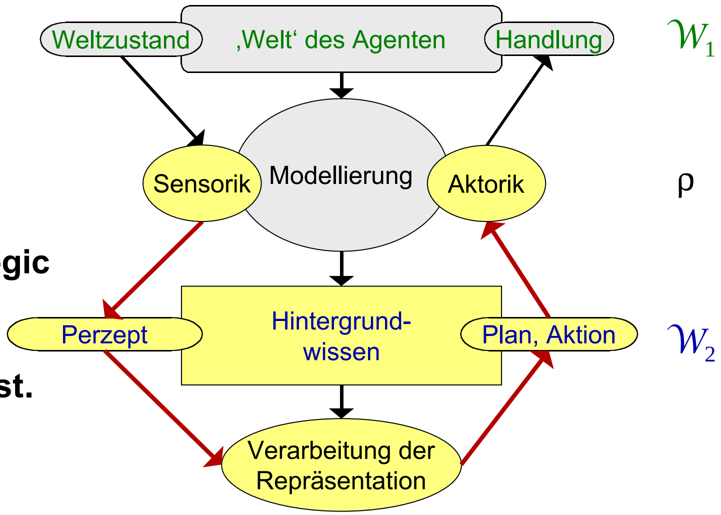
Einsatzmöglichkeiten der Fuzzy Logic

- **Repräsentation und Verarbeitung unscharfen oder vagen Wissens**
- **Formulierung unscharfer Regeln**
  - je ... desto ....
- **Direkte Kopplung an Sensorik/Aktorik**
  - Basierend auf physikalischer Größe (Messung)
  - Einsatz in der Regelungstechnik
- **Möglichkeit gegenüber Wahrscheinlichkeit eines Faktums**
  - W. benötigt alle möglichen Resultate (vollständiges Wissen)
  - M. basiert auf (Experten-)Meinung

Wissensbasierter Agent

Fuzzy-Logic

Possibilist. Logik



Literatur

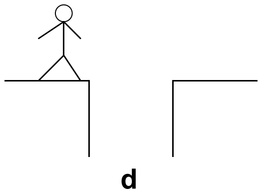
Zur Possibilistischen Logik

D. Dubois, J. Lang und H. Prade. Possibilistic Logic. In *D. Gabbay, C. Hogger, and J. Robinson (eds.)*, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Volume 3: Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning,* Oxford University Press (1994), pp. 493 – 513.

Zur Beziehung zwischen Fuzzy-Mengen und possibilistischer Logik

D. Dubois und H. Prade. Fuzzy Set and Possibility Theory-Based Methods in Artificial Intelligence. In *Artificial Intelligence 148* (2003), S. 1 – 9.

Beispiel: Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen

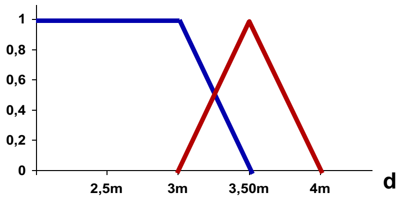


m-sprung(p) ∧ ziel(p) → sprung(p)

Springen oder lieber nicht?

Unsicherheiten für erfolgreichen Sprung zu p: Erf(p)

- **Distanz d aus Messung**
- **Menge A_j von Distanzen, die Agent springen kann**



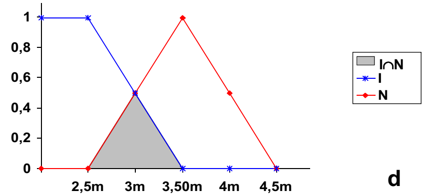
Erf(p) als unscharfe Schnittmenge zwischen unsch. Distanz dist(p) und unsch. Sprungfähigkeit sprungf(p):

$\mu_{Erf(p)}(x) = \min(\mu_{dist(p)}(x),\mu_{sprungf(p)}(x))$

$= \mu_{dist(p)\cap sprungf(p)}$

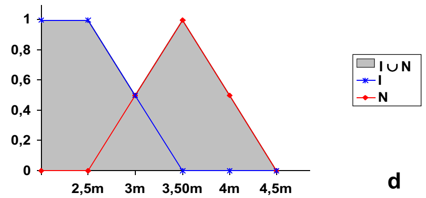
Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen

Unsichere Mengen I und N:



Durchschnitt

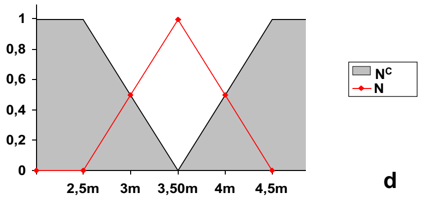
I∩N: $\mu_{I\cap N}(x) = \min(\mu_I(x),\mu_N(x))$



Vereinigung

I∪N: $\mu_{I\cup N}(x) = \max(\mu_I(x),\mu_N(x))$

Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen

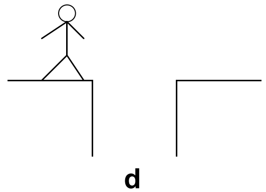


Unsichere Menge N:

Komplement

N^C: $\mu_{N^c}(x) = 1-\mu_N(x)$

Beispiel: Möglichkeitsverteilung



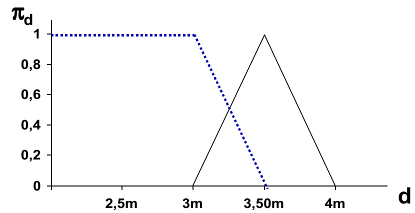
m-sprung(p) $\wedge$ ziel(p) $\rightarrow$ sprung(p)

Springen oder lieber nicht?

Unsicherheiten:

•Distanz d aus Messung

•Menge A_j von Distanzen, die Agent springen kann



•Möglichkeitsverteilung als Nähe zum Prototypen

•Möglichkeitsverteilung π_d bei Schätzung 3,5m

Notwendigkeitsmaß N

Möglichkeitsmaß Π:

$\Pi(A) = \sup_{u \in A} \pi_x(u)$

Notwendigkeitsmaß N:

$N(A) = 1 - \Pi(A^C)$

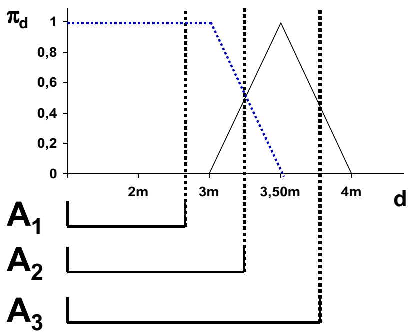
$= \inf_{u \notin A} (1 - \pi_x(u))$

$N(A \cup B) \geq \max(N(A), N(B))$

$N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$

$\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$

$\Pi(A \cap B) \leq \min(\Pi(A), \Pi(B))$



$N(A_1) = 0$ $\Pi(A_1) = 0$

$N(A_2) = 0$ $\Pi(A_2) = 0,5$

$N(A_3) = 0,5$ $\Pi(A_3) = 1$

Possibilistische Logik

- **Repräsentation und Verarbeitung sowohl unscharfen als auch sicheren Wissens**
- **Hier: Fragment necessity-valued (possibilistic) logic**
- **N als Notwendigkeitsmaß für (möglicherweise unvollständigen) Wissensstand nutzen**
- **Syntax: Necessity valued formula: $(\phi\ \alpha)$**
  - mit $\phi \in \mathcal{PL}1$
  - Gewichtung $\alpha \in (0,1]$
- **Intendierte Bedeutung: $N(\phi) \geq \alpha$**

Wissensbasis

- **Wissensbasis $\mathcal{F}$ ist Menge von Formeln $(\phi\ \alpha)$**
  - Konjunktive Verknüpfung
  - Disjunktive Verknüpfungen $(\phi\ \alpha) \vee (\psi\ \beta)$ nicht im Fragment enthalten
  - Aber: $(\phi \vee \psi\ \beta)$
- **Defuzzifizierung: α-Cut $\mathcal{F}_\alpha = \{(\phi\ \beta) \in \mathcal{F} \mid \beta \geq \alpha\}$**
- **klassische Projektion: $\mathcal{F}^*_\alpha = \{\phi \mid (\phi\ \beta) \in \mathcal{F}, \beta \geq \alpha\}$**

Semantik

- **Möglichkeitsverteilung π über Menge Ω der (klassischen) Interpretationen erzeugt Fuzzy-Menge als Modell von $\mathcal{F}$**
- **Für geschlossene Formel ϕ**
  - $\Pi(\phi) = \sup\{\pi(\varpi), \varpi \models \phi\}$
  - $N(\phi) = 1 - \Pi(\neg\phi) = \inf\{1 - \pi(\varpi), \varpi \models \phi\}$
- **Es gilt:**
  - $N(T)=1$
  - $N(\phi \wedge \psi) = \min(N(\phi),N(\psi))$
  - $N(\phi \vee \psi) \geq \max(N(\phi),N(\psi))$
  - Wenn $\phi \models \psi$ dann $N(\phi) \geq N(\psi)$
- **π erfüllt $(\phi\ \alpha)$ gdw $N(\phi) \geq \alpha$: $\pi \models (\phi\ \alpha)$**
  - Beispiel:
    - für $\mathcal{F}=\{(p \rightarrow q\ 0{,}4), (p\ 0{,}7)\}$ $\Omega = \{[p,q], [\neg p,q], [p,\neg q], [\neg p,\neg q]\}$
    - $\pi \models \mathcal{F}$ gdw $\pi([\neg p,q]) \leq 0{,}3$, $\pi([\neg p,\neg q]) \leq 0{,}3$, $\pi([p,\neg q]) \leq 0{,}6$, $\pi([p,q]) \leq 1$
- **$\mathcal{F} \models \phi$ gdw für alle π: wenn $\pi \models \mathcal{F}$, dann $\pi \models \phi$.**

π erfüllt $(p \rightarrow q\ 0{,}4)$
gdw $N(p \rightarrow q) \geq 0{,}4$
gdw $1 - \Pi(\neg (p \rightarrow q)) \geq 0{,}4$
gdw $1 - \Pi(p \wedge \neg q) \geq 0{,}4$
gdw $1 - 0{,}4 \geq \Pi(p \wedge \neg q)$
gdw $0{,}6 \geq \Pi(p \wedge \neg q)$
gdw $0{,}6 \geq \sup\{\pi(\varpi), \varpi \models \phi\}$
gdw $0{,}6 \geq \pi([p,\neg q])$

Partielle Inkonsistenz

- **π heißt normalisiert gdw $\sup\{\pi(\varpi), \varpi \in \Omega\} = 1$**
- **Wenn π normalisiert, gilt $N(\perp)=0$**
- **Nicht normalisiert:**
  - $\sup\{\pi(\varpi), \varpi \in \Omega\} < 1$
  - $\min(N(\phi),N(\neg\phi)) > 0$
- **Partielle Inkonsistenz einer Wissensbasis:**
  $Incons(\mathcal{F}) = \sup\{\alpha \mid \mathcal{F} \models (\perp\ \alpha)\}$
- **Bezug zu α-Cut:**
  $Incons(\mathcal{F}) = \sup\{\alpha \mid \mathcal{F}^*_\alpha$ ist inkonsistent$\}$
- **Widerlegungstheorem:**
  $\mathcal{F} \models (\phi\ \alpha)$ gdw $\mathcal{F} \cup \{(\neg\phi\ 1)\} \models (\perp\ \alpha)$

Resolutionsverfahren

$(c_1\ \alpha_1), (c_2\ \alpha_2) \vdash$
$(R(c_1,c_2)\ \min(\alpha_1, \alpha_2))$

Beispiel (Klauselmenge) $\mathcal{C}$
(elected(p) $\vee$ elected(m) 1)
($\neg$elected(p) $\vee$ $\neg$elected(m) 1)
($\neg$curr-pres(x) $\vee$ elected(x) 0,5)
(curr-pres(m) 1)
($\neg$supp(j,x) $\vee$ elected(x) 0,6)
(supp(j,m) 0,2)
($\neg$ victim-of-aff(x) $\vee$ $\neg$elected(x) 0,7)

Resultat (Korrektheit und Vollständigkeit): Die Bewertung der optimalen Widerlegung durch Resolution ist der Grad der Inkonsistenz der Wissensbasis

Beispiel

(¬elected(m) 1)   (¬curr-pres(x) ∨ elected(x) 0,5)

(¬curr-pres(m) 0,5)   (curr-pres(m) 1)

(⊥ 0,5)optimal

(¬elected(m) 1)   (¬supp(j,x) ∨ elected(x) 0,6)

(¬supp(j,m) 0,6)   (supp(j,m) 0,2)

(⊥ 0,2)non-optimal

Partielle Inkonsistenz berechnen

(victim-of-aff(m) 1)   (¬ victim-of-aff(x) ∨ ¬elected(x) 0,7)

(¬elected(m) 0,7)

(¬curr-pres(x) ∨ elected(x) 0,5)   (curr-pres(m) 1)

(elected(m) 0,5)

(⊥ 0,5)

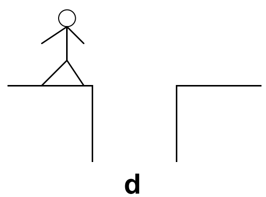
Incons($\mathcal{C}$ ∪ {(victim-of-aff(m) 1)}) = 0,5

Einsatzmöglichkeiten und Grenzen

- **Nicht triviale Deduktion:**
  - $\mathcal{F} \models (\phi\ \alpha)$ und Incons($\mathcal{F}$) < α
  - Ist nicht-monoton, weil Hinzufügen von Formeln zur WB den Inkonsistenzgrad erhöhen kann, wodurch Schlüsse mit niedriger Notwendigkeit ungültig werden unter nicht trivialer Deduktion.
- **Verwendungsmöglichkeiten:**
  - Strikte vs nicht-strikte Regeln
  - Perzeptionsabhängiges unsicheres Wissen
- **Weiterentwicklungen:**
  - Bewertung aus (0,1] erfordert totale Ordnung ⇒Verwendung einer partiellen Ordnung von Bewertungen
  - Möglichkeitsbewertungen zusätzlich zu Notwendigkeitsbewertungen
  - Bewertungen in nicht geschlossenen Formeln zur Repräsentation von je-desto-Regeln

Einsatzmöglichkeiten und Grenzen

{(m-sprung(x) ∧ ziel(x) → sprung(x) 1),
(ziel(p) 0,7),
(m-sprung(p) 0,5)}



Resultat:
(sprung(p) 0,5)

- **Kopplung von Sensorik/Aktorik an höhere Wissensverarbeitung**
- **Abstufung von Wahrheit (∞-wert. Logik)**
- **Aber: Abstufung hat für komplexe Formeln und Sachverhalte unklare Bedeutung**
  - Komplexe Schlussfolgerungen tendieren zu Einheitswerten
  - Entfuzzifizierung mittels α-Cuts
  - Was bedeutet ein Resultat von 0,5?

Zwischenstand

Vorlesung 23: Fuzzy Logic

- Operationen auf Fuzzy Mengen
- Possibilistische Logik: Semantik und Inferenzverfahren

Vorlesung 24: Bayessche Netze

- Probabilistische Erklärungen